

Ευστάθεια δυναμικών συστημάτων

1. Προκαταρκτικά

1.1 Θετικά ορισμένοι/ημι-ορισμένοι πίνακες

Ορισμός: Έστω $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ο P είναι θετικά ορισμένος (θετικά ημι-ορισμένος), $P \succ 0$ ($P \succeq 0$) αν η τετραγωνική μορφή $x^T P x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ ($x^T P x \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$). Παρόμοια ορίζουμε αρνητικά ορισμένους (ημι-ορισμένους) πίνακες: $P \prec 0 \Leftrightarrow -P \succ 0$ ($P \preceq 0 \Leftrightarrow -P \succeq 0$).

Παρατήρηση: Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succ 0$ ($P \succeq 0$), τότε χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P = P^T$. Πράγματι,

$$x^T P x = x^T \left[\frac{1}{2}(P + P^T) + \frac{1}{2}(P - P^T) \right] x$$

όπου ο πίνακας $P + P^T$ ($P - P^T$), είναι συμμετρικός (αντι-συμμετρικός). Επομένως,

$$x^T P x = x^T \left(\frac{P + P^T}{2} \right) x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}^n$$

και επομένως $P \succ 0 \Leftrightarrow P + P^T \succ 0$ (αντίστοιχα $P \succeq 0 \Leftrightarrow P + P^T \succeq 0$). Στη συνέχεια ορίζουμε:

$$S_+^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T \succ 0\}, \quad \bar{S}_+^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T \succeq 0\}, \quad S^n = \{P \in \mathbb{R}^n : P = P^T\}$$

και έχουμε: $S_+^n \subseteq \bar{S}_+^n \subseteq S^n$, δηλαδή υποθέτουμε ότι θετικά ορισμένοι και ημι-ορισμένοι πίνακες (όπως και αρνητικά ορισμένοι και ημι-ορισμένοι) είναι αυτόματα συμμετρικοί.

Ιδιότητες:

I_1 : S_+^n και $\bar{S}_+^n$ είναι κυρτοί κώνοι στον $\mathbb{R}^{n \times n}$, δηλαδή:

$$I_1(a) : P_1, P_2 \in S_+^n \Rightarrow \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2 \in S_+^n \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad P \in S_+^n \Rightarrow \lambda P \in S_+^n \quad \forall \lambda > 0$$

$$I_1(b) : P_1, P_2 \in \bar{S}_+^n \Rightarrow \lambda P_1 + (1 - \lambda)P_2 \in \bar{S}_+^n \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad P \in \bar{S}_+^n \Rightarrow \lambda P \in \bar{S}_+^n \quad \forall \lambda \geq 0.$$

I_2 : Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε $P \succ 0 \Leftrightarrow \Delta_i := \det(E_i^T P E_i) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, όπου $E_i \in \mathbb{R}^{n \times i}$ ο πίνακας που ορίζεται από τις i -πρώτες στήλες του μοναδιαίου πίνακα I_n . (Τα Δ_i είναι τα leading minors του P). Επίσης, αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, τότε $P \succeq 0 \Leftrightarrow \det(P_{\kappa, \kappa}) \geq 0$ για κάθε μη-κενό $\kappa \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, όπου $P_{\kappa, \kappa}$ ο τετραγωνικός πίνακας που αποτελείται από όλες τις γραμμές $i \in \kappa$ και όλες τις στήλες $j \in \kappa$ (δηλαδή όλα τα principal minors του P πρέπει να είναι μη-αρνητικά).

I_3 : Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succ 0$, τότε $\lambda_i(P) > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ (και αντίστροφα για συμμετρικό P): Εφόσον $P = P^T$ έχουμε $P = U \Lambda U^T$, $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$, και $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U U^T = U^T U = I_n$. Έστω ότι $\lambda_j \leq 0$ για κάποιο $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Τότε, αν u_j η j -στήλη του U και συμβολίζοντας με e_j την j -στήλη του I_n , θα είχαμε ότι:

$$u_j^T P u_j = u_j^T U \Lambda U^T u_j = e_j^T \Lambda e_j = \lambda_j \leq 0$$

άτοπο, αφού $\|u_j\| = 1$. Αντίστροφα, αν $P = P^T$ έχει θετικές ιδιοτιμές: $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$, τότε

$$x^T P x = x^T U \Lambda U^T x = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|U^T x\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \|x\|^2 > 0 \quad \text{αν } x \neq 0$$

και άρα $P \succ 0$. Παρόμοια μπορούμε να δείξουμε ότι: $P \succeq 0 \Leftrightarrow \lambda_i(P) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

I_4 : Αν $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succeq 0$ τότε $x^T P x = 0 \Leftrightarrow P x = 0$: Η αριστερή συνεπαγωγή είναι προφανής. Έστω $x^T P x = 0$ για κάποιον πίνακα $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $P \succeq 0$. Γράφουμε $P = U \text{diag}\{\Lambda_1, 0\} U^T$ όπου $\Lambda_1 = \text{diag}(\Lambda_1) \succ 0$ και $U U^T = U^T U = I_n$. Έστω $U = [U_1 \mid U_2]$, $U_1 = \mathbb{R}^{n \times r}$, $r = \text{rank}(P)$. Τότε $P x = 0 \Leftrightarrow x \in \mathcal{R}(U_2)$. Επίσης $P = U_1 \Lambda_1 U_1^T = U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T := P^{1/2} P^{1/2}$ όπου $P^{1/2} = U_1 \Lambda_1^{1/2} U_1^T = (P^{1/2})^T \succeq 0$, $\Lambda_1^{1/2} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\}$. Επομένως $x^T P x = 0 \Leftrightarrow \|P^{1/2} x\| = 0 \Leftrightarrow P^{1/2} x = 0 \Leftrightarrow P x = 0$.

I_5 : Αν $P(t) = \int_0^t Q(\tau) Q^T(\tau) d\tau$, $t > 0$ και $Q \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times m})$, τότε $P(t) = P^T(t) \succeq 0$ και $\int_0^t x^T P(\tau) x d\tau = \int_0^t \|Q^T(\tau) x\|^2 d\tau$. Επομένως $x^T P(t) x = 0 \Leftrightarrow Q^T x(\tau) = 0$ για κάθε $\tau \in [0, t]$ λόγω συνέχειας. Επίσης $t_2 \geq t_1 \Rightarrow P(t_2) \succeq P(t_1)$ (που εξ'ορισμού σημαίνει ότι $P(t_2) - P(t_1) \succeq 0$).

I_6 : Έστω

$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}$$

όπου $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και $P_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $m < n$. Τότε: $P \succ 0 \Leftrightarrow (P_{22} \succ 0 \text{ και } P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T \succ 0)$. Ο πίνακας $P_{11} - P_{12} P_{22}^{-1} P_{12}^T$ λέγεται συμπλήρωμα Schur του P_{22} .

1.2 Κατά κατεύθυνση παράγωγος, κανόνας αλυσίδας

Έστω Ω μη-κενό, ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ τοπικά Lipschitz και $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, ορίζουμε την συνεχή συνάρτηση $V_{\mathbf{f}} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ως

$$V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \langle \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle := \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

όπου $\nabla V(\mathbf{x})$ η κλίση της V στο σημείο $\mathbf{x}$ και f_j η j -συνιστώσα της $\mathbf{f}$. (Η ανάστροφος στον πανονομαστή του όρου $\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T}$ υποδηλώνει ότι το $\frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T}$ είναι διάνυσμα γραμμής). Για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega$, η $V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ είναι η (κατά κατεύθυνση) παράγωγος στο σημείο $\mathbf{x}$ κατά την κατεύθυνση του διανυσματικού πεδίου $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ (όχι κανονικοποιημένη σε μοναδιαίο διάνυσμα). Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει ως εξής: Έστω $\mathbf{x}$ αυθαίρετο σημείο του Ω και έστω $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\mathbf{g}(t) := \mathbf{x} + t\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας στην σύνθετη συνάρτηση $V \circ \mathbf{g}$ έχουμε

$$(V \circ \mathbf{g})'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{V(\mathbf{x} + t\mathbf{f}(\mathbf{x})) - V(\mathbf{x})}{t} = \langle \nabla V(\mathbf{g}(t)), \mathbf{g}'(t) \rangle|_{t=0} = \langle \nabla V(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}) \rangle := V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$$

Όταν η $\mathbf{x}(t)$ είναι η λύση του συστήματος $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, η $V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t))$ είναι η κατά κατεύθυνση παράγωγος της V κατά μήκος της λύσης ($\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ είναι εφαπτομενικό διάνυσμα της τροχιάς του συστήματος). Παρατηρούμε ότι δεν χρειάζεται να έχουμε γνώση της λύσης του συστήματος για να υπολογίσουμε την $V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t))$. Συμβατικά θα γράφουμε (σύμφωνα με τον καθιερωμένο συμβολισμό) $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) := V_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}(t))$.

2.1 Θεωρία ευστάθειας Lyapunov

Έστω δυναμικό σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Αν η λύση του συστήματος υπάρχει και είναι μοναδική στο διάστημα $I = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ θα συμβολίζεται ως $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$.

Ορισμός: Αν $M(x, d)$ μετρικός χώρος, το σύνολο V είναι γειτονιά του σημείου p αν υπάρχει ανοικτή σφαίρα με κέντρο p και ακτίνα r , δηλ. $B_r(p) = \{x \in X : d(x, p) < r\}$, που περιέχεται στο V . Το σύνολο V δεν είναι απαραίτητα ανοικτό - ορίζουμε ανοικτή/κλειστή γειτονιά αν το V είναι αντίστοιχα ανοικτό/κλειστό υποσύνολο του X .

Ορισμός: Έστω σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, όπου $\mathbf{f} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Το διάνυσμα $\mathbf{x}^*$ λέγεται σημείο ισορροπίας του συστήματος αν $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$. Παρατηρούμε ότι αν $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^*$, τότε $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^*$ για κάθε $t \geq 0$.

