

Δυναμικά συστήματα στον $\mathbb{R}^2$

1.1 Ροή Γραμμικού συστήματος: Έστω σύστημα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ορίζουμε την ροή του συστήματος ως $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $\phi_t := e^{At}$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ και $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$:

(i) $\phi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

(ii) $\phi_s \circ \phi_t(\mathbf{x}) = \phi_{t+s}(\mathbf{x})$

(iii) $\phi_{-t} \circ \phi_t(\mathbf{x}) = \phi_t \circ \phi_{-t}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

Οι ιδιότητες (i)-(iii) προκύπτουν άμεσα από τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης e^{At} .

1.2 Ευσταθής, ασταθής και κεντρικός υπόχωρος: Έστω σύστημα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Έστω $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$ του πίνακα A που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_j = \sigma_j + i\omega_j \in \sigma(A)$ (αν $\omega_j = 0$, τότε $\mathbf{v}_j = \mathbf{0}$). Έστω:

$$\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_m, \mathbf{v}_m\}$$

βάση του $\mathbb{R}^n$ (όπου $n = 2m - k$).

Ορισμός: Έστω $\lambda_j = \sigma_j + i\omega_j$, $\mathbf{w}_j = \mathbf{u}_j + i\mathbf{v}_j$ και $\mathcal{B}$ όπως ορίστηκαν παραπάνω. Τότε

- $\mathcal{X}^- = \text{span}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j : \sigma_j < 0\}$
- $\mathcal{X}^0 = \text{span}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j : \sigma_j = 0\}$
- $\mathcal{X}^+ = \text{span}\{\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_j : \sigma_j > 0\}$

είναι ο ευσταθής, κεντρικός και ασταθής υπόχωρος του συστήματος $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, αντίστοιχα. Ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

- (i) $\mathbb{R}^n = \mathcal{X}^- \oplus \mathcal{X}^0 \oplus \mathcal{X}^+$.
- (ii) Κάθε ένας από τους τρεις υπόχωρους είναι A -αναλλοίωτος, π.χ. $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^- \Rightarrow A\mathbf{x} \in \mathcal{X}^-$, κλπ.
- (iii) Αν $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}^-$, τότε $e^{At}\mathbf{x}_0 \in \mathcal{X}^-$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (και παρόμοια για $\mathcal{X}^0$, $\mathcal{X}^+$).

Ορισμός: Ο πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ λέγεται υπερβολικός (αντίστοιχα το σύστημα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ λέγεται υπερβολικό) αν $\mathcal{X}^0 = \{\mathbf{0}\}$.

Στην συνέχεια δίνουμε μερικούς ορισμούς ευστάθειας καθώς και ικανές και αναγκαίες συνθήκες ευστάθειας γραμμικών χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων (χωρίς αποδείξεις). Το θέμα αυτό αναπτύσσεται με μεγαλύτερη πληρότητα σε άλλη ενότητα των σημειώσεων.

Ορισμός (σημείο ισορροπίας): Έστω το δυναμικό σύστημα: $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Το διάνυσμα $\mathbf{x}^*$ λέγεται σημείο ισορροπίας του συστήματος αν $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Ορισμός (ευστάθειας): Έστω $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ η λύση του συστήματος $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, όπου $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ λέγεται:

1. Ευσταθές (κατά Lyapunov) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon \text{ για κάθε } t \geq 0$$

2. Ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) και η παράμετρος δ στο (1) μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^* \text{ καθώς } t \rightarrow \infty$$

3. Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, αν

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^* \text{ καθώς } t \rightarrow \infty \text{ για κάθε } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

4. Ασταθές αν δεν είναι ευσταθές (κατά Lyapunov).

Θεώρημα: Έστω το γραμμικό, χρονικά αναλλοίωτο σύστημα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) αν και μόνο αν για κάθε ιδιοτιμή λ_i , $i = 1, 2, \dots, \rho$, του πίνακα A ισχύει $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ και κάθε ιδιοτιμή με $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ έχει ίση αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα. Το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι (ολικά) ασυμπτωτικά ευσταθές αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A ικανοποιούν την ανισότητα $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2, \dots, \rho$.

1.3 Ταξινόμηση συστημάτων στο επίπεδο φάσης: Έστω $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Τότε η πραγματική μορφή Jordan του A είναι μία από τις παρακάτω:

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2), \quad J = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \quad (\lambda_{1,2} = \sigma \pm i\omega, \sigma, \omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0)$$

και

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \quad J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Περίπτωση 1: ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$): Στην περίπτωση αυτή:

$$\begin{bmatrix} z_1' \\ z_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow z_1(t) = z_{10}e^{\lambda_1 t}, \quad z_2(t) = z_{20}e^{\lambda_2 t}$$

Απαλείφοντας την μεταβλητή χρόνου:

$$z_2 = z_{20} \left(e^{\lambda_1 t} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = z_{20} \left(\frac{z_1}{z_{10}} \right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = \left(\frac{z_{20}}{z_{10}^{\lambda_2/\lambda_1}} \right) z_1^{\lambda_2/\lambda_1} := c z_1^{\lambda_2/\lambda_1}$$

όπου $c \in \mathbb{R}$. Διακρίνουμε τις παρακάτω υπο-περιπτώσεις:

Περίπτωση 1α (ευσταθής κόμβος, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$): Στην περίπτωση αυτή (Σχήμα 1) $e^{\lambda_1 t} \rightarrow 0$ και $e^{\lambda_2 t} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Η λύση είναι (ολικά) ασυμπτωτικά ευσταθής. Οι τροχιές συγχλίνουν στο σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ εφαπτομενικά από τον z_1 -άξονα, που είναι η διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος του J που αντιστοιχεί στην "αργή" ιδιοτιμή λ_1 . Στο όριο $t \rightarrow -\infty$ η διεύθυνση των τροχιών τείνει να γίνει παράλληλη με τον z_2 -άξονα, που είναι η διεύθυνση του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην "γρήγορη" ιδιοτιμή λ_2 . Αναλυτικά:

$$\frac{dz_2}{dz_1} = c \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1 > 0$$

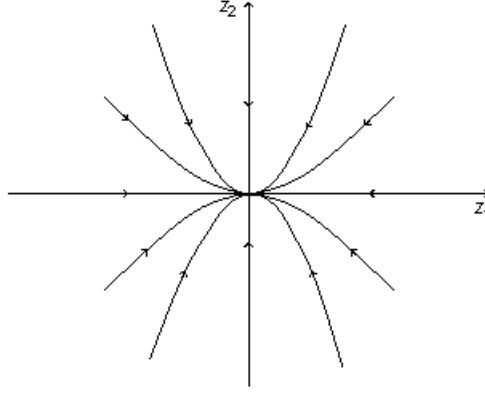
και άρα

$$\lim_{|z_2| \rightarrow 0} \frac{dz_2}{dz_1} = 0$$

Επίσης,

$$\mathbf{z}_0 = (1, 0)^T \Rightarrow z_1(t) = e^{\lambda_1 t} \text{ και } z_2(t) = 0, \quad \mathbf{z}_0 = (0, 1)^T \Rightarrow z_2(t) = e^{\lambda_2 t} \text{ και } z_1(t) = 0$$

και άρα έχουμε: $\mathcal{X}^- = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{X}^+ = \mathcal{X}^0 = \{\mathbf{0}\}$.



Σχήμα 1: Περίπτωση 1α: Ευσταθής κόμβος

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = -2$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα,

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και επομένως

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} ([1 \ 1] \mathbf{x}_0) + e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} ([0 \ 1] \mathbf{x}_0)$$

Επομένως, αν $\mathbf{x}_0^T = [x_{01} \ x_{02}]$,

$$\mathbf{x}(t) = (x_{01} + x_{02})e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{02}e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

και

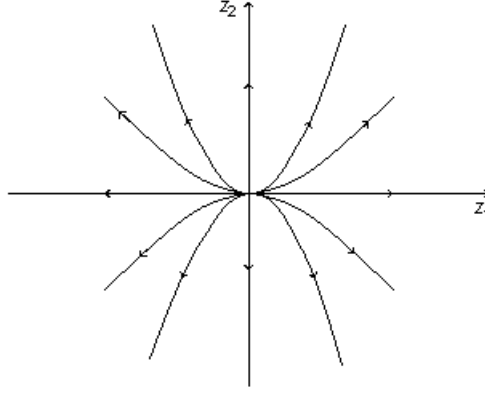
$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

Επομένως: $\mathcal{X}^- = \mathbb{R}^2$ και $\mathcal{X}^+ = \mathcal{X}^0 = \{\mathbf{0}\}$ είναι ο ευσταθής, ασταθής και κεντρικός υπόχωρος, αντίστοιχα.

