

Δυναμικά Συστήματα (9/4/2024)

Απαντήστε σε 4 από τα παρακάτω 6 βαθμολογικά ισοδύναμα θέματα. Καλή επιτυχία!

Θέμα 1: Έστω το σύστημα:

$$x_1' = -x_1^3, \quad x_2' = -x_2^3$$

(α) Εξετάστε αν μπορείτε να προσδιορίσετε το είδος ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $(0, 0)$ μέσω του Θεωρήματος γραμμικοποίησης. (β) Με χρήση της συνάρτησης Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ δείξτε ότι το $(0, 0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας από την αναλυτική λύση του συστήματος.

Θέμα 2: (α) Δείξτε ότι η εξίσωση μαθηματικού εκκρεμούς μήκους l , μάζας m και συντελεστή τριβής k δίνεται από την διαφορική εξίσωση:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{k}{m} \frac{d\theta}{dt} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

όπου $\theta(t)$ η γωνία που σχηματίζει το νήμα του εκκρεμούς με την κατακόρυφο την χρονική στιγμή t και g η σταθερά επιτάχυνσης βαρύτητας. (β) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας. (γ) Να μελετηθεί η ευστάθεια του συστήματος σε κάθε σημείο ισορροπίας.

Θέμα 3: Δείξτε ότι αν $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι ολικά Lipschitz, τότε η λύση του Π.Α.Τ.: $x' = f(x)$, $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ είναι μοναδική και ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$. Επιβεβαιώστε το αποτέλεσμα σας για το Π.Α.Τ.: $x' = \frac{1}{1+x^2}$, $x(0) = 0$.

Θέμα 4: Έστω το σύστημα:

$$x_1' = -x_1 - x_2 + x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad x_2' = x_1 - x_2 + x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

(α) Δείξτε ότι το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $(x_1, x_2) = (0, 0)$. (β) Με αλλαγή μεταβλητών $(x_1, x_2) \rightarrow (r, \theta)$ όπου $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$, δείξτε ότι οι εξισώσεις του συστήματος γράφονται ως: $r' = r^2 - r$ και $\theta' = 1$. Περιγράψτε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της λύσης του συστήματος (ευστάθεια σημείων ισορροπίας, ύπαρξη και ευστάθεια οριακών κύκλων, ασυμπτωτική συμπεριφορά).

Θέμα 5: Έστω το σύστημα: $x' = -x - 2y^2$, $y' = xy - y^3$. Να προσδιορίσετε το είδος ισορροπίας του σημείου $(0, 0)$ με την μέθοδο Lyapunov χρησιμοποιώντας συνάρτηση Lyapunov της μορφής $V(x, y) = x^2 + \lambda y^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, προσδιορίζοντας κατάλληλη τιμή του λ .

Θέμα 6: Με χρήση της συνάρτησης Lyapunov $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ δείξτε ότι το $(0, 0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος

$$x_1' = -x_2 - x_1 x_2^2 + x_3^2 - x_1^3, \quad x_2' = x_1 + x_3^2 - x_2^3, \quad x_3' = -x_1 x_3 - x_3 x_1^2 - x_2 x_3^2 - x_3^5$$

Δείξτε επίσης ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα σε αυτό το σημείο είναι ευσταθές κατά Lyapunov αλλά όχι ασυμπτωτικά ευσταθές.