Παρατήρηση: Χωρίς βλάβη γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σημείο ισορροπίας, την ευστάθεια του οποίου θέλουμε να αναλύσουμε, είναι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, δηλαδή ότι $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$: Έστω ότι $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{0}$. Με την αλλαγή μεταβλητών: $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^*$ έχουμε:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{x}' = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y} + \mathbf{x}^*) := g(\mathbf{y}), \quad \text{όπου } g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση αυτή όταν η ανάλυση του προβλήματος απλοποιείται.

Ορισμός (ευστάθειας): Έστω $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ η λύση του συστήματος $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, όπου $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ λέγεται:

1. Ευσταθές (κατά Lyapunov) αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon \quad \text{για κάθε } t \geq 0$$

2. Ασυμπτωτικά ευσταθές αν είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) και η παράμετρος δ στο (1) μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε:

$$\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^* \quad \text{καθώς } t \rightarrow \infty$$

3. Ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, αν

$$\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^* \quad \text{καθώς } t \rightarrow \infty \quad \text{για κάθε } \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$$

4. Ασταθές αν δεν είναι ευσταθές (κατά Lyapunov).

Θεώρημα (Lyapunov): Έστω το σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, με λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$. Έστω $\mathbf{x}^*$ σημείο ισορροπίας (δηλ. $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$). Έστω επίσης $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ (ανοικτή) γειτονιά του $\mathbf{x}^*$ και έστω ότι η $\mathbf{f}$ είναι τοπικά Lipschitz στο Ω . Αν υπάρχει $V: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

(i) $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ (συνεχώς διαφορίσιμη στο Ω).

(ii) Η V είναι θετικά ορισμένη στο Ω ως προς το $\mathbf{x}^*$ (δηλ. $V(\mathbf{x}^*) = 0$ και $V(\mathbf{x}) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\}$).

(iii) $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})$ αρνητικά ημι-ορισμένη στο Ω ως προς $\mathbf{x}^*$ (δηλ. $\dot{V}(\mathbf{x}^*) = 0$ και $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ αν $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\}$).

τότε $\mathbf{x}^*$ είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας (κατά Lyapunov). Αν επιπλέον:

(iv) $\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}^T} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i}(\mathbf{x}) f_i(\mathbf{x})$

αρνητικά ορισμένη στο Ω ως προς $\mathbf{x}^*$ (δηλ. $\dot{V}(\mathbf{x}^*) = 0$ και $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ αν $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}^*\}$) τότε το $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

Παρατήρηση: Αν η συνάρτηση V ικανοποιεί τις σχέσεις (i)-(iii), τότε λέγεται συνάρτηση Lyapunov. Αν επιπλέον ικανοποιεί και την (iv) τότε λέγεται ισχυρή συνάρτηση Lyapunov.

Απόδειξη: Έστω ότι η V είναι συνάρτηση Lyapunov.

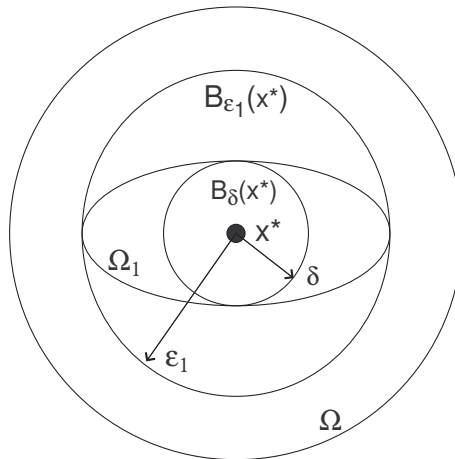
- Θα δείξουμε ότι για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ τέτοιο ώστε $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon$ για κάθε $t \geq 0$ και άρα $\mathbf{x}^*$ ευσταθές (κατά Lyapunov).
- Εφόσον Ω (ανοικτή) γειτονιά του $\mathbf{x}^*$ υπάρχει ϵ_1 (αρκούντως μικρό) τέτοιο ώστε $0 < \epsilon_1 \leq \epsilon$ και $B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*) \subseteq \Omega$.

- Εφόσον V συνεχής στο Ω και $\partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, υπάρχει

$$\alpha = \min_{\mathbf{x} \in \partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)} V(\mathbf{x})$$

Έχουμε $\alpha > 0$ (γιατί αν $\mathbf{x} \in \Omega$, $V(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$)

- Ορίζουμε: $\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*) : V(\mathbf{x}) < \alpha\}$. Εφόσον V συνεχής, το Ω_1 είναι ανοικτό και $\mathbf{x}^* \in \Omega_1$ (αφού $V(\mathbf{x}^*) = 0$). Επίσης, το Ω_1 περιέχεται στο $B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ γιατί $V(\mathbf{x}) < \alpha$ για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega_1$ και εξ' ορισμού $V(\mathbf{x}) \geq \alpha$ στο $\partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$.
- Εφόσον Ω_1 ανοικτό, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $B_\delta(\mathbf{x}^*) \subseteq \Omega_1$. Θα δείξουμε ότι αυτό είναι κατάλληλο δ , δηλαδή $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ για κάθε $t \geq 0$:
- Εφόσον $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*)$ έχουμε $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) \leq V(\mathbf{x}_0) < \alpha$ για κάθε $t \geq 0$ (γιατί $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ στο Ω).
- Επίσης είναι αδύνατον να έχουμε $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in \partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ για κάποιο $t > 0$ (εφόσον στο $\partial B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ έχουμε εξ' ορισμού $V(\mathbf{x}) \geq \alpha$).
- Άρα $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon_1 \leq \epsilon$ για κάθε $t \geq 0$ και το $\mathbf{x}^*$ ευσταθές (κατά Lyapunov).
- Επιπλέον, εφόσον f τοπικά Lipschitz στο Ω και $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \notin \bar{B}_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ (που είναι συμπαγές υποσύνολο του Ω), το μέγιστο διάστημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσης για $t \geq 0$ είναι όλο το $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.



Στην συνέχεια υποθέτουμε ότι ισχύει η αυστηρότερη συνθήκη: $\dot{V}(\mathbf{x}_0) = 0$ και $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ για $\mathbf{x} \in \Omega \setminus \{\mathbf{x}_0\}$.

- Θα δείξουμε ότι $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow \infty$, δηλ. ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Η παράμετρος είναι αυτή που επιλέξαμε στο πρώτο μέρος της απόδειξης).
- Εφόσον $\mathbf{x}^*$ ευσταθές (κατά Lyapunov) η λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$, $t \geq 0$, είναι φραγμένη (γιατί $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon_1$ για κάθε $t \geq 0$).
- Έστω (για αντίφαση) ότι $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \not\rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow \infty$. Τότε υπάρχει $\mu > 0$ και γνησίως αύξουσα ακολουθία $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, $t_k \geq 0$, $t_k \rightarrow \infty$, τέτοια ώστε:

$$\|\mathbf{x}(t_k; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| > \mu > 0, \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}$$

- Εφόσον $(\mathbf{x}(t_k; \mathbf{x}_0))_{k \in \mathbb{N}_0}$ φραγμένη, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία:

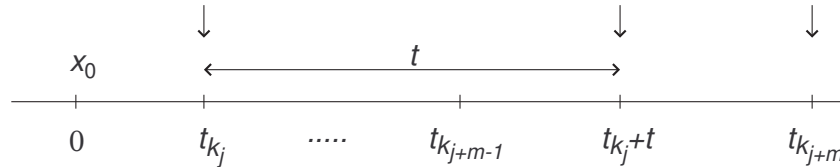
$$\mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}_\infty \text{ καθώς } j \rightarrow \infty$$

Λόγω της ανισότητας $\|\mathbf{x}(t_k; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| > \mu > 0$, έχουμε ότι $\mathbf{x}_\infty \neq \mathbf{x}^*$.

- Εφόσον η συνάρτηση $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))$, $t \geq 0$, είναι φθίνουσα έχουμε για κάθε (αυθαίρετο αλλά σταθεροποιημένο) $t \geq 0$:

$$V(\mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0)) \geq V(\mathbf{x}(t_{k_j} + t; \mathbf{x}_0)) \geq V(\mathbf{x}(t_{k_j+m}; \mathbf{x}_0))$$

όπου επιλέξαμε $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $t_{k_j} + t < t_{k_j+m}$. (Εφόσον $t_{k_j} \rightarrow \infty$, τέτοιο m πάντα υπάρχει όσο μεγάλο και να είναι το t).



- Επομένως:

$$V(\mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0)) \geq V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0))) \geq V(\mathbf{x}(t_{k_j+m}; \mathbf{x}_0))$$

για κάθε $t \geq 0$. [Ο μεσαίος όρος προκύπτει επειδή το σύστημα είναι χρονικά αναλλοίωτο (δείτε και τον αξιωματικό ορισμό δυναμικού συστήματος): Η λύση σε χρόνο $t_{k_j} + t$ όταν η αρχική συνθήκη σε χρόνο 0 είναι x_0 , ταυτίζεται με την λύση σε χρόνο t όταν η αρχική συνθήκη σε χρόνο 0 είναι $x(t_{k_j}; \mathbf{x}_0)$].

- Στο όριο $j \rightarrow \infty$, $t_{k_j} \rightarrow \infty$ και

$$V(\mathbf{x}_\infty) \geq V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty)) \geq V(\mathbf{x}_\infty)$$

για κάθε $t \geq 0$. Παρατηρούμε ότι: Τα όρια $V(\mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0)) \rightarrow V(\mathbf{x}_\infty)$ και $V(\mathbf{x}(t_{k_j+m}; \mathbf{x}_0)) \rightarrow V(\mathbf{x}_\infty)$ ισχύουν λόγω συνέχειας της V , ενώ το όριο $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_{k_j}; \mathbf{x}_0))) \rightarrow V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty))$ ισχύει λόγω συνέχειας της λύσης ως προς τις αρχικές συνθήκες.

- Άρα $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty))$ σταθερή και ίση με $V(\mathbf{x}_\infty)$ για κάθε $t \geq 0$. Συνεπώς $\dot{V}(\mathbf{x}_\infty) = 0$ που είναι άτοπο, γιατί $\dot{V}(\mathbf{x}_\infty) < 0$ αφού $\mathbf{x}_\infty \neq \mathbf{x}^*$ ($\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ αν και μόνο αν $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$).