Περίπτωση 1β (ασταθής κόμβος, $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$): Το διάγραμμα (Σχήμα 2) είναι το ίδιο αλλά η κατεύθυνση των τροχιών αντιστρέφεται. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $J \rightarrow -J$ και θέτοντας $\tau = -t$ έχουμε:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{z}}{d(-t)} = -\frac{d\mathbf{z}}{dt} = -J\mathbf{z}$$

Περίπτωση 1γ (Σαγματικό σημείο, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$): Στην περίπτωση αυτή $z_1' = \lambda_1 z_1$ και $z_2' = \lambda_2 z_2$. Οι ιδιοτιμές έχουν αντίθετο πρόσημο και $z_1 = e^{\lambda_1 t} z_{10}$. Καθώς $t \rightarrow +\infty$, έχουμε $z_1 \rightarrow +\infty$ αν $z_{10} > 0$ και



Σχήμα 2: Περίπτωση 1β: Ασταθής κόμβος

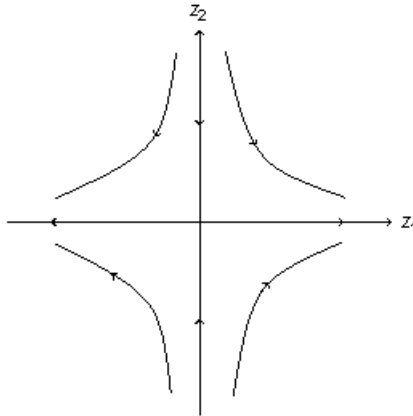
$z_1 \rightarrow -\infty$ αν $z_{10} < 0$. Επίσης $z_2 = e^{\lambda_2 t} z_{20} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow +\infty$. Οι τροχιές του συστήματος ικανοποιούν την εξίσωση: $z_2 = c z_1^{\lambda_2/\lambda_1}$ όπου $c \in \mathbb{R}$ και $\lambda_2/\lambda_1 < 0$ και προσομοιάζουν με υπερβολές. Επίσης:

$$\frac{dz_2}{dz_1} = c \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1}, \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < -1$$

Επομένως, αν $z_{10} \neq 0$ και $z_{20} \neq 0$ οι τροχιές τείνουν ασυμπτωτικά στον z_1 άξονα καθώς $|z_1| \rightarrow \infty$ και στον z_2 άξονα καθώς $|z_1| \rightarrow 0$. Το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ασταθές και

$$\mathcal{X}^- = \left\{ \gamma \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} : \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathcal{X}^+ = \left\{ \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \gamma \in \mathbb{R} \right\} \text{ και } \mathcal{X}^0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

είναι ο ευσταθής, ασταθής και κεντρικός υπόχωρος, αντίστοιχα.



Σχήμα 3: Περίπτωση 1γ: Σαγματικό σημείο ισορροπίας

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι $\lambda_1 = -1$ και $\lambda_2 = 2$ και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα,

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και επομένως

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{x}_0 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 \right) + e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_0 \right)$$

Επομένως, αν $\mathbf{x}_0^T = [x_{01} \ x_{02}]$,

$$\mathbf{x}(t) = (x_{01} - \frac{1}{3}x_{02})e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_{02}e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

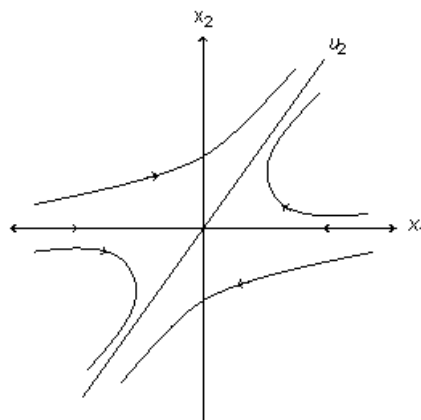
και

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

Επομένως:

$$\mathcal{X}^- = \left\{ \gamma \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} : \gamma \in \mathbb{R} \right\}, \quad \mathcal{X}^+ = \left\{ \gamma \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix} : \gamma \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{και} \quad \mathcal{X}^0 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

είναι ο ευσταθής, ασταθής και κεντρικός υπόχωρος, αντίστοιχα.



Σχήμα 4: Σαγματικό σημείο (Παράδειγμα)

Περίπτωση 2 (Μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές): Έστω το σύστημα

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}, \quad \sigma, \omega \in \mathbb{R}, \quad \omega \neq 0$$

Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι μιγαδικές συζυγείς: $\lambda = \sigma + i\omega$ και $\bar{\lambda} = \sigma - i\omega$. Οι εξισώσεις του συστήματος γράφονται ως:

$$x'_1 = \sigma x_1 + \omega x_2, \quad x'_2 = -\omega x_1 + \sigma x_2$$

Μετασχηματίζουμε το σύστημα σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) , όπου

$$(x_1 = r \cos \theta, \ x_2 = r \sin \theta) \Leftrightarrow (r^2 = x_1^2 + x_2^2, \ \theta = \tan^{-1}(x_2/x_1))$$

Παραγωγίζοντας:

$$2rr' = 2x_1x_1' + 2x_2x_2' \Rightarrow rr' = x_1(\sigma x_1 + \omega x_2) + x_2(-\omega x_1 + \sigma x_2) = \sigma(x_1^2 + x_2^2) = \sigma r^2$$

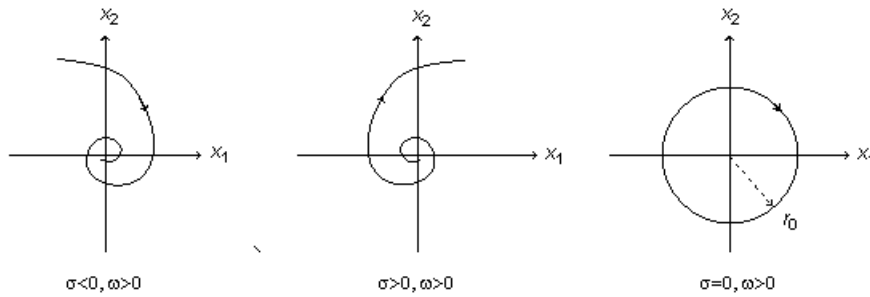
και άρα $r' = \sigma r \Rightarrow r(t) = e^{\sigma t} r_0$. Επίσης:

$$\theta' = \frac{1}{1 + \frac{x_2^2}{x_1^2}} \frac{x_2'x_1 - x_1'x_2}{x_1^2} = \frac{x_1^2}{r^2} \frac{(-\omega x_1 + \sigma x_2)x_1 - (\sigma x_1 + \omega x_2)x_2}{x_1^2}$$

Ισοδύναμα

$$\theta' = -\frac{\omega(x_1^2 + x_2^2)}{r^2} = -\frac{\omega r^2}{r^2} = -\omega \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 - \omega t$$

Παρατηρούμε ότι $\sigma > 0 \Rightarrow r(t) \rightarrow \infty$ καθώς $t \rightarrow \infty$ και $r(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow -\infty$ και το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ασταθές. Αν $\sigma = 0 \Rightarrow r(t) = r_0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και η τροχιά του συστήματος ταλαντώνεται χωρίς απόσβεση. Το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) αλλά όχι ασυμπτωτικά. Τέλος, $\sigma < 0 \Rightarrow r(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ και $r(t) \rightarrow \infty$ καθώς $t \rightarrow -\infty$. Το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Και στις τρεις περιπτώσεις, αν $\omega > 0$, η συνάρτηση $\theta(t)$ φθίνει γραμμικά και η τροχιά του συστήματος είναι δεξιόστροφη σπείρα, ενώ αν $\omega < 0$ η συνάρτηση $\theta(t)$ είναι αύξουσα (γραμμικά) και η τροχιά του συστήματος είναι αριστερόστροφη σπείρα. Οι τρεις περιπτώσεις που αντιστοιχούν στο πρόσημο του σ συνοψίζονται γραφικά στο Σχήμα 5.



Σχήμα 5: Περίπτωση 2: Μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές

Στο Σχήμα 5 τα διαγράμματα φάσης αντιστοιχούν σε ευσταθή εστία (αριστερά), ασταθή εστία (κέντρο) και κέντρο (δεξιά). Το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι αντίστοιχα ασυμπτωτικά ευσταθές, ασταθές και ευσταθές κατά Lyapunov (αλλά όχι ασυμπτωτικά). Και στις τρεις περιπτώσεις αν $\omega < 0$ η φορά της τροχιάς αντιστρέφεται (γίνεται αριστερόστροφη).

Παράδειγμα: Να μελετηθεί το διάγραμμα φάσης του συστήματος $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολωνύμου $\phi(\lambda) = \det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 + 16 = 0$ και επομένως $\lambda = 4i$, $\bar{\lambda} = -4i$. Η ιδιοτιμή λ αντιστοιχεί σε παραμέτρους $\sigma = 0$ και $\omega = 4$. Το ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ είναι η λύση της

$$\begin{bmatrix} 4i & 2 \\ -8 & 4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\alpha = i\beta$$

Άρα επιλέγουμε:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως

$$A = U\Sigma U^{-1}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad U^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \Sigma = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Γράφουμε

$$\mathbf{x}' = U\Sigma U^{-1}\mathbf{x} \Rightarrow U^{-1}\mathbf{x}' = \Sigma U^{-1}\mathbf{x}$$

Έστω $\mathbf{z} = U^{-1}\mathbf{x}$. Τότε

$$\mathbf{z}' = \Sigma\mathbf{z} \Rightarrow \begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow z'_1 = 4z_2, \quad z'_2 = -4z_1$$

Σε πολικές συντεταγμένες,

$$r^2 = z_1^2 + z_2^2 \Rightarrow 2rr' = 2z_1z'_1 + 2z_2z'_2 = 2z_1(4z_2) + 2z_2(-4z_1) = 0 \Rightarrow r' = 0 \Rightarrow r^2 = r_0^2 = z_1^2 + z_2^2$$

Στις αρχικές συντεταγμένες

$$\mathbf{x} = U\mathbf{z} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = z_2 \quad \text{και} \quad x_2 = 2z_1$$

Άρα

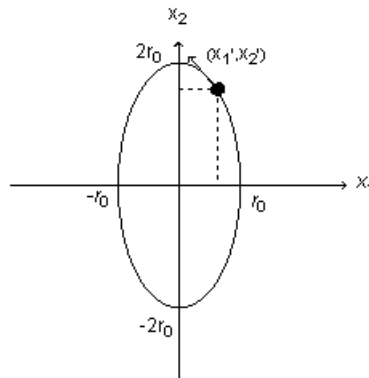
$$z_1^2 + z_2^2 = \frac{1}{4}x_2^2 + x_1^2 = r_0^2 \Rightarrow \left(\frac{x_1}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2r_0}\right)^2 = 1$$

που αντιστοιχεί σε έλλειψη με κέντρο το σημείο $(0,0)$ και μήκος ημι-αξόνων $l_1 = r_0$ και $l_2 = 2r_0$.

