

Δυναμικά Συστήματα (739): Θέματα πτυχιακής Εξέτασης, 21/6/2024

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B, 10)$ όπου $B \leq 12$ το άθροισμα βαθμών που θα συγκεντρώσετε. Καλή επιτυχία!

Θέμα 1: Δίνεται στο σύστημα: $x'_1 = -x_1 + x_1x_2$, $x'_2 = x_1 + x_2 - 2x_1x_2$. (α) Να βρεθούν τα σημεία ισορροπίας του συστήματος. (β) Να γραμμικοποιήσετε το σύστημα σε κάθε σημείο ισορροπίας και να περιγράψετε τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του γραμμικοποιημένου συστήματος. [1 βαθμός]

Θέμα 2: (α) Έστω $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ τοπικά Lipschitz, W συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $x_0 \in W$. Έστω επίσης ότι κάθε λύση του συστήματος $x'(t) = f(x)$, $x(t_0) = x_0$ περιέχεται στο W . Δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση που ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$. [1 βαθμός]

(β) Έστω σύστημα της μορφής $x' = -\nabla V(x)$, $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, όπου $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^2 και

$$\nabla V(x) = \left[\frac{\partial V}{\partial x_1} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial V}{\partial x_n} \right]^T$$

(i) Δείξτε ότι $V'(x) \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και ότι $V'(x) = 0$ αν και μόνο αν x είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος. [1 βαθμός]

(ii) Έστω $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n : V(x) \leq c\}$ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ για κάθε $c \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι η λύση του συστήματος ορίζεται για κάθε $t \geq t_0$. [1 βαθμός]

Θέμα 3: Χρησιμοποιώντας υποψήφια συνάρτηση Lyapunov της μορφής:

$$V(x) = x^T P x, \quad P = P^T = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} > 0$$

(όπου p_{11}, p_{12}, p_{22} πραγματικοί αριθμοί που πρέπει να επιλέξετε), δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ κάθε ενός από τα παρακάτω συστήματα:

$$\begin{aligned} x'_1 &= -x_1 + x_1x_2, & x'_2 &= -x_2 \\ x'_1 &= -x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), & x'_2 &= x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ x'_1 &= x_2(1 - x_1^2), & x'_2 &= -(x_1 + x_2)(1 - x_1^2) \\ x'_1 &= -x_1 - x_2, & x'_2 &= 2x_1 - x_2^3 \end{aligned}$$

είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

[4 × 1, 0 = 4 βαθμοί]

Σε κάθε μία από τις περιπτώσεις αυτές εξετάστε αν το σημείο $(0, 0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

[4 × 0, 5 = 2 βαθμοί]

Θέμα 4: (α) Δίνεται το σύστημα:

$$y' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos^2 t \end{bmatrix}, \quad y_0 \in \mathbb{R}^2$$

Εξετάστε αν υπάρχει 2π-περιοδική λύση για κάποια αρχική συνθήκη y_0 (αν υπάρχει δεν χρειάζεται να την υπολογίσετε αναλυτικά). [1 βαθμός]

(β) Να λυθεί το Π.Α.Τ.:

$$y' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ 2e^t \end{bmatrix}, \quad y(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

[1 βαθμός]