□

Παράδειγμα: Έστω βαθμωτό σύστημα $x' = -g(x)$, όπου $g(x)$ τοπικά Lipschitz στο $\Omega = (-a, a) \subseteq \mathbb{R}$ και

$$g(0) = 0, \quad xg(x) > 0 \quad \text{για κάθε } x \in \Omega \setminus \{0\}$$

Το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $x^* = 0$. Έστω

$$V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x) = \int_0^x g(y)dy, \quad x \in \Omega$$

υποψήφια συνάρτηση Lyapunov. Εφόσον η g είναι συνεχής στο Ω η V είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Επίσης, $V(0) = 0$ και

$$\dot{V}(x(t)) = \frac{\partial V}{\partial x}(-g(x)) = g(x)(-g(x)) = -g^2(x) < 0 \quad \text{για κάθε } x \in \Omega \setminus \{x^*\}$$

και επομένως το $x^* = 0$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα (εγκρεμές με τριβή): Το δυναμικό σύστημα περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$x'_1 = x_2, \quad x'_2 = -\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2$$

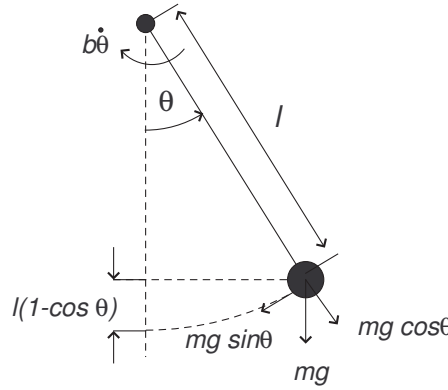
όπου $x_1 = \theta$ η γωνία του εκκρεμούς με την κατακόρυφο, $x_2 = \theta'$ η γωνιακή ταχύτητα, l το μήκος του εκκρεμούς, g η επιτάχυνση της βαρύτητας και $b > 0$ ο συντελεστής τριβής. Έστω $\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 < |\pi|\}$. Το μοναδικό σημείο ισορροπίας στο Ω είναι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Επιλέγουμε αρχικά ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την συνολική ενέργεια του συστήματος:

$$V(\mathbf{x}) = \text{K.E.} + \Delta.\text{E.} = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1)$$

Έχουμε ότι $V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, $V(\mathbf{0}) = 0$ και V θετικά ορισμένη στο Ω ως προς $\mathbf{x}^*$. Επίσης,

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2}x_2' = mglx_2 \sin x_1 + ml^2x_2 \left(-\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2\right) = -ml^2bx_2^2 \leq 0$$

Έχουμε $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ αν $x_2 \neq 0$ και $V(\mathbf{x}) = 0$ αν $x_2 = 0$, και επομένως όταν $b > 0$ η $\dot{V}$ είναι αρνητικά ημι-ορισμένη στο Ω και το συμπέρασμα σύμφωνα με το Θεώρημα Lyapunov είναι ότι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ευσταθές κατά Lyapunov (όχι ασυμπτωτικά). Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει όταν δεν υπάρχει τριβή ($b = 0$). Σε



αυτή την περίπτωση η $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ είναι πάλι μόνο αρνητικά ημι-ορισμένη στο Ω και επομένως το Θεώρημα Lyapunov εγγυάται πάλι μόνο ευστάθεια (κατά Lyapunov), όχι ασυμπτωτική. Στην περίπτωση αυτή το συμπέρασμα είναι το αναμενόμενο: Εφόσον $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in \Omega$, η συνάρτηση $V(\mathbf{x}(t))$ είναι σταθερή σε κάθε σημείο της τροχιάς $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$, $t \geq 0$, και επομένως η $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ δεν μπορεί να συγκλίνει στο $\mathbf{x}_0$ αν $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}^*$. Από φυσική άποψη όταν δεν καταναλώνεται ενέργεια (σε συνθήκες απουσίας τριβής), η συνολική ενέργεια παραμένει σταθερή κατά την κίνηση του εκκρεμούς και η μάζα ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος ταλάντωσης γύρω από την γωνία ισορροπίας $x_1 = 0$. Μπορούμε να περιορίσουμε την νόρμα $\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon$, $t \geq 0$, σε αυθαίρετα μικρή ακτίνα $\epsilon > 0$ (επιλέγοντας αρχική κατάσταση $\mathbf{x}_0$ αρκούντως κοντά στο σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$) αλλά η συνάρτηση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ δεν συγκλίνει στο σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, και άρα έχουμε ευστάθεια (κατά Lyapunov) αλλά όχι ασυμπτωτική. Αντίθετα, στην περίπτωση που υπάρχει τριβή στο σύστημα ($b > 0$), η συνολική ενέργεια του συστήματος διαρκώς μειώνεται όσο αυτό είναι σε κίνηση και επομένως το σημείο ισορροπίας πρέπει να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Υπάρχουν δύο τρόποι για να καταλήξουμε στο ισχυρότερο αυτό συμπέρασμα ασυμπτωτικής ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ στην περίπτωση $b > 0$. Ο πρώτος, όπως θα δείξουμε εδώ, είναι η εφαρμογή του Θεωρήματος με χρήση μίας πιο γενικής συνάρτησης Lyapunov που είναι πάλι θετικά ορισμένη στο Ω . Εναλλακτικά, μπορούμε να εφαρμόσουμε ένα πιο ισχυρό κριτήριο ευστάθειας που βασίζεται στη αρχή του αναλλοίωτου (invariance principle) του Lassale και το οποίο θα παρουσιάσουμε αργότερα.

Έστω νέα υποψήφια συνάρτηση Lyapunov είναι της μορφής:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T P \mathbf{x} + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1)$$

Θα επιλέξουμε τον πίνακα P ως θετικά ορισμένο ($P = P^T \succ 0$), ώστε η συνάρτηση $V(\mathbf{x})$ να είναι θετικά ορισμένη στο Ω , συνθήκη που ισοδυναμεί με τις ανισότητες $p_{11} > 0$ και $p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$. Επομένως η υποψήφια συνάρτηση Lyapunov είναι:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(p_{11}x_1^2 + 2p_{12}x_1x_2 + p_{22}x_2^2) + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1)$$

Παρατηρούμε ότι η νέα $V(\mathbf{x})$ είναι ίση με την συνολική ενέργεια του συστήματος αν επιλέξουμε $p_{11} = p_{12} = 0$ και $p_{22} = ml^2$. Έχουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \frac{g}{l} \sin x_1 \quad \text{και} \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = p_{12}x_1 + p_{22}x_2$$

Επομένως, με αυτή την γενικότερη μορφή της $V(\mathbf{x})$ έχουμε:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2}x'_2 = \left(p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + \frac{g}{l} \sin x_1\right)x_2 + (p_{12}x_1 + p_{22}x_2)\left(-\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2\right)$$

Ισοδύναμα:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{g}{l}(1 - p_{22})x_2 \sin x_1 - \frac{g}{l}p_{12}x_1 \sin x_1 + (p_{11} - p_{12}b)x_1x_2 + (p_{12} - p_{22}b)x_2^2$$

Για να απλοποιήσουμε την παραπάνω έκφραση επιλέγουμε $p_{22} = 1$ και $p_{11} = p_{12}b$ (ώστε να απαλείψουμε τον πρώτο και τον τρίτο όρο που έχουν τότε θετικό και τότε αρνητικό πρόσημο). Επομένως έχουμε

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{g}{l}p_{12}x_1 \sin x_1 + (p_{12} - b)x_2^2$$

Με τις επιλογές αυτές οι ανισότητες που ισοδυναμούν με την συνθήκη $P \succ 0$ είναι: $p_{11} > 0 \Rightarrow p_{12} > 0$ και $p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0 \Rightarrow b - p_{12} > 0$. Άρα πρέπει να έχουμε $0 < p_{12} < b$. Επιλέγοντας, π.χ. $p_{12} = \frac{b}{2}$, εξασφαλίζουμε ότι:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{2}x_1^2 + bx_1x_2 + x_2^2\right) + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1)$$

είναι θετικά ορισμένη στο Ω (ως προς $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$) και ότι

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{gb}{l^2}x_1 \sin x_1 - \frac{b}{2}x_2^2$$

είναι αρνητικά ορισμένη στο Ω (ως προς $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$). Άρα από το Θεώρημα Lyapunov συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

2.2 Ολική ασυμπτωτική ευστάθεια

Από την απόδειξη του Θεωρήματος Lyapunov η περιοχή σύγκλισης (έλκυσης)

$$\Pi.\Sigma. := \{\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*\}$$

περιέχει σφαίρα μέγιστης ακτίνας δ και κέντρου $\mathbf{x}^*$. Γιά να πετύχουμε ολική ασυμπτωτική ευστάθεια θα πρέπει να μπορούμε να επιλέξουμε το $\delta > 0$ αυθαίρετα μεγάλο. Εκτός από το ότι οι συνθήκες του Θεωρήματος Lyapunov πρέπει να ισχύουν σε όλο το $\Omega = \mathbb{R}^n$, μία επιπλέον συνθήκη πρέπει να ικανοποιείται (η συνάρτηση Lyapunov να είναι ακτινικά μη-φραγμένη, όπως ορίζεται στην διατύπωση του παρακάτω Θεωρήματος).