Για να βρούμε την διεύθυνση της τροχιάς υπολογίζουμε το εφαπτομενικό διάνυσμα (x'_1, x'_2) σε τυχαίο σημείο της έλλειψης, π.χ. στο $(x_1, x_2) = \left(\frac{r_0}{\sqrt{2}}, \frac{2r_0}{\sqrt{2}}\right)$. Έχουμε

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{r_0}{\sqrt{2}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} \frac{r_0}{\sqrt{2}}$$

και άρα η τροχιά είναι αριστερόστροφη (δείτε Σχήμα 6).



Σχήμα 6: Τροχιά (Παράδειγμα)

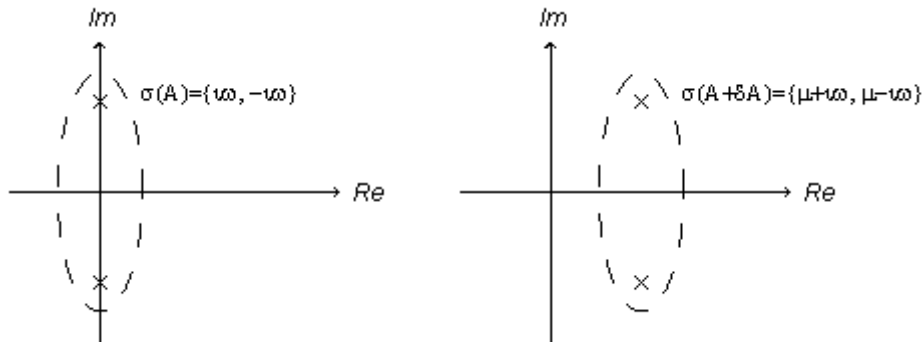
Παρατήρηση (Ευαισθησία ευστάθειας για μικρές παραμετρικές διαταραχές): Οι ιδιοτιμές πίνακα είναι συνεχείς συναρτήσεις των στοιχείων του και επομένως ανυπαίρετα μικρές διαταραχές $\|\delta A\|$, $A \rightarrow A + \delta A$ σε πίνακα A με φανταστικές ιδιοτιμές μπορούν να αλλάξουν τα ποιοτικά χαρακτηριστικά του διαγράμματος φάσης και τις ιδιότητες ευστάθειας, σε αντίθεση, π.χ. με συστήματα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$, που είναι "δομικά ευσταθή". Για παράδειγμα, έστω σύστημα:

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}, \quad \omega \neq 0$$

με ιδιοτιμές $\lambda = \pm i\omega$ και το αντίστοιχο σύστημα

$$\mathbf{y}' = (A + \delta A)\mathbf{y}, \quad A + \delta A = \begin{bmatrix} \mu & \omega \\ -\omega & \mu \end{bmatrix}, \quad \omega \neq 0$$

που έχει ιδιοτιμές $\hat{\lambda} = \mu \pm i\omega$ και αντιστοιχεί σε μικρές διαταραχές $\delta_{11} = \delta_{22} = \mu$ των διαγωνίων στοιχείων του πίνακα A (Σχήμα 7). Αν $\mu > 0$ (αυθαίρετα μικρό), το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ μεταβάλλεται από κέντρο σε ασταθή εστία. Το σημείο ισορροπίας του αρχικού συστήματος $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ είναι ευσταθές κατά Lyapunov (αλλά όχι ασυμπτωτικά), ενώ το σημείο ισορροπίας του διαταραγμένου συστήματος $\mathbf{y}' = (A + \delta A)\mathbf{y}$ είναι ασταθές.



Σχήμα 7: Διαταραχή ιδιοτιμών (Παρατήρηση)

Περίπτωση 3 (Μη-μηδενική, πολλαπλή ιδιοτιμή, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$): Εξετάζουμε σύστημα της μορφής:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις γράφονται ως:

$$x_1' = \lambda x_1 + kx_2, \quad x_2' = \lambda x_2$$

η

$$x_2 = e^{\lambda t} x_{02}, \quad x_1' = \lambda x_1 + kx_{02}e^{\lambda t}$$

Η δεύτερη εξίσωση είναι γραμμική μη-ομογενής. Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης είναι $x_1 = Ae^{\lambda t}$. Μία ειδική λύση της μη-ομογενούς εξίσωσης είναι

$$x_1^{PI} = Bte^{\lambda t} \Rightarrow Be^{\lambda t} + B\lambda te^{\lambda t} = \lambda Bte^{\lambda t} + kx_{02}e^{\lambda t} \Rightarrow B = kx_{02}$$

Άρα η γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι:

$$x_1(t) = Ae^{\lambda t} + kx_{02}te^{\lambda t}$$

Αρχική συνθήκη: $x_1(0) = A$ και άρα

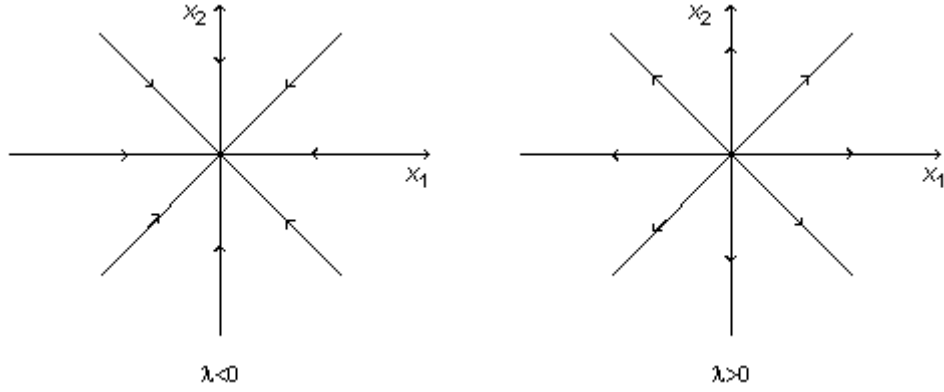
$$x_1(t) = e^{\lambda t} x_{01} + kx_{02}te^{\lambda t} = e^{\lambda t}(x_{01} + kx_{02}t), \quad x_2(t) = e^{\lambda t} x_{02}$$

είναι η λύση του συστήματος. Απαλείφοντας την μεταβλητή του χρόνου:

$$\lambda t = \ln\left(\frac{x_2}{x_{02}}\right) \Rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{x_2}{x_{02}}\right)$$

και άρα

$$x_1 = e^{\ln(x_2/x_{02})} \left[x_{01} + kx_{02} \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{x_2}{x_{02}}\right) \right] \Rightarrow x_1 = x_2 \left[\frac{x_{01}}{x_{02}} + \frac{k}{\lambda} \ln\left(\frac{x_2}{x_{02}}\right) \right]$$



Σχήμα 8: Περίπτωση 3α: Διάγραμμα φάσης, $A = \text{diag}(\lambda, \lambda)$

Περίπτωση 3α, $k = 0$: Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας $A = \text{diag}(\lambda, \lambda)$ είναι απλής δομής. Το διάγραμμα φάσης ορίζεται από τις ευθείες $x_2/x_{02} = x_1/x_{01}$:

Γιά $\lambda < 0$ το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, ενώ αν $\lambda > 0$ το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ασταθές.

Περίπτωση 3β, $k = 1$ (Νόθος κόμβος): Στην περίπτωση αυτή ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

είναι μη-απλής δομής. Από την προηγούμενη ανάλυση: $x_1 = e^{\lambda t}(x_{01} + x_{02}t)$, $x_2 = e^{\lambda t}x_{02}$ και άρα

$$x_2 = \frac{1}{\frac{x_{01}}{x_{02}} + t} x_1$$

Επομένως:

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{x_{01}}{x_{02}} + t} = 0$$

Επίσης:

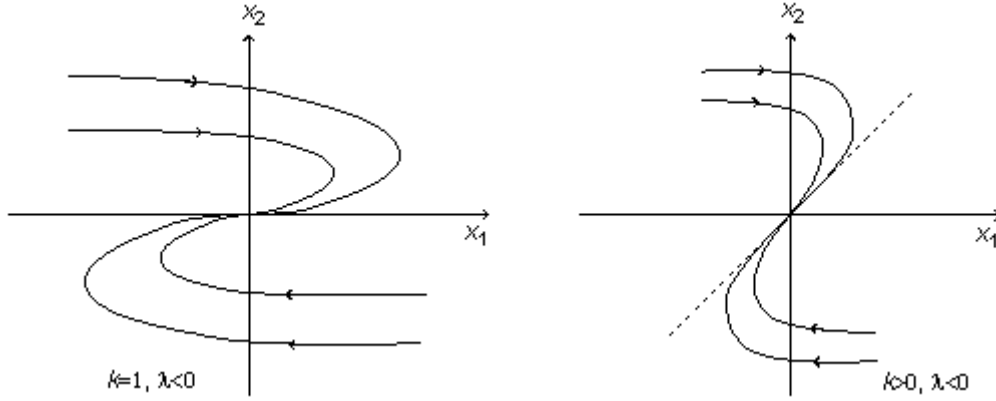
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\lambda x_2}{\lambda x_1 + x_2} = \frac{\lambda \frac{x_2}{x_1}}{\lambda + \frac{x_2}{x_1}} \rightarrow 0$$

καθώς $|t| \rightarrow \infty$ και επομένως οι τροχιές τείνουν να γίνουν παράλληλες με τον x_1 -άξονα καθώς $|t| \rightarrow \infty$. Το Σχήμα 9 δείχνει το διάγραμμα φάσης για $k = 1$ και την γενική περίπτωση $k > 0$. Και στα δύο διαγράμματα η ιδιοτιμή λ είναι αρνητική και το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Όταν $\lambda > 0$ το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ασταθές και η φορά της τροχιάς αντιστρέφεται.

