

Δυναμικά Συστήματα (739) - Σεπτέμβρης 2024

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B, 10)$ όπου B το άθροισμα των βαθμών που θα συγκεντρώσετε. Καλή Επιτυχία!

Θέμα 1: Έστω το σύστημα: $x'_1 = \frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_2}$, $x'_2 = -\frac{\partial H(x_1, x_2)}{\partial x_1}$, όπου $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ κλάσης C^2 . Έστω (x_1^*, x_2^*) σημείο ισορροπίας του συστήματος με $\det J(x_1^*, x_2^*) \neq 0$, όπου $J(x_1^*, x_2^*)$ ο πίνακας Jacobian του συστήματος στο σημείο (x_1^*, x_2^*) . Δείξτε ότι το (x_1^*, x_2^*) είναι σαγματικό σημείο η κέντρο και βρείτε συνθήκες που αντιστοιχούν σε κάθε μία από αυτές τις δύο περιπτώσεις. Ποιές είναι οι ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις; [1 βαθμός]

Θέμα 2:

(i) Δίνεται το σύστημα: $y'(t) = y^2(t)$, $t \geq 0$, $y(0) = 1$. Να βρεθεί η λύση του συστήματος, $\phi(t)$, και το μέγιστο διάστημα $J = [0, \alpha^*)$ στο οποίο ορίζεται. [0,5 βαθμοί]

(ii) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα $J_1 = [0, t_1^*]$ στο οποίο το Θεώρημα Picard-Lindelof εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης για το σύστημα στο (i). [1 βαθμός]

(iii) Βρείτε τον πίνακα e^{At} , αν

$$A = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

και όπου $\sigma \in \mathbb{R}$ και $\omega \in \mathbb{R}$.

[1 βαθμός]

Θέμα 3: Έστω το σύστημα: $x'_1 = x_1 - x_2 - x_1^3$, $x'_2 = x_1 + x_2 - x_2^3$.

(i) Εφαρμόζοντας αλλαγή μεταβλητών $(x_1, x_2) \rightarrow (r, \theta)$, όπου $x_1 = r \cos \theta$ και $x_2 = r \sin \theta$, δείξτε ότι στο σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο $\mathcal{D} = \{(r, \theta) : \frac{1}{3} \leq r \leq 2\}$ είναι θετικά αναλλοίωτο. Υπενθύμιση: Τριγωνομετρικές ταυτότητες: (α) $4(\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) = 3 + \cos 4\theta$, (β) $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$, (γ) $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$. [1 βαθμός]

(ii) Γραμικοποιώντας το σύστημα γύρω από το σημείο ισορροπίας, εξετάστε τις τοπικές ιδιότητες ευστάθειας. [1 βαθμός]

Θέμα 4: Έστω γραμμικό σύστημα ελέγχου $\Sigma_i(A, B)$, $x' = Ax + Bu$, $x(0) = \xi \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ Hurwitz και $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Δείξτε ότι:

(i) Αν $u : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ συνεχής και φραγμένη, τότε $x(t)$ φραγμένη στο $[0, \infty)$. [1 βαθμός]

(ii) Αν επιπλέον $u(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$, τότε $x(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. [1 βαθμός]

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε (χωρίς απόδειξη) ότι αν A πίνακας Hurwitz, τότε υπάρχουν $M \geq 1$ και $\alpha > 0$ ώστε $\|e^{At}\| \leq Me^{-\alpha t}$, $t \geq 0$, όπου $\|e^{At}\|$ η φασματική νόρμα του πίνακα e^{At} , δηλ. $\|e^{At}\| = \max\{\sqrt{y^T e^{A^T t} e^{At} y} : y^T y = 1\}$.

Θέμα 5: Έστω το σύστημα:

$$x' = f(x), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}$$

(α) Δείξτε ότι $x^* = 0$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Βρείτε την αναλυτική λύση του συστήματος και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης. Συγκρίνετε με το διάγραμμα φάσης του γραμμικοποιημένου συστήματος $y' = Df(0)y$ όπου $Df(0)$ είναι ο πίνακας Jacobian στο σημείο $x^* = 0$. [1 βαθμός]

(β) Έστω $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ η συνάρτηση:

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_1^2 \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση $h^{-1} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ συνεχής στο $\mathbb{R}^2$. Δείξτε επίσης ότι η h μετασχηματίζει το σύστημα $x' = f(x)$ στο γραμμικό σύστημα $y' = Df(0)y$ υπό την έννοια ότι αν $y = h(x)$ τότε $y' = Df(0)y$. [1 βαθμός]

Θέμα 6: Οι εξισώσεις του Euler για περιστρεφόμενο δορυφόρο γράφονται ως:

$$J_1\omega'_1 = (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + u_1$$

$$J_2\omega'_2 = (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 + u_2$$

$$J_3\omega'_3 = (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + u_3$$

όπου ω_i , $i = 1, 2, 3$, είναι οι γωνιακές ταχύτητες ως προς τους τρεις κύριους άξονες, u_i , $i = 1, 2, 3$, οι ροπές εισόδου και J_i , $i = 1, 2, 3$, θετικές σταθερές (ροπές αδράνειας ως προς τους κύριους άξονες).

(i) Δείξτε ότι αν $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ το σημείο ισορροπίας $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0, 0, 0)$ είναι ευσταθές κατά Lyapunov. Είναι και ασυμπτωτικά ευσταθές; Υπόδειξη: Χρησιμοποιείστε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov: $V(\omega) = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2$. [1 βαθμός]

(ii) Έστω ότι οι ροπές εισόδου διαμορφώνονται μέσω ανάδρασης, δηλ. $u_i = -k_i\omega_i$, $i = 1, 2, 3$, όπου k_i θετικές σταθερές. Δείξτε ότι σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

[1 βαθμός]

Θέμα 7: Δίνεται το σύστημα:

$$x'_1 = -x_1 + x_1x_2, \quad x'_2 = -x_2$$

Δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. [Υπόδειξη: Δείξτε ότι $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ είναι συνάρτηση Lyapunov]. Είναι το $(0, 0)$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές; (δηλ. ισχύει ότι $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), x_2(t)) = (0, 0)$ για κάθε $(x_1(0), x_2(0)) \in \mathbb{R}^2$;) [1 βαθμός]