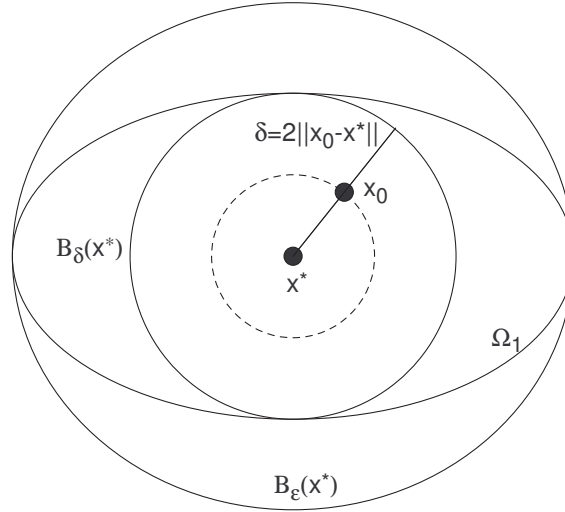
Θεώρημα (ολικής ασυμπτωτικής ευστάθειας): Έστω ότι όλες οι συνθήκες του Θεωρήματος Lyapunov ικανοποιούνται για $\Omega = \mathbb{R}^n$. Αν $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov και επιπλέον:

$$V(\mathbf{x}) \rightarrow \infty \quad \text{καθώς} \quad \|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty \quad (V \text{ ακτινικά μη-φραγμένη})$$

τότε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παρατήρηση: Αν $\mathbf{x}^*$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές τότε $\mathbf{x}^*$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας.

Απόδειξη: Η απόδειξη ακολουθεί τα παρακάτω βήματα:



- Έστω $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ (αυθαίρετο) και έστω $\delta = 2\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\|$ (οπότε $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*)$).

- Έστω

$$\alpha = \max_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \delta} V(\mathbf{x}) > 0$$

(Εφόσον V συνεχής και $\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \leq \delta\}$ συμπαγές, η μέγιστη τιμή είναι καλά ορισμένη και είναι θετική γιατί $V(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x}^*$).

- Ορίζουμε $\Omega_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) < \alpha\}$. Τότε Ω_1 φραγμένο, εφόσον V ακτινικά μη-φραγμένη συνάρτηση. Επομένως

$$\epsilon_1 := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_1} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \in \mathbb{R} \text{ (πεπερασμένο)}$$

- Έστω $\epsilon > \epsilon_1$. Τότε οι συνθήκες του Θεωρήματος Lyapunov ικανοποιούνται και επομένως:

- $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ για κάθε $t \geq 0$, και
- $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow \infty$.

- Εφόσον $\mathbf{x}_0$ αυθαίρετο, το δ είναι αυθαίρετα μεγάλο και $\mathbf{x}^*$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. □

Παράδειγμα: Έστω σύστημα με εξισώσεις:

$$x_1' = -x_1 + x_2^2, \quad x_2' = -x_1 x_2 - x_2$$

Σημεία ισορροπίας:

$$x_1 = x_2^2 \text{ και } x_2(x_1 + 1) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ ή } x_1 = -1$$

Όμως $x_1 \neq -1$ (εφόσον $x_1 = x_2^2$). Άρα $x_2 = 0$ και επομένως το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$.

Έστω $V(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 = \|\mathbf{x}\|^2$. Τότε $V(\mathbf{x})$ θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ (ως προς $\mathbf{x}^*$) και ακτινικά μη-φραγμένη. Επίσης:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2' = 2x_1(-x_1 + x_2^2) + 2x_2(-x_1 x_2 - x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2) = -2\|\mathbf{x}\|^2$$

και άρα $\dot{V}$ αρνητικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$. Άρα $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας.

2.3 Φραγμένες και μη-φραγμένες επιφάνειες Lyapunov

Έστω ότι ισχύουν όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος Lyapunov με $\Omega = \mathbb{R}^n$. Έστω ότι η επιφάνεια στάθμης:

$$\Omega_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) < \alpha\}$$

είναι φραγμένη, δηλαδή $\Omega_\alpha \subseteq B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ για κάποιο $\epsilon_1 > 0$. Εφόσον $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ στο $\Omega_\alpha \setminus \{\mathbf{x}^*\}$ το Ω_α είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο, δηλαδή:

$$\mathbf{x}_0 \in \Omega_\alpha \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in \Omega_\alpha \quad \text{για κάθε } t \geq 0$$

Άρα, αν $B_\delta(\mathbf{x}^*) \subseteq \Omega_\alpha \subseteq B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ τότε $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in B_{\epsilon_1}(\mathbf{x}^*)$ για κάθε $t \geq 0$ και επομένως $\mathbf{x}^*$ ευσταθές (κατά Lyapunov). Επιπλέον από την απόδειξη του Θεωρήματος, $\mathbf{x}_0 \in B_\delta(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ και το $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Για μικρές τιμές του $\alpha > 0$ η επιφάνεια στάθμης Ω_α είναι φραγμένη (εφόσον η V είναι συνεχής και θετικά ορισμένη). Για παράδειγμα, αν για κάποιο $\epsilon > 0$ έχουμε:

$$\min_{\mathbf{x} \in \partial B_\epsilon(\mathbf{x}^*)} V(\mathbf{x}) = \alpha$$

τότε $\Omega_\alpha \subseteq B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ και άρα Ω_β φραγμένη για κάθε $\beta \in (0, \alpha]$. Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει αναγκαστικά για μεγάλες τιμές του α . Γενικά,

$$\Omega_\alpha = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : V(\mathbf{x}) < \alpha\} \subseteq B_r(\mathbf{x}^*) \Rightarrow \alpha < \inf_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\| \geq r} V(\mathbf{x})$$

Παρατηρούμε ότι αν $r_2 \geq r_1$, τότε

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \geq r_2\} \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| \geq r_1\}$$

και επομένως

$$\inf_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\| \geq r_1} V(\mathbf{x}) \leq \inf_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\| \geq r_2} V(\mathbf{x})$$

δηλαδή η συνάρτηση

$$\psi(r) := \inf_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\| \geq r} V(\mathbf{x})$$

είναι αύξουσα. Επομένως

$$\psi(r) := \inf_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\| \geq r} V(\mathbf{x}) = \min_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|=r} V(\mathbf{x})$$

εφόσον η V συνεχής συνάρτηση και το σύνολο $\partial B_r(\mathbf{x}^*)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Αν:

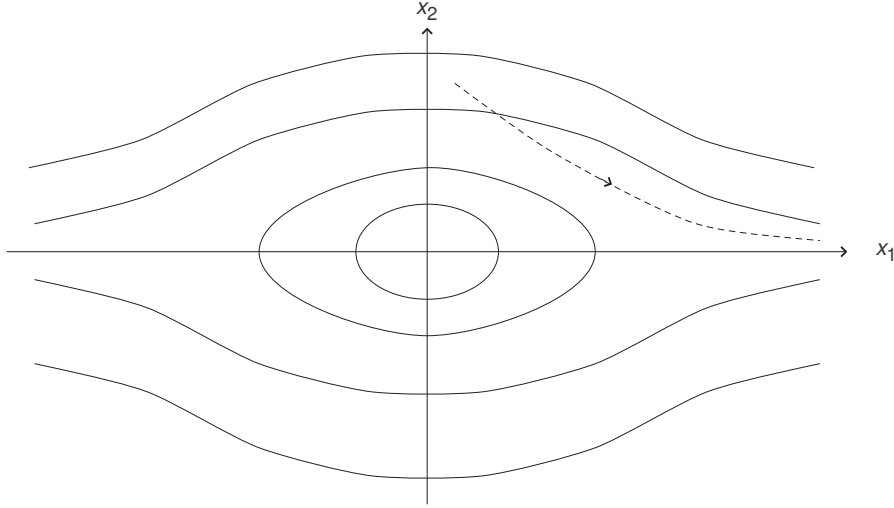
$$\lim_{r \rightarrow \infty} \psi(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} \inf_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\| \geq r} V(\mathbf{x}) = \lim_{r \rightarrow \infty} \min_{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\|=r} V(\mathbf{x}) = l < \infty$$

τότε η Ω_α είναι φραγμένη αν $\alpha < l$. Αν $l = \infty$, τότε η V είναι ακτινικά μη φραγμένη και κάθε επιφάνεια στάθμης Ω_α , $\alpha \in \mathbb{R}_+$, είναι φραγμένη.

Παράδειγμα: Έστω

$$V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

που είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ ως προς το $\mathbf{x}^* = (0, 0)$. Για μεγάλες τιμές του $c \in \mathbb{R}$ οι καμπύλες στάθμης της V δεν είναι φραγμένες. Επομένως παρόλο που η $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))$ είναι φθίνουσα κατά μήκος της λύσης $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ αυτό δεν εγγυάται ότι $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}^*$ καθώς $t \rightarrow \infty$ (δείτε διάγραμμα).



Έστω $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = r^2$. Τότε

$$V\left(x_1, \pm\sqrt{r^2 - x_1^2}\right) := \hat{V}_r(x_1) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + r^2 - x_1^2 = \frac{1+x_1^2-1}{1+x_1^2} + r^2 - x_1^2 = 1 + r^2 - \left(\frac{1}{1+x_1^2} + x_1^2\right)$$

όπου $0 \leq x_1^2 \leq r^2$. Επίσης:

$$\frac{1}{1+r^2} + r^2 - \frac{1}{1+x_1^2} - x_1^2 = r^2 - x_1^2 + \frac{1+x_1^2-1-r^2}{(1+r^2)(1+x_1^2)} = (r^2 - x_1^2) \left(1 - \frac{1}{(1+r^2)(1+x_1^2)}\right) \geq 0$$

με ισότητα όταν $x_1 = r$ ή $x_1 = -r$. Άρα

$$\frac{1}{1+r^2} + r^2 \geq \frac{1}{1+x_1^2} + x_1^2$$

και

$$V\left(x_1, \pm\sqrt{r^2 - x_1^2}\right) := \hat{V}_r(x_1) = 1 + r^2 - \left(\frac{1}{1+x_1^2} + x_1^2\right) \geq 1 - \frac{1}{1+r^2}$$

Επομένως, για σταθεροποιημένο $r > 0$:

$$\min_{\|\mathbf{x}\|=r} V(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{1+r^2} := \psi(r)$$

και εφόσον $\psi(r)$ αύξουσα συνάρτηση,

$$\min_{\|\mathbf{x}\|>r} V(x_1, x_2) = \min_{\|\mathbf{x}\|=r} V(x_1, x_2) = 1 - \frac{1}{1+r^2}$$

Επομένως:

$$l = \lim_{r \rightarrow \infty} \min_{\|\mathbf{x}\| \geq r} V(x_1, x_2) = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{1+r^2}\right) = 1$$

και άρα $\Omega_\alpha := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : V(x_1, x_2) < \alpha\}$ φραγμένη αν $\alpha < l = 1$. Παρατηρούμε ότι το όριο της V στην κατεύθυνση του x_1 άξονα:

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} V(x_1, 0) = \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \frac{x_1^2}{1+x_1^2} = 1$$

που επιβεβαιώνει το παραπάνω συμπέρασμα.