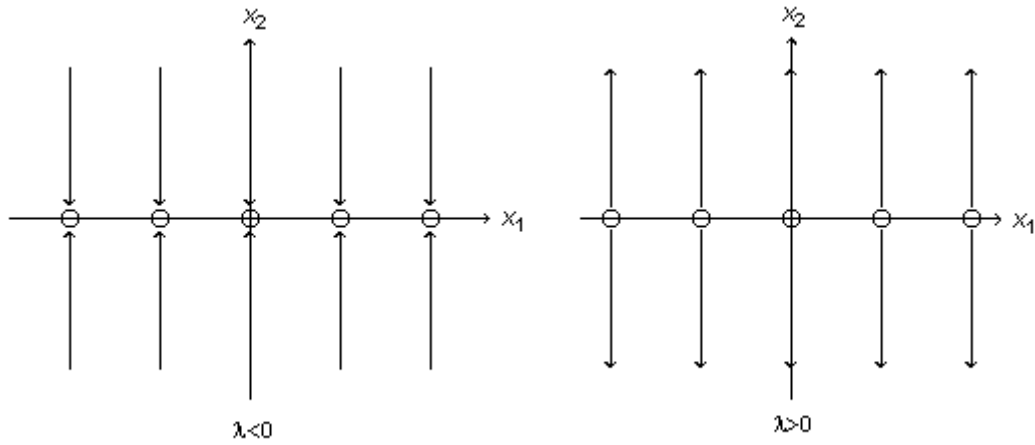
Περίπτωση 4 (Μία ιδιοτιμή ίση με μηδέν, $\sigma(A) = \{0, \lambda\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$): Στην περίπτωση αυτή:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

Οι εξισώσεις του συστήματος είναι: $x'_1 = 0 \Rightarrow x_1 = x_{01}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και $x'_2 = \lambda x_2 \Rightarrow x_2 = e^{\lambda t} x_{02}$. Παρατηρούμε ότι κάθε σημείο του x_1 -άξονα ($x_2 = 0$) είναι σημείο ισορροπίας. Αν $\lambda < 0$, $x_2(t) \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ ενώ αν $\lambda > 0$, $x_2(t) \rightarrow \infty$ αν $x_{02} > 0$ και $x_2(t) \rightarrow -\infty$ αν $x_{02} < 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Αν $\lambda < 0$, κάθε σημείο ισορροπίας στον x_1 -άξονα είναι ευσταθές κατά Lyapunov αφού η τροχιά του συστήματος μπορεί να περιοριστεί αυθαίρετα κοντά στο σημείο ισορροπίας (όταν η αρχική συνθήκη είναι αρχούντως κοντά), όχι όμως ασυμπτωτικά: Υπάρχουν σημεία αυθαίρετα κοντά σε κάθε σημείο ισορροπίας (πάνω στον άξονα



Σχήμα 9: Περίπτωση 3β: Διάγραμμα φάσης, νόθος κόμβος $k = 1, k > 0$



Σχήμα 10: Περίπτωση 4: Διάγραμμα φάσης, $\lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 = 0$

των x_1) για τα οποία η τροχιά του συστήματος δεν συγκλίνει στο συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας. Αν $\lambda > 0$ κάθε σημείο ισορροπίας στον x_1 -άξονα είναι ασταθές.

Περίπτωση 5 (Και οι δύο ιδιοτιμές ίσες με μηδέν, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 0$): Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 5α (Ο πίνακας A είναι μη-απλής δομής ($\tau = 2, d = 1$)):

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

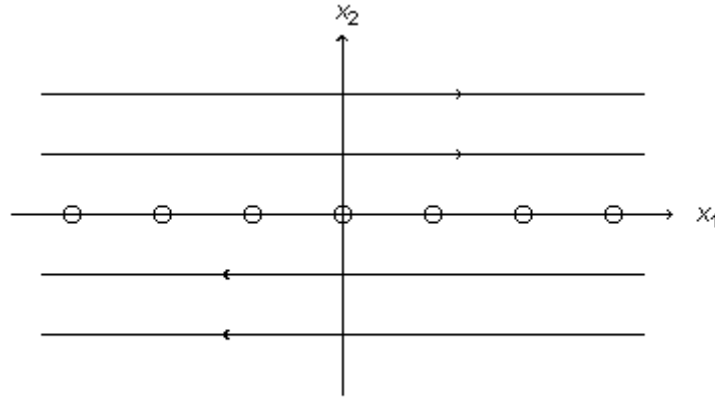
Οι εξισώσεις του συστήματος γράφονται:

$$(x'_1 = x_2, \quad x'_2 = 0) \Rightarrow (x'_1 = x_{02}, \quad x_2 = x_{02}) \Rightarrow (x_1 = x_{01} + x_{02}t, \quad x_2 = x_{02})$$

Κάθε σημείο στον x_1 -άξονα είναι (ασταθές) σημείο ισορροπίας. Οι τροχιές του συστήματος είναι ευθείες παράλληλες με το x_1 -άξονα.

Περίπτωση 5β (Ο πίνακας A είναι απλής δομής ($\tau = d = 2$)): Στην περίπτωση αυτή κάθε σημείο του επιπέδου είναι σημείο ισορροπίας (ευσταθές αλλά όχι ασυμπτωτικά).

1.4 Ποιοτικές διαφορές γραμμικών και μη-γραμμικών συστημάτων: Εξετάζουμε μη-γραμμικά συστήματα της μορφής $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ και τα συγκρίνουμε με γραμμικά χρονικά-



Σχήμα 11: Περίπτωση 5a: Διάγραμμα φάσης, A μη απλής δομής, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

αναλλοίωτα συστήματα της μορφής $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\det(A) \neq 0$. Κύριες ποιοτικές διαφορές της τροχιάς των δύο κατηγοριών συστημάτων είναι οι παρακάτω:

- **Μοναδικά/πολλαπλά μεμονομένα σημεία ισορροπίας:** Γραμμικά συστήματα της μορφής $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ με $\det(A) \neq 0$ έχουν μοναδικό σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Αντίθετα, μη γραμμικά συστήματα μπορεί να έχουν πολλαπλά (ενδεχομένως άπειρα) σημεία ισορροπίας, π.χ. το σύστημα $x' = x^2 - 1$ έχει σημεία ισορροπίας $x^* = \pm 1$ (όπου το $x^* = 1$ είναι ασταθές και το $x^* = -1$ ασυμπτωτικά ευσταθές). Το σύστημα $x' = \sin x$ έχει άπειρα σημεία ισορροπίας ($x^* = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$).
- **Ύπαρξη/Μοναδικότητα λύσης:** Σε αντίθεση με γραμμικά συστήματα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, που έχουν μοναδική λύση για κάθε $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $t \in \mathbb{R}$, μη γραμμικά συστήματα μπορεί να μην έχουν μοναδική λύση, ή να έχουν λύση που δεν ορίζεται για κάθε $t \in \mathbb{R}$ (η λύση "εκρήγνυται σε πεπερασμένο χρόνο").

Παράδειγμα: Έστω το ΠΑΤ: $x' = f(x)$, $f(x) = 3x^{2/3}$, $x(0) = 0$. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ αλλά δεν είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$. Οι συναρτήσεις $x_1(t) = t^3$ ($t \in \mathbb{R}$) και $x_2(t) = 0$ ($t \in \mathbb{R}$), είναι διαφορίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν την διαφορική εξίσωση και την αρχική συνθήκη, και άρα είναι δύο διαφορετικές λύσεις του ΠΑΤ.

Παράδειγμα: Έστω το ΠΑΤ: $x' = x^2$, $x(0) = 1$. Η μοναδική λύση του ΠΑΤ είναι $x(t) = \frac{1}{1-t}$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $t \in (-\infty, 1)$. Η λύση εκρήγνυται καθώς $t \rightarrow 1^-$ (σε πεπερασμένο χρόνο). Αντίθετα, σε μη-γραμμικά συστήματα $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, δεν μπορούμε να έχουμε $\|\mathbf{x}(t)\| \rightarrow \infty$ καθώς $t \rightarrow t_0$ αν $t_0 \in \mathbb{R}$ (πεπερασμένο).

- **Περιοδικές τροχιές/ταλαντώσεις:** Περιοδικές τροχιές/ταλαντώσεις χωρίς απόσβεση ποράγονται από γραμμικά και μη-γραμμικά συστήματα. Σε γραμμικά συστήματα περιοδικές τροχιές αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές του πίνακα A πάνω στον άξονα των φανταστικών και για αυτόν τον λόγο είναι ιδιαίτερα ευαίσθητες σε μικρές παραμετρικές διαταραχές. Επιπλέον, σε γραμμικά συστήματα το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες. Αντίθετα, οι ταλαντώσεις που παράγουν πολλά μη-γραμμικά συστήματα δεν είναι ευαίσθητες σε παραμετρικές διαταραχές ή στις αρχικές συνθήκες.

1.5 Γραμμικοποίηση μη-γραμμικών συστημάτων σε σημεία ισορροπίας και διαγράμματα φάσης:

Εισαγωγικά, Παραγωγίσιμες συναρτήσεις: Η συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (ισοδύναμα πίνακας $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$), τ.ω.

$$\lim_{\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) - D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Ο πίνακας $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ είναι η παράγωγος της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}_0$.

Θεώρημα: Αν $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, τότε οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ είναι καλά ορισμένες στο $\mathbf{x}_0$ κάθε $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_0)x_j$$

Επομένως, αν η $\mathbf{f}$ είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, η παράγωγος $D\mathbf{f}$ είναι ο πίνακας Jacobian:

$$D\mathbf{f} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right]_{i=1,2,\dots,n}^{j=1,2,\dots,n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Ορισμός: Η συνάρτηση $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη (κλάσης $\mathcal{C}^1$), δηλ. η παράγωγος $D\mathbf{f}(\mathbf{x})$, θεωρούμενη ως απεικόνιση $D\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, είναι συνεχής συνάρτηση του $\mathbf{x}$ σε κάποιο ανοικτό σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^n$. (Εδώ $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ είναι το σύνολο των γραμμικών τελεστών από τον χώρο $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^n$).