2.4 Αρχή του αναλλοιώτου και Θεώρημα Lasalle

Ορισμός: Το σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ λέγεται θετικά αναλλοίωτο για το σύστημα $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, αν $\mathbf{x}_0 \in S$ συνεπάγεται ότι $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in S$ για κάθε $t \geq 0$.

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα:

$$x_1' = x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad x_2' = -x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

Έστω $r^2 = x_1^2 + x_2^2$. Τότε:

$$\begin{aligned} (r^2)' &= 2rr' = (x_1^2 + x_2^2)' = 2x_1x_1' + 2x_2x_2' \\ &= 2x_1x_2 + 2x_1^2(1 - x_1^2 - x_2^2) - 2x_2x_1 + 2x_2^2(1 - x_1^2 - x_2^2) \\ &= 2(x_1^2 + x_2^2)(1 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned}$$

Επομένως: $r' = r(1 - r^2)$. Αν $r(0) = 1$ τότε $r'(0) = 0$ και επομένως $r(t) = 1$ για κάθε $t \geq 0$. Παρόμοια, $0 < r(0) < 1 \Rightarrow 0 < r(t) < 1$ για κάθε $t \geq 0$ και $r(0) > 1 \Rightarrow r(t) > 1$ για κάθε $t \geq 0$. Επομένως, αν $D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| < 1\}$, τα σύνολα $D \setminus \{(0,0)\}$, $\partial D = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$ (ευσταθής οριακός κύκλος) και $\mathbb{R}^2 \setminus (D \cup \partial D)$ είναι θετικά αναλλοίωτα σύνολα για το σύστημα. Το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι επίσης θετικά αναλλοίωτο.

Ορισμός: Έστω συνάρτηση $\mathbf{x} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η συνάρτηση $\mathbf{x}$ συγκλίνει σε κάποιο σύνολο $S \subseteq \mathbb{R}^n$ αν

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\mathbf{x}(t), S) = 0 \quad \text{όπου} \quad \text{dist}(\mathbf{x}, S) := \inf_{\mathbf{s} \in S} \|\mathbf{x} - \mathbf{s}\|$$

Παρατήρηση: Η έννοια της σύγκλισης συνάρτησης σε σύνολο S , δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι η συνάρτηση συγκλίνει στο ίδιο σημείο του S ή ότι το όριο της συνάρτησης υπάρχει.

Παράδειγμα: Στο προηγούμενο παράδειγμα, η λύση του συστήματος $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ με $\mathbf{x}_0 \in D$, $\mathbf{x}_0 \in \partial D$ και $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus (D \cup \partial D)$, αντίστοιχα, συγκλίνει στον ευσταθή οριακό κύκλο ∂D .

Θεώρημα (Lasalle): Έστω $\mathbf{x}^*$ σημείο ισορροπίας του συστήματος $\mathbf{x}'(t) = f(\mathbf{x}(t))$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, όπου f τοπικά Lipschitz και $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση Lyapunov σε γειτονιά Ω του $\mathbf{x}^*$. Τότε το Ω περιέχει κλειστή και φραγμένη θετικά αναλλοίωτη γειτονιά K του $\mathbf{x}^*$ και για κάθε $\mathbf{x}_0 \in K$ η λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ του συστήματος συγκλίνει στο σύνολο:

$$S = \{\mathbf{x}_0 \in K : \dot{V}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0\}$$

Το σύνολο S είναι διάφορο του κενού και θετικά αναλλοίωτο. Επιπλέον, αν $S = \{\mathbf{x}^*\}$ τότε το $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη: Η κατασκευή του K είναι παρόμοια με αυτήν του Ω_1 στην απόδειξη του Θεωρήματος Lyapunov: Εφόσον Ω είναι γειτονιά του $\mathbf{x}^*$, υπάρχει, εξ' ορισμού σφαίρα $B_\epsilon(\mathbf{x}^*)$ με αρκούντως μικρή ακτίνα $\epsilon > 0$ που περιέχεται στο Ω . Έστω

$$\alpha = \min_{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\| = \epsilon} V(\mathbf{x})$$

Τότε $\alpha > 0$. Τότε το σύνολο

$$K = \{\mathbf{x} \in B_\epsilon(\mathbf{x}^*) : V(\mathbf{x}) \leq \alpha/2\}$$

έχει τις επιθυμητές ιδιότητες: Είναι φραγμένη και κλειστή γειτονιά του $\mathbf{x}^*$ και εφόσον $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ είναι επίσης θετικά αναλλοίωτο.

Το σύνολο S είναι διάφορο του κενού (περιέχει το $\mathbf{x}^*$). Έστω $\mathbf{x}_0 \in S$. Τότε, λόγω του ότι το K είναι θετικά αναλλοίωτο, για κάθε $t \geq 0$ το σημείο $\mathbf{y} := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in K$. Έστω $s \geq 0$ (αυθαίρετο). Τότε:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(s; \mathbf{y})) = \dot{V}(\mathbf{x}(s; \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0))) = \dot{V}(\mathbf{x}(t+s; \mathbf{x}_0)) = 0$$

εφόσον $\mathbf{x}_0 \in S$ και $t + s \geq 0$. Εφόσον $s \geq 0$ αυθαίρετο, σε κάθε σημείο της τροχιάς

$$\mathcal{O}^+(\mathbf{y}) = \{\mathbf{x}(s; \mathbf{y}) : s \geq 0\}$$

έχουμε $\dot{V}(\mathbf{x}(s; \mathbf{y})) = 0$ και άρα $\mathbf{y} \in S$. Άρα αν $\mathbf{x}_0 \in S$, όλη η τροχιά $\{\mathbf{y} = \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0), t \geq 0\}$ είναι εντός του S και επομένως το S είναι θετικά αναλλοίωτο.

Στην συνέχεια, έστω ότι $\mathbf{x}_0 \in K$. Εφόσον K θετικά αναλλοίωτο, όλη η τροχιά $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ παραμένει εντός του K για κάθε $t \geq 0$. Υποθέτουμε (για αντίφαση) ότι η συνάρτηση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ δεν συγκλίνει στο σύνολο S . Τότε, καθώς η συνάρτηση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ είναι φραγμένη, από το Θεώρημα Bolzano-Weierstrass υπάρχει ακολουθία (t_n) με $t_n \rightarrow \infty$ τέτοια ώστε

$$\mathbf{x}(t_n; \mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbf{x}_\infty \notin S$$

Εφόσον K κλειστό, $\mathbf{x}_\infty \in K$. Θα δείξουμε ότι $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty))$ είναι σταθερή συνάρτηση της μεταβλητής $t \geq 0$. Για κάθε $t \geq 0$ (αυθαίρετα μεγάλο αλλά σταθεροποιημένο) υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε:

$$V(\mathbf{x}(t_n; \mathbf{x}_0)) \geq V(\mathbf{x}(t_n + t; \mathbf{x}_0)) = V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}(t_n; \mathbf{x}_0))) \geq V(\mathbf{x}(t_{n+k}; \mathbf{x}_0)), \quad t \geq 0 \quad (*)$$

(Η πρώτη ανισότητα ισχύει γιατί $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ και η δεύτερη προκύπτει πάλι από την ανισότητα $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ σε συνδυασμό με το γεγονός ότι για κάθε (σταθεροποιημένο) $t \geq 0$ (αυθαίρετα μεγάλο) υπάρχει ακέραιος k (αρκούντως μεγάλος) ώστε να έχουμε $t_n + t < t_{n+k}$). Παίρνοντας το όριο $n \rightarrow \infty$ στην (*), έχουμε

$$V(\mathbf{x}_\infty) \geq V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty)) \geq V(\mathbf{x}_\infty)$$

λόγω συνέχειας της V και συνέχειας της λύσης $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ ως προς την αρχική συνθήκη $\mathbf{x}_0$. Επομένως, $V(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty))$ είναι σταθερή για $t \geq 0$ και άρα $\dot{V}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_\infty)) = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Ομως τότε $\mathbf{x}_\infty \in S$, που αντιβαίνει στην υπόθεση. Άρα η υπόθεση ότι η συνάρτηση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \nrightarrow S$ είναι λανθασμένη. $\square$

Παρατήρηση: Σε μία διαφορετική εκδοχή του Θεωρήματος Lasalle η υπόθεση ότι η V είναι θετικά ορισμένη δεν είναι απαραίτητη, αν και είναι χρήσιμη στην πράξη γιατί πολλές φορές η κατασκευή της συνάρτησης Lyapunov εγγυάται αυτόματα την ύπαρξη αναλλοίωτου συνόλου K . Η απόδειξη του Θεωρήματος Lasalle βασίζεται σε μία συγκεκριμένη κατασκευή του συνόλου K . Αν μας αρκεί να αποδείξουμε την ασυμπτωτική ευστάθεια κάποιου σημείου ισορροπίας, ο ορισμός του συνόλου K δεν είναι απαραίτητος - μόνο η εγγύηση της ύπαρξης του.

Παράδειγμα: Εκκρεμές με τριβή (συνέχεια). Υπενθυμίζουμε ότι οι εξισώσεις του συστήματος είναι:

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -\frac{g}{l} \sin x_1 - bx_2$$

όπου $b > 0$ ο συντελεστής τριβής. Από προηγούμενη ανάλυση, επιλέγοντας ως υποψήφια συνάρτηση Lyapunov την συνολική ενέργεια του συστήματος:

$$V(\mathbf{x}) = \text{K.E.} + \Delta.\text{E.} = \frac{1}{2}ml^2x_2^2 + mgl(1 - \cos x_1) \Rightarrow \dot{V}(\mathbf{x}) = -mbx_2^2 \leq 0$$

συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση V είναι θετικά ορισμένη στο $\Omega := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \pi\}$ ως προς το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Η συνάρτηση $\dot{V}$ είναι (μόνο) αρνητικά ημι-ορισμένη στο Ω , εφόσον έχουμε ότι $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ στον x_1 άξονα του επιπέδου (x_1, x_2) , ενώ σε κάθε άλλο σημείο του επιπέδου το πρόσημο της $\dot{V}$ είναι αρνητικό. Από το Θεώρημα Lyapunov συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι (απλά) ευσταθές (κατά Lyapunov) και όχι ασυμπτωτικά, όπως είναι το αναμενόμενο αποτέλεσμα. Πράγματι, όπως είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, αν επιλέξουμε συνάρτηση Lyapunov της μορφής:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T P \mathbf{x} + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1), \quad P = \begin{bmatrix} \frac{b^2}{2} & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & 1 \end{bmatrix} = P^T \succ 0$$

η παράγωγος της V κατά την κατεύθυνση της λύσης:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = -\frac{g}{l}x_1 \sin x_1 - \frac{b}{2}x_2^2$$

είναι αρνητικά ορισμένη στο Ω που συνεπάγεται ασυμπτωτική ευστάθεια του $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Το συμπέρασμα έχει την ερμηνεία από άποψη φυσικής ότι όσο το σύστημα είναι σε κίνηση, η ενέργεια του μειώνεται συνεχώς λόγω τριβής. Το Θεώρημα Lasalle μας δίνει το ίδιο αποτέλεσμα με χρήση συνάρτησης Lyapunov που έχει “φυσική σημασία”, δηλαδή συνάρτησης που αντιστοιχεί στην συνολική ενέργεια του συστήματος.

Έστω K το σύνολο των διανυσμάτων κατάστασης για τα οποία η τιμή της $V(\mathbf{x})$ δεν υπερβαίνει κάποιο σταθερό ποσοστό της συνολικής ενέργειας του συστήματος στο σημείο $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$, δηλαδή,

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : |x_1| < \pi, V(x_1, x_2) \leq (1 - \gamma)V(\pi, 0)\} \subseteq \Omega$$

όπου $\gamma \in (0, 1)$. Το σύνολο K είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του Ω καθώς και γειτονιά του $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Είναι επίσης θετικά αναλλοίωτο, καθώς αν $(x_1, x_2) \in K$ η ενέργεια του εκκρεμούς δεν αρκεί ώστε αυτό να φτάσει η να περάσει από την κατακόρυφη θέση $x_1 = \pm\pi$ λόγω του περιορισμού $V(\mathbf{x}) \leq (1 - \gamma)V(\pi, 0)$ στον ορισμό του K . Έστω επίσης:

$$S = \{\mathbf{x}_0 \in K : \dot{V}(\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)) = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0\}$$

Αν $\mathbf{x}_0 \in K$ τότε διαισθητικά περιμένουμε ότι η τροχιά $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ θα συγκλίνει στο S καθώς $t \rightarrow \infty$, αφού η ενέργεια του συστήματος μειώνεται όσο αυτό είναι σε κίνηση. Επίσης, δεν υπάρχει λύση του συστήματος (διαφορετική από την σταθερή λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$) που παραμένει ταυτοτικά εντός του S . Η συνθήκη $\dot{V} = 0$ ικανοποιείται στα άκρα της ταλάντωσης (όπου x_1 είναι τοπικό ακρότατο και $x_2 = 0$) αλλά μόνο στιγμιαία.

Το ίδιο συμπέρασμα προκύπτει και από τις εξισώσεις του συστήματος: Αν υπήρχε λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in S$ για κάθε $t \geq 0$, τότε $x_1'(0) = 0$ για κάθε $t \geq 0$, δηλαδή η συνάρτηση $x_1(t)$ θα ήταν σταθερή, και επίσης θα είχαμε ότι $x_2'(t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$. Άρα θα είχαμε ότι $\sin x_1 = 0$ και η μόνη τιμή του $x_1 \in (-\pi, \pi)$ για την οποία ισχύει αυτή η ισότητα είναι η τιμή $x_1 = 0$. Άρα η μοναδική λύση που μπορεί να μείνει ταυτοτικά στο S για $t \geq 0$ είναι η σταθερή λύση $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Σε αυτή την περίπτωση το Θεώρημα Lasalle συνεπάγεται ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^*$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παρατήρηση: Αν το Θεώρημα Lasalle ισχύει με συνάρτηση Lyapunov ακτινικά μη φραγμένη στο $\Omega = \mathbb{R}^n$, τότε το σημείο ισορροπίας είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα:

$$x_1' = 1 - e^{x_2}, \quad x_2' = 1 - e^{x_2 - x_1}$$

Σημεία ισορροπίας:

$$e^{x_2} = 1 \Rightarrow x_2 = 0, \quad 1 - e^{x_2 - x_1} = 0 \Rightarrow e^{x_1} = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

Άρα $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Έστω υποψήφια συνάρτηση Lyapunov:

$$V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2), \quad V_1(x_1) = x_1 + e^{-x_1} - 1, \quad V_2(x_2) = e^{x_2} - x_2 - 1$$

Τότε

$$V_1'(x_1) = 1 - e^{-x_1} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \quad V_1''(x_1) = e^{-x_1} \Rightarrow V_1''(0) = 1 > 0$$

και

$$V_2'(x_2) = e^{x_2} - 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0, \quad V_2''(0) = e^{x_2} \Rightarrow V_2''(0) = 1 > 0$$

Άρα $x_1 = 0$ και $x_2 = 0$ τα ολικά ελάχιστα της $V_1(x_1)$ και της $V_2(x_2)$, αντίστοιχα, και επομένως για κάθε $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$:

$$V(x_1, x_2) = V_1(x_1) + V_2(x_2) > V_1(0) + V_2(0) = 0$$

Επομένως $V(x_1, x_2)$ είναι θετικά ορισμένη στο $\mathbb{R}^2$ ως προς το $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Επίσης:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1(t), x_2(t)) &= \frac{\partial V}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2} x_2' = (1 - e^{-x_1})(1 - e^{x_2}) + (e^{x_2} - 1)(1 - e^{x_2 - x_1}) \\ &= 1 - e^{x_2} - e^{-x_1} + e^{x_2 - x_1} + e^{x_2} - e^{2x_2 - x_1} - 1 + e^{x_2 - x_1} \\ &= -e^{-x_1}(1 - 2e^{x_2} + e^{2x_2}) = -e^{-x_1}(1 - e^{x_2})^2 \leq 0\end{aligned}$$

και

$$\dot{V}(x_1(t), x_2(t)) = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0 \Rightarrow e^{x_2} = 1 \text{ για κάθε } t \geq 0 \Rightarrow x_2 = 0 \text{ για κάθε } t \geq 0$$

Άρα από το Θεώρημα Lasalle το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Η συνάρτηση Lyapunov $V(x_1, x_2)$ που επιλέξαμε είναι ακτινικά μη-φραγμένη: Θέτοντας $x_2 = \lambda x_1$ έχουμε:

$$V(x_1, \lambda x_1) = (1 - \lambda)x_1 + e^{-x_1} + e^{\lambda x_1} - 2$$

Επομένως, αν $\lambda \neq 0$:

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} V(x_1, \lambda x_1) = +\infty$$

Επίσης

$$\lim_{|x_1| \rightarrow \infty} V_1(x_1) = \lim_{|x_2| \rightarrow \infty} V_2(x_2) = +\infty$$

Επομένως η συνάρτηση V είναι ακτινικά μη-φραγμένη και το σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

2.5 Συνθήκες αστάθειας - Θεώρημα Chataev

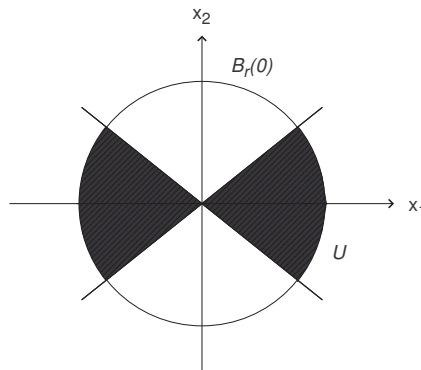
Έστω $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε (χωρίς βλάβη γενικότητας, δείτε Παρατήρηση στην ενότητα 2.1) ότι $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι σημείο ισορροπίας του συστήματος $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$ και ότι $\mathbf{0} \in \Omega$. Έστω επίσης ότι $V(\mathbf{0}) = 0$ και ότι υπάρχει σημείο $\mathbf{x}_0$ αυθαίρετα κοντά στο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $V(\mathbf{x}_0) > 0$. Επιλέγουμε $r > 0$ αρκούντως μικρό ώστε:

$$\bar{B}_r(\mathbf{0}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| \leq r\} \subseteq \Omega$$

Ορίζουμε:

$$U = \{\mathbf{x} \in \bar{B}_r(\mathbf{0}) : V(\mathbf{x}) > 0\}$$

Τότε $U \neq \emptyset$ και $U \subseteq \bar{B}_r(\mathbf{0})$. Το σύνορο ∂U του U αποτελείται από μέρη της επιφάνειας $V(\mathbf{x}) = 0$ και της σφαίρας $\|\mathbf{x}\| = r$. Εφόσον $V(\mathbf{0}) = 0$ το σημείο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ κείται στο $\partial U \cap \bar{B}_r(\mathbf{0})$. Για παράδειγμα, αν $n = 2$ και $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$ το σύνολο U είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:



Θεώρημα (Chataev): Έστω $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ σημείο ισορροπίας του συστήματος $\mathbf{x}' = f(\mathbf{x})$. Έστω $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση στο χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mathbf{0} \in \Omega$, τέτοια ώστε $V(\mathbf{0}) = 0$ και $V(\mathbf{x}_0) > 0$ για κάποιο $\mathbf{x}_0$ με αυθαίρετα μικρή νόρμα $\|\mathbf{x}_0\|$. Ορίζουμε σύνολο U ως

$$U = \{\mathbf{x} \in \bar{B}_r(\mathbf{0}) : V(\mathbf{x}) > 0\}$$

και έστω ότι $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in U$. Τότε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασταθές.