Έστω $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ και $T = D\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Η νόρμα τελεστή στον $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ (που επάγεται από την Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως: $\|T\| = \max\{\|T\mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$. Τότε, η συνέχεια της παραγώγου $D\mathbf{f}$ ορίζεται σύμφωνα με τον παρακάτω ορισμό:

Ορισμός: Έστω V_1 και V_2 δύο γραμμικοί χώροι με νόρμα $\|\cdot\|_1$ και $\|\cdot\|_2$, αντίστοιχα. Τότε $T : V_1 \rightarrow V_2$ είναι συνεχής στο $\mathbf{x}_0 \in V_1$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τ.ω. $\mathbf{x} \in V_1$ και $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_1 < \delta$ συνεπάγεται ότι $\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{x}_0)\|_2 < \epsilon$. Η T λέγεται συνεχής στο $E \subseteq V_1$ αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο $\mathbf{x} \in E$, οπότε γράφουμε $T \in \mathcal{C}^0(E)$.

Ορισμός: Έστω $\mathbf{f} : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ παραγωγίσιμη στο E . Τότε $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ αν η παράγωγος $D\mathbf{f} : E \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ είναι συνεχής στο E .

Θεώρημα: Έστω ότι E ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και ότι $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$. Τότε $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E)$ αν και μόνο αν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, υπάρχουν και είναι συνεχείς συναρτήσεις στο E .

Παρατήρηση: Έστω E ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε οι παράγωγοι υψηλότερης τάξης $D^k \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ συνάρτησης $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k > 1$, ορίζεται με παρόμοιο τρόπο όπως η $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) := D^1 \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$. Ισχύει ότι $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^k(E)$ αν οι μερικές παράγωγοι

$$\frac{\partial^k f_i}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}, \quad i, j_1, \dots, j_k = 1, 2, \dots, n$$

είναι καλά ορισμένες και συνεχείς στο E .

Ορισμός: Συνάρτηση $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι αναλυτική στο ανοικτό υποσύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^n$ αν κάθε $f_j(\mathbf{x})$, $j = 1, 2, \dots, n$ είναι αναλυτική στο E , δηλ. αν για κάθε $j = 1, 2, \dots, n$ η συνάρτηση $f_j(\mathbf{x})$ έχει συγκλίνουσα σειρά Taylor σε κάποια γειτονιά κάθε σημείου του E .

Γραμμικοποίηση και διαγράμματα φάσης: Ένα βασικό ερώτημα της Θεωρίας Δυναμικών Συστημάτων είναι το ακόλουθο: Είναι δυνατόν - και αν ναι κάτω από ποιές συνθήκες - οι ιδιότητες ευστάθειας ενός μη-γραμμικού συστήματος κοντά σε ένα σημείο ισορροπίας να προβλεφθούν από την γραμμική προσέγγιση του συστήματος στο σημείο ισορροπίας;

Έστω σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{f} : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, συνεχώς διαφορίσιμη στο ανοικτό σύνολο E και $\mathbf{x}^* \in E$ σημείο ισορροπίας, δηλ. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Η γραμμικοποίηση του συστήματος είναι εφαρμογή του Θεωρήματος Taylor:

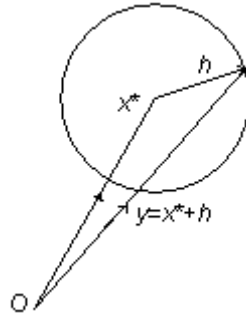
Θεώρημα: Έστω $\mathbf{f} : E \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, E ανοικτό και $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R}^n)$. Έστω $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$. Τότε

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + D\mathbf{f}(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

όπου

$$\lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} \frac{R(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|} \text{ και } D\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right]_{i,j=1,2,\dots,n}$$

□



Σχήμα 12: Γραμμικοποίηση γύρω από το $\mathbf{x}^*$

Έστω $\mathbf{x}^* \in E$ σημείο ισορροπίας του συστήματος $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, δηλαδή $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R}^n)$. Έστω $\mathbf{y} = \mathbf{x}^* + \mathbf{h} \in E$. Περιγράφουμε το σύστημα σε τοπικές συντεταγμένες μεταφέροντας την αρχή των αξόνων στο $\mathbf{x}^*$. Έχουμε:

$$\mathbf{y}' = (\mathbf{x}^* + \mathbf{h})' = \mathbf{h}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \mathbf{h})$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Taylor:

$$\mathbf{h}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}^* + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\mathbf{h} + R(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\mathbf{h} + R_1(\mathbf{h})$$

εφόσον $\mathbf{x}^*$ είναι σημείο ισορροπίας, όπου θέσαμε $R_1(\mathbf{h}) := R(\mathbf{x}^*, \mathbf{x}^* + \mathbf{h})$, και όπου

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{R_1(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

Ορισμός: Το (γραμμικό) σύστημα $\mathbf{h}' = D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*)\mathbf{h}$ είναι το γραμμικοποιημένο σύστημα στο σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ που αντιστοιχεί στο μη-γραμμικό σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, όπου

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \left[\frac{\partial f_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} \right]_{i,j=1,2,\dots,n}$$

είναι ο πίνακας Jacobian της $\mathbf{f}$ στο $\mathbf{x}^*$.

Παράδειγμα: Να βρεθεί το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από κάθε σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1 \\ -x_2 - x_2 e^{x_1} \end{bmatrix}$$

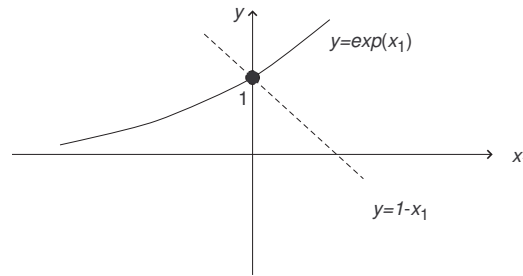
Λύση: Τα σημεία ισορροπίας είναι οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων: $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$. Έχουμε:

$$f_2(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_2(1 + e^{x_1}) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

και επομένως:

$$f_1(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_1 + e^{x_1} - 1 = 0 \Rightarrow e^{x_1} = 1 - x_1 \Rightarrow x_1 = 0$$

και άρα το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$.



Σχήμα 13: Λύση της εξίσωσης $e^{x_1} = 1 - x_1$ (Παράδειγμα)

Ο πίνακας Jacobian:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(x_1, x_2)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 + e^{x_1} & 4 \\ -x_2 e^{x_1} & -1 - e^{x_1} \end{bmatrix}_{(x_1, x_2)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές: $\sigma(A) = \{2, -2\}$. Ιδιοδιανύσματα:

$$\lambda = \lambda_1 = 2 : (\lambda I - A)\mathbf{u}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \beta = 0, \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επίσης:

$$\lambda = \lambda_2 = -2 : (\lambda I - A)\mathbf{u}_2 = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha + \beta = 0, \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Για το μή γραμμικό σύστημα: $x_2 = 0 \Rightarrow x'_2 = 0$ και άρα ο x_1 -άξονας ($x_2 = 0$) παραμένει μέρος του διαγράμματος φάσης, Στον x_1 -άξονα έχουμε: $x'_1 = e^{x_1} - (1 - x_1) > 0$ αν $x_1 > 0$ και $x'_1 = e^{x_1} - (1 - x_1) < 0$ αν $x_1 < 0$, παρόμοια με το γραμμικοποιημένο σύστημα. Επίσης:

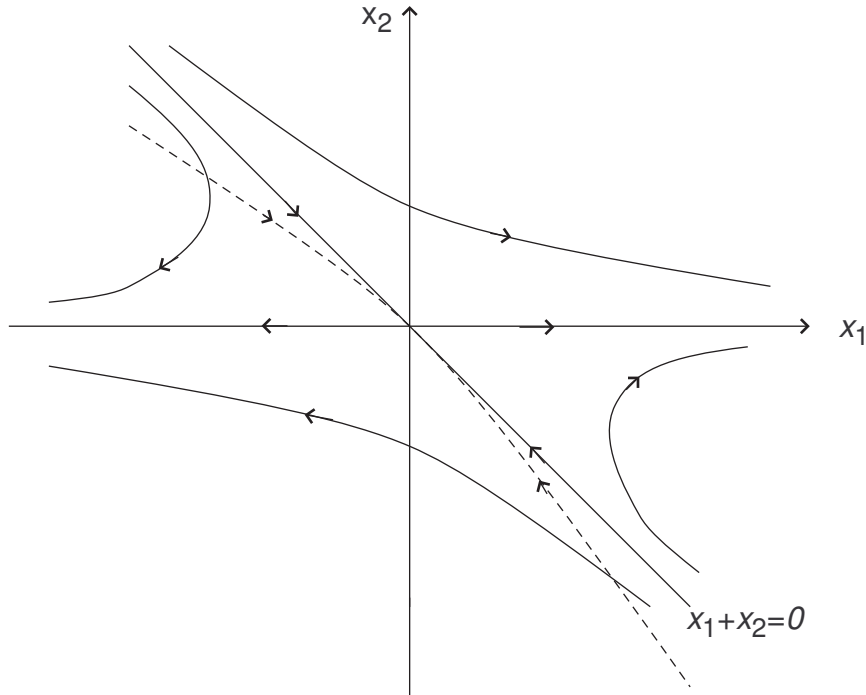
$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{-x_2 - x_2 e^{x_1}}{x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1} \Rightarrow \left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{x_2=-x_1} = \frac{x_1(1 + e^{x_1})}{-3x_1 + e^{x_1} - 1}$$

Επομένως για μικρό $|x_1|$ κοντά στο σημείο ισορροπίας:

$$\frac{dx_2}{dx_1} \simeq \frac{x_1 + x_1(1 + x_1)}{-3x_1 + (1 + x_1) - 1} \simeq \frac{2x_1 + x_1^2}{-2x_1} = -1 - \frac{x_1}{2}$$

και

$$\left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{x_2=-x_1} < -1 \text{ αν } x_1 > 0, \quad \left. \frac{dx_2}{dx_1} \right|_{x_2=-x_1} > -1 \text{ αν } x_1 < 0$$



Σχήμα 14: Διάγραμμα φάσης (Παράδειγμα)

Το διάγραμμα φάσης για το γραμμικοποιημένο και (προσεγγιστικά) το μη-γραμμικό σύστημα σχεδιάζεται στο Σχήμα 14.