Απόδειξη: Το σημείο $\mathbf{x}_0$ είναι στο εσωτερικό του συνόλου U και $V(\mathbf{x}_0) > 0$. Έστω ότι $V(\mathbf{x}_0) = a$. Η τροχιά $\mathbf{x}(t) := \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ θα βγεί τελικά έξω από το σύνολο U . Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει αν παρατηρήσουμε ότι όσο το $\mathbf{x}(t)$ είναι εντός του U , $V(\mathbf{x}) \geq a$ αφού $\dot{V}(\mathbf{x}) > 0$ στο U . Έστω

$$\gamma = \min\{\dot{V}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in U \text{ και } V(\mathbf{x}) \geq a\}$$

που είναι καλά ορισμένο αφού $\dot{V}(\mathbf{x})$ είναι συνεχής συνάρτηση και το σύνολο

$$\{\mathbf{x} \in U \text{ και } V(\mathbf{x}) \geq a\} = \{\mathbf{x} \in \bar{B}_r(\mathbf{0}) \text{ και } V(\mathbf{x}) \geq a\}$$

είναι συμπαγές. Τότε $\gamma > 0$ και

$$V(\mathbf{x}(t)) = V(\mathbf{x}_0) + \int_0^t \dot{V}(\mathbf{x}(s))ds \geq a + \int_0^t \gamma ds = a + \gamma t$$

Η παραπάνω ανισότητα αποδεικνύει ότι η τροχιά δεν μπορεί να μείνει για πάντα εντός του U , γιατί η $V(\mathbf{x})$ είναι φραγμένη στο U . Όμως η τροχιά $\mathbf{x}(t)$ δεν μπορεί να φύγει από το U διαμέσω της επιφάνειας $V(\mathbf{x}) = 0$ αφού $V(\mathbf{x}(t)) \geq a$. Επομένως, η τροχιά πρέπει να φύγει εκτός του U μέσω της σφαίρας $\|\mathbf{x}\| = r$. Εφόσον αυτό συμβαίνει για αυθαίρετα μικρό $\|\mathbf{x}_0\|$, το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασταθές. $\square$

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα:

$$x'_1 = x_1 + g_1(\mathbf{x}), \quad x'_2 = -x_2 + g_2(\mathbf{x})$$

όπου g_1 και g_2 συναρτήσεις τοπικά Lipschitz που ικανοποιούν τις ανισότητες:

$$|g_1(\mathbf{x})| \leq k\|\mathbf{x}\|^2, \quad |g_2(\mathbf{x})| \leq k\|\mathbf{x}\|^2$$

σε κάποια γειτονιά D του σημείου $(0,0)$. (Εδώ $\|\cdot\|$ είναι η ευκλείδεια νόρμα). Από τις ανισότητες συμπεραίνουμε ότι $g_1(0) = g_2(0) = 0$ και άρα το σημείο $\mathbf{x}^* = (0,0)$ είναι το (μοναδικό) σημείο ισορροπίας

Έστω η συνάρτηση:

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2)$$

Στον x_1 -άξονα ($x_2 = 0$), έχουμε $V(\mathbf{x}) > 0$ για σημεία αυθαίρετα κοντά στο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Η παράγωγος την V κατά μήκος της λύσης του συστήματος είναι:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \frac{\partial V}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} x'_2 = x_1(x_1 + g_1(\mathbf{x})) - x_2(-x_2 + g_2(\mathbf{x})) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 g_1(\mathbf{x}) - x_2 g_2(\mathbf{x})$$

Επίσης:

$$|x_1 g_1(\mathbf{x}) - x_2 g_2(\mathbf{x})| \leq |x_1| |g_1(\mathbf{x})| + |x_2| |g_2(\mathbf{x})| \leq 2k\|\mathbf{x}\|^3$$

Επομένως:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) \geq \|\mathbf{x}\|^2 - 2k\|\mathbf{x}\|^3 = \|\mathbf{x}\|^2(1 - 2k\|\mathbf{x}\|)$$

Επιλέγοντας ακτίνα r τέτοια ώστε $\bar{B}_r(\mathbf{0}) \subseteq D$ και $r < \frac{1}{2k}$, οι υποθέσεις του Θερήματος Cataev ικανοποιούνται και επομένως συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασταθές.

2.6 Συστήματα κλίσης και Χαμιλτονιανά συστήματα (στον $\mathbb{R}^2$)

2.7 Ευστάθεια Γραμμικών Συστημάτων (ημιτελές - αγνοήστε!)

Αρχίζουμε την ανάλυση ευστάθειας γραμμικών χρονικά αναλλοίωτων συστημάτων με τα παρακάτω προκαταρκτικά:

Λήμμα: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\lambda \in \sigma(A)$ και έστω $m(\lambda)$ η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ και $E(\lambda) = \ker(A - \lambda I_n)^{m(\lambda)}$ ο γενικευμένος ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ . Επίσης, αν $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, έστω $\mathbf{x}_{\mathbf{z}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x}_{\mathbf{z}} = e^{At}\mathbf{z}$.

(i) Αν $\lambda \in \sigma(A)$ και $\mathbf{z} \in E(\lambda)$, τότε

$$\mathbf{x}_{\mathbf{z}}(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(ii) Έστω $\mathcal{B}(\lambda)$ βάση του $E(\lambda)$ και $\mathcal{B} = \cup_{\lambda \in \sigma(A)} \mathcal{B}(\lambda)$. Τότε το σύνολο $\{\mathbf{x}_{\mathbf{z}} : \mathbf{z} \in \mathcal{B}\}$ είναι βάση του χώρου λύσεων του ΠΑΤ: $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in \mathbb{C}^n$.

Απόδειξη: (i) Έστω $d(\lambda)$ η γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ και

$$\begin{aligned} (A - \lambda I_n)\mathbf{z}_{i,1} &= 0 \\ (A - \lambda I_n)\mathbf{z}_{i,2} &= \mathbf{z}_{i,1} \\ &\vdots \\ (A - \lambda I_n)\mathbf{z}_{i,\nu_i} &= \mathbf{z}_{i,\nu_i-1} \end{aligned}$$

η i -αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους ν_i που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ , όπου $i = 1, 2, \dots, d(\lambda)$ και $\sum_{i=1}^{d(\lambda)} \nu_i = m(\lambda)$. (Εδώ $\mathbf{z}_{i,j}$, $j = 1, 2, \dots, \nu_i$, είναι το γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα j -τάξης της i αλυσίδας). Τότε

$$(A - \lambda I_n)^j \mathbf{z}_{i,j} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, \dots, d(\lambda), \quad j = 1, 2, \dots, \nu_i$$

Επομένως,

$$\mathbf{x}_{\mathbf{z}}(t) = e^{At}\mathbf{z} = e^{\lambda t} e^{(A - \lambda I_n)t} \mathbf{z} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}$$

Ισοδύναμα:

$$\mathbf{x}_{\mathbf{z}}(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z} + e^{\lambda t} \sum_{k \geq m(\lambda)} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Εδώ έχουμε εζ' υποθέσεως ότι

$$\mathbf{z} \in E(\lambda) = \langle \mathbf{z}_{i,j} \rangle_{i=1,2,\dots,d(\lambda)}^{j=1,2,\dots,\nu_i} = \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \sum_{j=1}^{\nu_i} c_{ij} \mathbf{z}_{i,j}$$

για κάποια $c_{ij} \in \mathbb{C}$. Επομένως για $k \geq m(\lambda) \geq \nu_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, d(\lambda)$, έχουμε:

$$(A - \lambda I_n)^k \mathbf{z} = \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \sum_{j=1}^{\nu_i} c_{ij} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}_{i,j} = \sum_{i=1}^{d(\lambda)} \sum_{j=1}^{\nu_i} c_{ij} (A - \lambda I_n)^{k-j} (A - \lambda I_n)^j \mathbf{z}_{i,j} = 0$$

(παρατηρούμε ότι στο εσωτερικό άθροισμα έχουμε $k - j \geq 0$ για κάθε τιμή των k και j και επομένως ο πίνακας $(A - \lambda I_n)^{k-j}$ είναι καλά ορισμένος). Επομένως

$$\mathbf{x}_z(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(ii) Εφόσον

$$\mathbb{C}^n = \ker(A - \lambda_1)^{m_1(\lambda)} \oplus \ker(A - \lambda_2)^{m_2(\lambda)} \oplus \dots \oplus \ker(A - \lambda_r I)^{m_r(\lambda)}$$

όπου

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\} = \sigma(A)$$

το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του $\mathbb{C}^n$ και επομένως $\{\mathbf{x}_z : \mathbf{z} \in \mathbb{B}\} = \{e^{At} \mathbf{z} : \mathbf{z} \in \mathcal{B}\}$ είναι βάση του συνόλου των λύσεων του ΠΑΤ. $\square$

Θεώρημα: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\mu_A = \max\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$ και

$$\Gamma_A = \{\gamma \in \mathbb{R} : \exists M_\gamma \geq 1 \text{ τ.ω. } \|e^{At}\| \leq M_\gamma e^{\gamma t}, t \geq 0\}$$

Τότε:

(i) $(\mu_A, \infty) \subseteq \Gamma_A$ και $\inf \Gamma_A = \mu_A$.

(ii) $\mu_A \in \Gamma_A$ αν και μόνο αν για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$ με $\operatorname{Re}(\lambda) = \mu_A$ η αλγεβρική και η γεωμετρική πλλαπλότητα της ιδιοτιμής λ είναι ίσες.

(iii) Έστω $\gamma \in \mathbb{R}$. Αν για κάθε $\xi \in \mathbb{C}^n$ ισχύει ότι $e^{(A-\gamma I)t} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$, τότε $\mu_A < \gamma$.