Παράδειγμα: Έστω σύστημα:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2^2 \\ -x_2 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί και να αναλυθεί το γραμμικοποιημένο σύστημα γύρω από κάθε σημείο ισορροπίας. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα φάσης του μη-γραμμικού και του γραμμικοποιημένου συστήματος.

Λύση: Σημεία ισορροπίας: $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$. Άρα $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Πίνακας Jacobian:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(x_1, x_2)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 2x_2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}_{(x_1, x_2)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και άρα το $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι σαγματικό σημείο. Ιδιοτιμές/Ιδιοδιανύσματα:

$$\lambda_1 = 1, \mathbf{u}_1 = [1 \ 0]^T \text{ και } \lambda_2 = -1, \mathbf{u}_2 = [0 \ 1]^T$$

Το μη-γραμμικό σύστημα μπορεί να λυθεί αναλυτικά: Οι εξισώσεις γράφονται ως εξής: $x'_2 = -x_2 \Rightarrow x_2(t) = e^{-t}x_{02}$ και $x'_1 = x_1 + x_2^2 \Rightarrow x'_1 = x_1 + e^{-2t}x_{02}^2$. Η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς: $x_1 = Ae^t$. Ειδική λύση της μορφής $x_1 = Be^{-2t}$ και άρα

$$x_1 = Be^{-2t} \Rightarrow -2Be^{-2t} = Be^{-2t} + e^{-2t}x_{02}^2 \Rightarrow B = -\frac{1}{3}x_{02}^2$$

Άρα η γενική λύση της μη-ομογενούς είναι:

$$x_1(t) = Ae^t - \frac{1}{3}x_{02}^2e^{-2t}$$

Αρχική συνθήκη:

$$x_1(0) = A - \frac{1}{3}x_{02}^2 \Rightarrow A = x_{01} + \frac{1}{2}x_{02}^2$$

Άρα,

$$x_1(t) = \left(x_{01} + \frac{1}{3}x_{02}^2\right)e^t - \frac{1}{3}x_{02}^2e^{-2t}, \quad x_2(t) = e^{-t}x_{02}$$

Παρατηρούμε ότι αν $x_{01} + \frac{1}{3}x_{02}^2 = 0$ έχουμε $x_1(t) = -\frac{1}{3}x_{02}^2e^{-2t} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow +\infty$ και η λύση είναι:

$$x_1(t) = -\frac{1}{3}x_{02}^2e^{-2t}, \quad x_2(t) = x_{02}e^{-t}$$

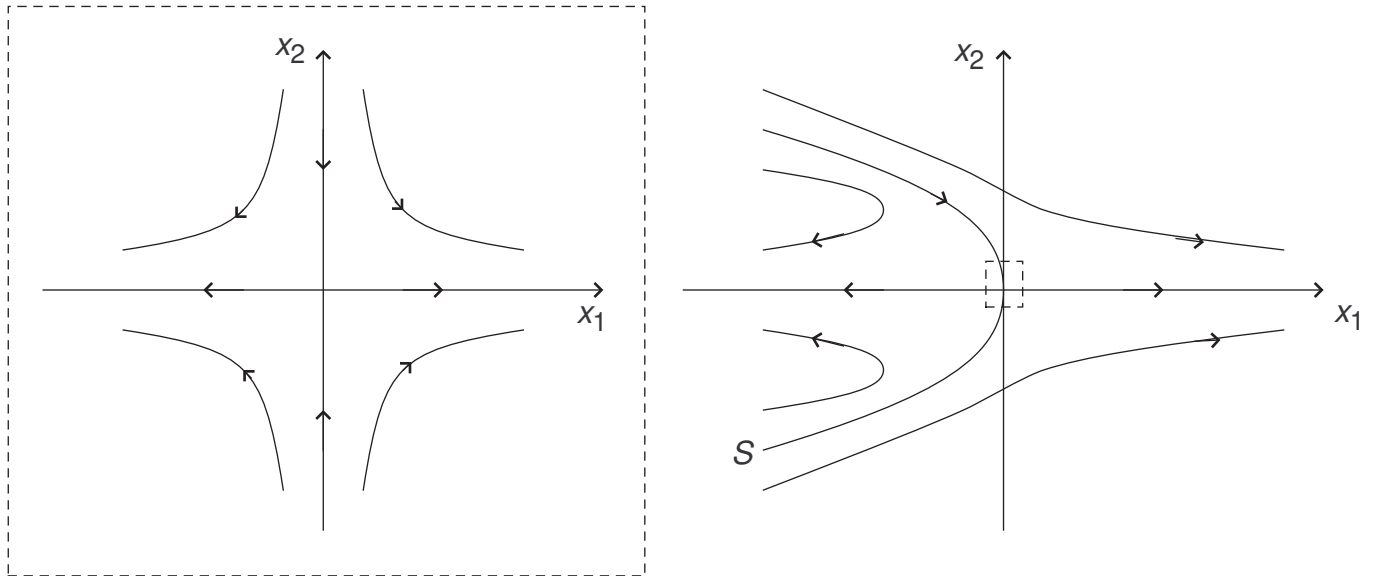
Άρα,

$$x_1(t) = -\frac{1}{3}(x_{02}e^{-t})^2 = -\frac{1}{3}x_2^2(t) \Rightarrow x_1(t) + \frac{1}{3}x_2^2(t) = 0$$

Επομένως

$$(x_{01}, x_{02}) \in S := \{(x_1, x_2) : x_1^2 + \frac{1}{3}x_2^2 = 0\} \Rightarrow (x_1(t), x_2(t)) \in S \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

και η καμπύλη S είναι αναλλοίωτη. Τα διαγράμματα φάσης του γραμμικοποιημένου και μη-γραμμικού συστήματος σχεδιάζονται στο Σχήμα 15.



Σχήμα 15: Διάγραμμα φάσης γραμμικοποιημένου και μη γραμμικού συστήματος (Παράδειγμα)

Παρατηρούμε:

- Στο διάγραμμα φάσης του μη-γραμμικού συστήματος ο άξονας x_2 (που στο διάγραμμα φάσης του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι ο ευσταθής υπόχωρος $\mathcal{X}^-$) εφάπτεται στην παραβολή S .
- Ο άξονας x_1 είναι η ασταθής πολλαπλότητα (manifold) του μη-γραμμικού συστήματος. Η παραβολή S είναι η ευσταθής πολλαπλότητα.
- Αν $x_{02} = 0$, τότε $x_1(t) = x_{01}e^t$ και $|x_1| \rightarrow \infty$ καθώς $t \rightarrow +\infty$, ενώ $x_2(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
- Κοντά στο σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ το διάγραμμα φάσης του μη-γραμμικού συστήματος προσομοιάζει με αυτό του γραμμικοποιημένου συστήματος στο οποίο $\mathcal{X}^- \perp \mathcal{X}^+$.

Παράδειγμα (οριακός κύκλος): Έστω το σύστημα

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad x'_2 = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

Από την εξίσωση:

$$x_2 f_1(x_1, x_2) - x_1 f_2(x_1, x_2) = 0 \Rightarrow x_2^2 + x_1 x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_1^2 - x_1 x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 0$$

συμπεραίνουμε ότι το $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας. Ο πίνακας Jordan είναι:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{(x_1, x_2)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_1 x_2 \\ -1 - 2x_1 x_2 & 1 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}_{(x_1, x_2)=(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

με ιδιοτιμές τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου:

$$\phi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 \Rightarrow \sigma(A) = \{1 \pm i\}$$

και επομένως τη σημείο ισορροπίας είναι ασταθής εστία. Μετασχηματίζοντας σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) :

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta$$

έχουμε:

$$x'_1 = r' \cos \theta - r \theta' \sin \theta = r \sin \theta + r \cos \theta(1 - r^2) \quad (A)$$

και

$$x'_2 = r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta = -r \cos \theta + r \sin \theta(1 - r^2) \quad (B)$$

Έχουμε

$$(A) \cos \theta + (B) \sin \theta = r' = \cos \theta(r' \cos \theta - r \sin \theta \theta') + \sin \theta(r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta) = r(1 - r^2)$$

Παρόμοια,

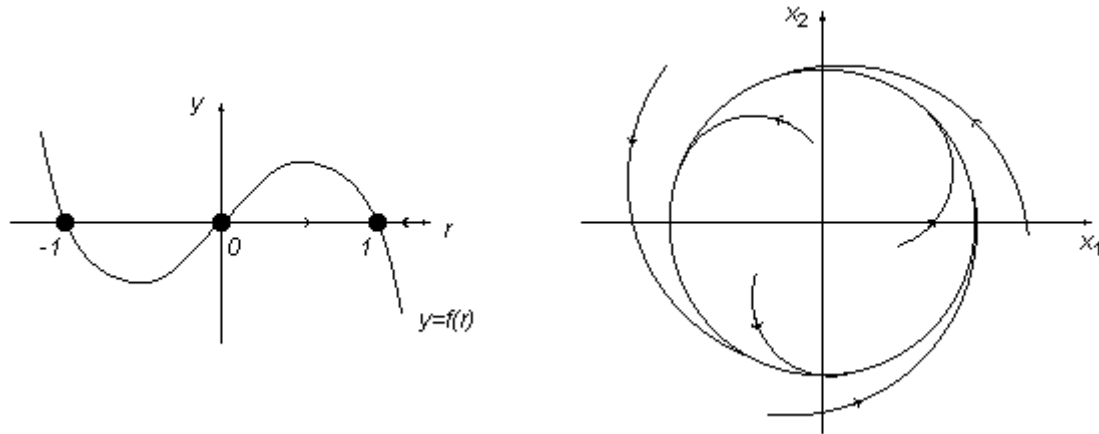
$$(A)(-\sin \theta) + (B) \cos \theta = r \theta' = -r \Rightarrow \theta' = -1 \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 - t$$

Από το διάγραμμα φάσης της εξίσωσης $r' = f(r) = r(1 - r^2)$ (Σχήμα 16 αριστερά) συμπεραίνουμε ότι το $r = 0$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας και το $r = 1$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας. Άρα, το σημείο $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Επίσης $r_0 = 1 \Rightarrow r(t) = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $r_0 > 1 \Rightarrow r(t) \rightarrow 1$ καθώς $t \rightarrow \infty$ και $(r_0 < 1, r_0 \neq 0) \Rightarrow r(t) \rightarrow 1$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Άρα ο οριακός κύκλος $r = 1$ είναι ευσταθής. Εφόσον η συνάρτηση $\theta(t)$ είναι φθίνουσα οι τροχιές του συστήματος είναι αριστερόστροφες (Σχήμα 16 δεξιά).

1.6 Περιοδικές τροχιές στον $\mathbb{R}^2$, κριτήριο Poincare-Bendixson - ΗΜΙΤΕΛΕΣ: Περιοδικές τροχιές στον $\mathbb{R}^2$ χωρίζουν το επίπεδο σε δύο περιοχές, την εσωτερική και εξωτερική περιοχή της τροχιάς. Αυτό κάνει εφικτή την διατύπωση κριτηρίων για την ύπαρξη/απουσία περιορισμένων τροχιών (οριακών κύκλων που δεν γεβικεύονται σε διαστάσεις $n > 2$).

Θεώρημα (κριτήριο Poincare-Bendixson): Έστω σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ όπου $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ συνεχώς διαφορίσιμη. Έστω M κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, τέτοιο ώστε:

- Το M δεν περιέχει σημεία ισορροπίας, η περιέχει μοναδικό σημείο ισορροπίας τέτοιο ώστε ο πίνακας Jacobian σε αυτό το σημείο έχει ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος (και επομένως το σημείο ισορροπίας είναι ασταθής κόμβος η ασταθής εστία).
- Κάθε τροχιά του συστήματος με $x(0) \in M$ περιέχεται στο M για κάθε $t \geq 0$ (δηλ. το M είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο για το σύστημα)



Σχήμα 16: Διάγραμμα φάσης γραμμικοποιημένου και μη γραμμικού συστήματος (Παράδειγμα)

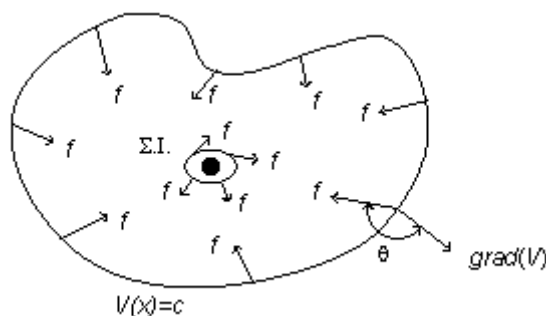
Τότε το M περιέχει τουλάχιστον μία περιοδική τροχιά του $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. □

Απόδειξη:

Παρατήρηση: Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι φραγμένες τροχιές στο επίπεδο προσεγγίζουν περιοδικές τροχιές ή σημεία ισορροπίας καθώς $t \rightarrow \infty$. Επομένως,

- Αν ο M δεν περιέχει σημεία ισορροπίας, τότε πρέπει να περιέχει περιοδική τροχιά.
- Αν το M περιέχει σημείο ισορροπίας (τέτοιο ώστε ο πίνακας Jacobian σε αυτό το σημείο έχει ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος) τότε αυθαίρετα κοντά στο σημείο αυτό το πεδίο $\mathbf{f}$ θα απομακρύνεται από το σημείο ισορροπίας. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε απλή κλειστή καμπύλη C γύρω από το σημείο ισορροπίας, έτσι ώστε η κατεύθυνση του $\mathbf{f}$ επί της C να είναι "προς τα έξω". Αν αποκλείσουμε από την M το εσωτερικό της C , τότε καταλήγουμε σε περιοχή που δεν περιέχει σημείο ισορροπίας και είναι θετικά αναλλοίωτο ως προς τροχιές που αρχίζουν στην (επαναπροσδιορισμένη) περιοχή M .

Ένας τρόπος για να εξασφαλίσουμε την ιδιότητα αυτή, είναι να δείξουμε ότι το σύνορο ∂M της M είναι καμπύλη στάθμης κάποιας συνεχώς διαφορίσιμης συνάρτησης V , δηλαδή $\partial M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : V(\mathbf{x}) = c\}$ και $\langle \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle < 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in \partial M$ (δηλ. η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\nabla V(\mathbf{x})$ και $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ είναι αμβλεία).



Σχήμα 17: Κριτήριο Poincaré-Bendixson

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα: $x'_1 = x_2$, $x'_2 = -x_1$ (απλός αρμονικός ταλαντωτής) και ο δακτύλιος $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : c_1 \leq V(\mathbf{x}) \leq c_2\}$ όπου $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2$ και $c_2 > c_1 > 0$. Τότε η περιοχή M είναι κλειστή και φραγμένη και δεν περιέχει σημεία ισορροπίας καθώς το μόνο σημείο ισορροπίας είναι το $(0, 0)$. Επιπλέον,

$$\nabla V(\mathbf{x}) = (2x_1, 2x_2) \Rightarrow \langle \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{f} \rangle = \langle (2x_1, 2x_2), (x_2, -x_1) \rangle = 0$$

Επομένως, από το κριτήριο Poicare-Bendixson υπάρχει περιοδική τροχιά στην περιοχή M .

Παρατήρηση: Από το προηγούμενο Παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι το κριτήριο Poincare-Bendixson δεν εξασφαλίζει μοναδικότητα της περιοδικής τροχιάς. (Στό Παράδειγμα το σημείο ισορροπίας είναι κέντρο και έχουμε άπειρες κυκλικές τροχιές με ακτίνα $\|\mathbf{x}_0\|$.)

Παράδειγμα: Έστω σύστημα $x'_1 = f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)$, $x'_2 = f_2(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)$. Έχουμε $f_1 = 0 \Rightarrow x_1x_2 + x_2^2 - x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0$ και $f_2 = 0 \Rightarrow -2x_1^2 + x_1x_2 - x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0$, Αφαιρώντας την δεύτερη εξίσωση από την πρώτη έχουμε $2x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$ και το $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Ο πίνακας Jacobian είναι:

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^* = \mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 - 3x_1^2 - x_2^2 & 1 - 2x_1x_2 \\ -2 - 2x_1x_2 & 1 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^* = \mathbf{0}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ιδιοτιμές:

$$\phi(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 2 & \lambda - 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 2 = 0 \Rightarrow \sigma(A) = \{1 \pm \sqrt{2}i\}$$

και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθής εστία. Έστω

$$M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : V(\mathbf{x}) \leq c\} \text{ όπου } V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 \text{ και } c > 0$$

Η περιοχή M είναι κλειστή και φραγμένη και περιέχει μόνο ένα σημείο ισορροπίας στο οποίο ο πίνακας Jacobian έχει ιδιοτιμές με θετικό πραγματικό μέρος. Στην επιφάνεια $V(\mathbf{x}) = c$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle &= \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} f_2 \\ &= 2x_1[x_1 + x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-2x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= 2x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1x_2 \end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} \langle \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle &\leq 2(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1^2 + x_2^2)^2 + (x_1^2 + x_2^2) \\ &= 3(x_1^2 + x_2^2) - 2(x_1^2 + x_2^2)^2 \\ &= 3c - 2c^2 = c(3 - 2c) \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $c \geq \frac{3}{2}$ έχουμε:

$$\langle \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle < 0 \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in \partial M$$

και επομένως όλες οι τροχιές "παγιδεύονται" εντός του M για $t \geq 0$. Άρα από το κριτήριο Poincare-Bendixson υπάρχει περιοδική τροχιά εντός του M .

Παράδειγμα: Εφαρμόζοντας το κριτήριο Poincare-Bendixson δείξτε ότι το σύστημα:

$$x'_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2 + \frac{1}{4}x_1(1 - 2x_1^2 - 2x_2^2), \quad x'_2 = f_2(x_1, x_2) = -x_1 + \frac{1}{2}x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

έχει τουλάχιστον μία οριακή τροχιά εντός του δακτυλίου $\frac{1}{2} \leq r \leq 2$. Βρείτε επίσης μία μικρότερη περιοχή που περιέχει την τροχιά.

Λύση: Σημεία ισορροπίας είναι λύσεις του συστήματος: $f_1 = f_2 = 0$, Απο την εξίσωση $x_2 f_1 - x_1 f_2 = 0$ έχουμε:

$$\begin{aligned} x_2 f_1 - x_1 f_2 = 0 &\Rightarrow x_2 \left[x_2 + \frac{1}{4} x_1 (1 - 2x_1^2 - 2x_2^2) \right] - x_1 \left[-x_1 + \frac{1}{2} x_2 (1 - x_1^2 - x_2^2) \right] = 0 \\ &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{4} x_1 x_2 [-1 + 2x_1^2 + 2x_2^2 + 2(1 - x_1^2 - x_2^2)] = 0 \\ &\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{4} x_1 x_2 = 0 \end{aligned}$$

Εκφράζοντας την εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) , $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$ έχουμε για $r \neq 0$:

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - \frac{1}{4} r^2 \cos \theta \sin \theta = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{8} \sin(2\theta) = 0 \Rightarrow \sin(2\theta) = 8$$

η οποία προφανώς δεν έχει πραγματική λύση. Επομένως το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $\mathbf{x}^* = (0, 0)$.

Στην συνέχεια υπολογίζουμε τον πίνακα Jacobian:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= \frac{1}{4}(1 - 2x_1^2 - 2x_2^2) + \frac{1}{4}x_1(-4x_1) \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{1}{4} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= 1 + \frac{1}{4}x_1(-4x_2) = 1 - x_1 x_2 \Rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(0, 0) = 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= -1 + \frac{1}{2}x_2(-2x_1) = -1 - x_1 x_2 \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(0, 0) = -1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= \frac{1}{2}(1 - x_1^2 - x_2^2) + \frac{1}{2}x_2(-2x_2) \Rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(0, 0) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^* = \mathbf{0}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - \frac{1}{4} & -1 \\ 1 & \lambda - \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

και

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda + \frac{9}{8} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{36}{8}} \right) = \frac{3}{8} \pm \frac{3\sqrt{7}}{8}i$$

Επομένως το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = (0, 0)$ είναι ασταθής εστία. Στην συνέχεια μετασχηματίζουμε το σύστημα σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) , $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$. Έχουμε:

$$x_1' = r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta = r \sin \theta + \frac{1}{4}r \cos \theta (1 - 2r^2) = r \sin \theta + \frac{1}{4}(r - 2r^3) \cos \theta \quad (A)$$

και

$$x_2' = r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta = -r \cos \theta + \frac{1}{2}r \sin \theta (1 - r^2) = -r \cos \theta + \frac{1}{2}(r - r^3) \sin \theta \quad (B)$$

Από τον όρο $(A) \cos \theta + (B) \sin \theta$:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{1}{4}(r - 2r^3) \cos^2 \theta + \frac{1}{2}(r - r^3) \sin^2 \theta \\ &= \frac{1}{4}(r - 2r^3)(1 - \sin^2 \theta) + \frac{1}{2}(r - r^3) \sin^2 \theta \\ &= \left[-\frac{r}{4} + \frac{r^3}{2} + \frac{r}{2} - \frac{r^3}{2} \right] \sin^2 \theta + \frac{r}{4}(1 - 2r^2) \\ &= \frac{r}{4}(1 + \sin^2 \theta) - \frac{r^3}{2} \end{aligned}$$

Από τον όρο $(B) \cos \theta - (A) \sin \theta$:

$$r\theta' = -r + \cos \theta \sin \theta \left[\frac{r}{2} - \frac{r^3}{2} - \frac{r}{4} + \frac{r^3}{2} \right] = -r + \frac{r}{4} \cos \theta \sin \theta = -r + \frac{r}{8} \sin(2\theta)$$

και επομένως, αν $r \neq 0$,

$$\theta' = \frac{1}{8} \sin(2\theta) - 1 < 0$$

και επομένως κάθε δακτύλιος της μορφής $r_0 < r < r_1$, $r_0 > 0$ δεν περιέχει σημεία ισορροπίας. Έστω το κλειστό, φραγμένο σύνολο

$$\mathcal{D} = \{(r, \theta) : \frac{1}{2} \leq r \leq 2, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

Εφόσον $\theta' < 0$ για κάθε $(r, \theta) \in \mathcal{D}$, το $\mathcal{D}$ δεν περιέχει σημείο ισορροπίας. Στο σύνορο του $\mathcal{D}$:

- $r = \frac{1}{2}$: $r' = \frac{1}{8}(1 + \sin^2 \theta) - \frac{1}{16} = \frac{1}{16}(2 + 2\sin^2 \theta - 1) = \frac{1}{16}(1 + 2\sin^2 \theta) > 0$ για κάθε $\theta \in [0, 2\pi)$.
- $r = 2$: $r' = \frac{2}{4}(1 + \sin^2 \theta) - \frac{8}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 \theta - 4 = \frac{1}{2}(1 + \sin^2 \theta) - 4 < 0$ για κάθε $\theta \in [0, 2\pi)$.

Επομένως τροχιές που εισέρχονται στο $\mathcal{D}$ δεν μπορούν να εξέλθουν και επομένως από το κριτήριο Poincare-Bendixson υπάρχει τουλάχιστον ένας οριακός κύκλος στο $\mathcal{D}$.

Απομένει ο υπολογισμός μικρότερης περιοχής με αυτή την ιδιότητα. Εφόσον $\theta' < 0$ για κάθε (r, θ) εκτός από την αρχή των αξόνων (x_1, x_2) , δεν υπάρχει πρόβλημα με τα σημεία ισορροπίας. Στο εσωτερικό σύνορο επιθυμούμε να έχουμε $r' > 0$ για κάθε $\theta \in [0, 2\pi)$, που είναι ισοδύναμο με:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}r(1 + \sin^2 \theta) - \frac{1}{2}r^3 > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) &\Rightarrow r^2 < \frac{1}{2}(1 + \sin^2 \theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) \\ &\Leftrightarrow r^2 < \frac{1}{2} \min_{\theta \in [0, 2\pi)} (1 + \sin^2 \theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) \\ &\Leftrightarrow r < \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Στο εξωτερικό σύνορο επιθυμούμε να έχουμε $r' < 0$ για κάθε $\theta \in [0, 2\pi)$, που είναι ισοδύναμο με:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}r(1 + \sin^2 \theta) - \frac{1}{2}r^3 < 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) &\Rightarrow r^2 > \frac{1}{2}(1 + \sin^2 \theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) \\ &\Leftrightarrow r^2 > \frac{1}{2} \max_{\theta \in [0, 2\pi)} (1 + \sin^2 \theta) \quad \forall \theta \in [0, 2\pi) \\ &\Leftrightarrow r > 1 \end{aligned}$$

Άρα για αυθαίρετα μικρό $\epsilon > 0$ η περιοχή

$$\mathcal{D}_\epsilon = \{(r, \theta) : \frac{1}{\sqrt{2}} - \epsilon \leq r \leq 1 + \epsilon, 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

είναι κλειστό και φραγμένο σύνολο και απο το Θεώρημα Poincare-Bendixson περιέχει τουλάχιστον έναν οριακό κύκλο. Εφόσον οι κύκλοι $r = 1$ και $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ δεν είναι τροχιές του συστήματος μπορούμε να επεκτείνουμε την περιοχή $\mathcal{D}_\epsilon$ στην περιοχή $\mathcal{D}_0 = \{(r, \theta) : \frac{1}{\sqrt{2}} \leq r \leq 1, \theta \in [0, 2\pi)\}$.

1.7 Απουσία οριακών κύκλων στον $\mathbb{R}^2$ (HMITEΛΕΣ): Στην ενότητα αυτή παρουσιάζεται μία ικανή συνθήκη που συνεπάγεται την απουσία περιοδικών τροχιών σε περιοχές του $\mathbb{R}^2$:

Θεώρημα: Αν σε απλά συνεκτική περιοχή D του επιπέδου η συνάρτηση $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ δεν είναι ταυτοτικά μηδέν και δεν αλλάζει πρόσημο, τότε το σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$, $\mathbf{f} = [f_1(x_1, x_2) \ f_2(x_1, x_2)]^T$, δεν έχει οριακό κύκλο που ανήκει καθόλοκληρίαν στην περιοχή D .

Απόδειξη: Από τις εξισώσεις $x'_1 = f_1(\mathbf{x})$ και $x'_2 = f_2(\mathbf{x})$ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(\mathbf{x})}{f_1(\mathbf{x})} \Rightarrow f_2(\mathbf{x})dx_1 - f_1(\mathbf{x})dx_2 = 0$$

και επομένως

$$\oint_{\gamma} f_2(\mathbf{x})dx_1 - f_1(\mathbf{x})dx_2 = 0$$

για κάθε κλειστή διαδρομή γ . Επομένως,

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = 0, \text{ όπου } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_2(\mathbf{x}), -f_1(\mathbf{x})) \text{ και } d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2)$$

και από το Θεώρημα του Green έχουμε ότι:

$$\int \int_S \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 = 0 \quad (*)$$

όπου S η εσωτερική περιοχή της διαδρομής γ . Αν $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} > 0$ ή $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} < 0$ στο D , δεν υπάρχει περιοχή $S \subseteq D$ στην οποία ισχύει η ισότητα (*) και επομένως δεν υπάρχει κλειστή τροχιά του συστήματος που ανήκει αποκλειστικά στην περιοχή D . $\square$

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα: $x'_1 = f_1(x_1, x_2) = x_2$, $x'_2 = f_2(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 - x_1^2 x_2 - x_1^2$ και $D = \mathbb{R}^2$. Τότε:

$$\Delta := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = b - x_1^2$$

Επομένως, αν $b < 0$, $\Delta < 0$ για κάθε $(x_1, x_2) \in D$ και από το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν υπάρχει οριακός κύκλος στο $D = \mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα: $x'_1 = ax_1 - x_1 x_2$, $x'_2 = bx_1^2 - cx_2$, όπου $b > 0$ και $c > a > 0$. Έστω $D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, x_2 \geq 0\}$. Δείξτε ότι: (i) $\mathbf{x}(0) \in D \Rightarrow \mathbf{x}(t) \in D$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, και (ii) Δεν υπάρχει οριακός κύκλος που να διέρχεται από κάποιο $\mathbf{x} \in D$.

Λύση: (i) Στον x_1 -άξονα ($x_2 = 0$) έχουμε $x'_2 = bx_1^2 \geq 0$. Επομένως καμιά τροχιά του συστήματος με αρχή στο ημιεπίπεδο D δεν μπορεί να εξέλθει από το D .

(ii) Από το προηγούμενο Θεώρημα έχουμε για $x_2 \geq 0$:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = a - x_2 - c \leq -(c - a) < 0$$

και άρα δεν υπάρχει οριακός κύκλος που να περιέχεται εζ' ολοκλήρου στο D . Άρα, από το (i) κάθε οριακός κύκλος με σημείο στο D πρέπει να περιέχεται εξ'ολοκλήρου στο D . Επομένως δεν υπάρχει οριακός κύκλος με σημείο στο D .

Γ. Χαλικιάς, 3-1-2026