Απόδειξη: (i) Έστω $\lambda \in \sigma(A)$ και $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ αντίστοιχο γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα. Τότε από το προηγούμενο Λήμμα:

$$e^{At} \mathbf{z} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Έστω $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_n\}$ βάση του $\mathbb{C}^n$ που αποτελείται από τα γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του A και έστω $Z = [\mathbf{z}_1 \ \mathbf{z}_2 \ \dots \ \mathbf{z}_n] \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $\det Z \neq 0$.

Έστω αυθαίρετο $\gamma \in (\mu_A, \infty)$. Θα δείξουμε ότι $\gamma \in \Gamma_A$ (και άρα $(\mu_A, \infty) \subseteq \Gamma_A$). Έστω $\lambda \in \sigma(A)$ και $\mathbf{z}_i \in \ker(A - \lambda I_n)^{m(\lambda)}$ όπου $m(\lambda)$ η αλγεβρική πλλαπλότητα της ιδιοτιμής λ (δηλ. $\mathbf{z}_i$ γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ). Τότε:

$$\begin{aligned} \|e^{At} \mathbf{z}_i\| &\leq |e^{\lambda t}| \left\| \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}_i \right\|, \quad t \in \mathbb{R} \\ &\leq \left| e^{[\operatorname{Re}(\lambda) + i\operatorname{Im}(\lambda)]t} \right| \left\| \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} \|A - \lambda I_n\|^k \right\| \|\mathbf{z}_i\|, \quad t \in \mathbb{R} \\ &= e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} |p_\lambda(t)| \|\mathbf{z}_i\| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t} p_\lambda(t) \|\mathbf{z}_i\|, \quad t \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

όπου

$$p_\lambda(t) := \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} \|A - \lambda I_n\|^k$$

Εφόσον $\gamma > \mu_A \geq \operatorname{Re}(\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \sigma(A)$, υπάρχει $L \geq 0$ τ.ω.

$$\|e^{At} \mathbf{z}_i\| \leq L e^{\gamma t} \|\mathbf{z}_i\|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t \geq 0$$

και $L \geq 1$ εφόσον για $t = 0$ έχουμε $\|\mathbf{z}_i\| \leq L\|\mathbf{z}_i\|$. Έστω $\xi \in \mathbb{C}^n$ αυθαίρετο. Ορίζουμε:

$$\eta = Z^{-1}\xi \Rightarrow \xi = Z\eta = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 & \mathbf{z}_2 & \dots & \mathbf{z}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix} \Rightarrow \xi = \sum_{i=1}^n \eta_i \mathbf{z}_i$$

και άρα

$$\|e^{At}\xi\| \leq \|e^{At} \sum_{i=1}^n \eta_i \mathbf{z}_i\| \leq \sum_{i=1}^n |\eta_i| \|e^{At} \mathbf{z}_i\|$$

Όμως για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$,

$$|\eta_i| \leq \|\eta\| \leq \|Z^{-1}\| \|\xi\| \Rightarrow \|e^{At}\xi\| \leq \sum_{i=1}^n \|Z^{-1}\| \|\xi\| \|e^{At} \mathbf{z}_i\|$$

και επομένως

$$\|e^{At}\xi\| \leq M_\gamma e^{\gamma t} \|\xi\|, \quad t \geq 0 \quad \text{όπου} \quad M_\gamma := L \|Z^{-1}\| \sum_{i=1}^n \|\mathbf{z}_i\|$$

και εφόσον $\xi \in \mathbb{C}^n$ αυθαίρετο,

$$\|e^{At}\| \leq M_\gamma e^{\gamma t}, \quad t \geq 0$$

Από τον ορισμό του Γ_A έχουμε ότι $\gamma \in \Gamma_A \Rightarrow \hat{\gamma} \in \Gamma_A$ για κάθε $\hat{\gamma} \geq \gamma$ και άρα

$$\gamma \in \Gamma_A \Rightarrow (\mu_A, \infty) \subseteq \Gamma_A \Rightarrow \inf \Gamma_A \leq \mu_A$$

Αντίστροφα, έστω $\lambda \in \sigma(A)$ και $\mathbf{z}_1 \in \mathbb{C}^n$ ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ με $\|\mathbf{z}_1\| = 1$. Τότε $(A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}_1 = \mathbf{0}$ αν $k \geq 1$ και επομένως

$$e^{At} \mathbf{z}_1 = e^{\lambda t} \mathbf{z}_1, \quad t \in \mathbb{R}$$

και επομένως για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\|e^{At}\| = \max_{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n, \|\mathbf{z}\|=1} \|e^{At} \mathbf{z}\| \geq \|e^{At} \mathbf{z}_1\| = \|e^{\lambda t} \mathbf{z}_1\| = |e^{\lambda t}| \|\mathbf{z}_1\| = e^{\operatorname{Re}(\lambda)t}$$

Επομένως δεν υπάρχει $M_\gamma \geq 1$ τ.ω. $\|e^{At}\| \leq M_\gamma e^{\gamma t}$ για κάθε $t \geq 0$ αν $\gamma > \operatorname{Re}(\lambda)$. Εφόσον $\lambda \in \sigma(A)$ αυθαίρετο, δεν υπάρχει $M_\gamma \geq 1$ τ.ω. $\|e^{At}\| \leq M_\gamma e^{\gamma t}$ για κάθε $t \geq 0$ αν $\gamma > \mu_A$. Επομένως $\inf \Gamma_A \geq \mu_A$ που μαζί με την προηγούμενη ανισότητα ($\inf \Gamma_A \leq \mu_A$) συνεπάγεται ότι $\inf \Gamma_A = \mu_A$.

(ii) Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι μία ιδιοτιμή λ του A έχει ίση αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα αν και μόνο αν ο γενικευμένος ιδιόχωρος $E(\lambda) = \ker(A - \lambda I)^{m(\lambda)}$ ταυτίζεται με τον ιδιόχωρο $\ker(A - \lambda I)$.

Αν κάθε ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ που ικανοποιεί την ισότητα $\operatorname{Re}(\lambda) = \mu_A$ έχει την ίδια αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα, τότε από την σχέση

$$e^{At} \mathbf{z} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I_n)^k \mathbf{z}, \quad t \in \mathbb{R}$$

προκύπτει ότι για κάθε γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{z}$ του A υπάρχει $L_{\mathbf{z}} \geq 1$, τ.ω.

$$\|e^{At} \mathbf{z}\| \leq L_{\mathbf{z}} e^{\mu_A t} \|\mathbf{z}\|, \quad t \geq 0$$

Με παρόμοια απόδειξη όπως στο (i) υπάρχει $M \geq 1$ τ.ω. $\|e^{At}\| \leq M e^{\mu_A t}$, $t \geq 0$ και επομένως $\mu_A \in \Gamma_A$.

Αντίστροφα, έστω $\mu_A \in \Gamma_A$, $\lambda \in \sigma(A)$ με $\operatorname{Re}(\lambda) = \mu_A$ και έστω $\mathbf{z} \in E(\lambda) = \ker(A - \lambda A)^{m(\lambda)}$ (γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα της ιδιοτιμής λ). Τότε

$$\left\| \sum_{k=0}^{m(\lambda)-1} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k \mathbf{z} \right\| = \|e^{-\lambda t} e^{At}\| = e^{-\mu_A t} \|e^{At}\| \leq e^{-\mu_A t} M e^{\mu_A t} = M, \quad t \geq 0$$

Επομένως

$$\|e^{At}\| \leq M |e^{\lambda t}| = M e^{\mu_A t}, \quad t \geq 0$$

που συνεπάγεται ότι $(A - \lambda I)\mathbf{z} = \mathbf{0}$, δηλαδή ότι $\mathbf{z} \in \ker(A - \lambda I)$. Εφόσον η συνεπαγωγή ισχύει για κάθε $\mathbf{z} \in E(\lambda)$ έχουμε $E(\lambda) = \ker(A - \lambda I)$ και επομένως η αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ είναι ίσες.

2.7α Ευστάθεια Γραμμικών Συστημάτων - Αλγεβρική εξίσωση Lyapunov

Έστω το γραμμικό σύστημα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Το σύστημα έχει σημείο ισορροπίας στο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, το οποίο είναι μεμονομένο αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$, δηλ. αν και μόνο αν ο πίνακας A έχει τετριμμένο πυρήνα. Παρατηρούμε επίσης ότι ένα γραμμικό σύστημα δεν μπορεί να έχει πολλαπλά μεμονομένα σημεία ισορροπίας, γιατί αν $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$ είναι σημεία ισορροπίας και $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, τότε, λόγω γραμμικότητας, κάθε σημείο στην ευθεία που συνδέει τα δύο σημεία είναι επίσης σημείο ισορροπίας.

Εξετάζουμε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Αν $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, η λύση του συστήματος είναι $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$. Αν $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ο πίνακας των γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, έχουμε

$$P^{-1}AP := J = \text{block-diag}(J_1, J_2, \dots, J_r)$$

όπου:

$$\phi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = (\lambda - \lambda_1)^{\tau_1} (\lambda - \lambda_2)^{\tau_2} \dots (\lambda - \lambda_\rho)^{\tau_\rho}$$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του πίνακα A , ρ ο αριθμός των διακεκριμένων ιδιοτιμών $\lambda_i \in \sigma(A)$, $n = \sum_{i=1}^n \tau_i$ και τ_i η αλγεβρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i , $i = 1, 2, \dots, \rho$. Ορίζουμε $d_i = \text{null}(\lambda I_n - A) = n - \text{rank}(\lambda I_n - A)$, $i = 1, 2, \dots, \rho$ την γεωμετρική πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_i , $i = 1, 2, \dots, \rho$. Τότε:

$$e^{At} = P e^{Jt} P^{-1} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} e^{\lambda_i t} R_{ik}$$

όπου $r = \sum_{i=1}^{\rho} d_i$ ο αριθμός των Jordan blocks του πίνακα J και όπου m_i η μέγιστη διάσταση των Jordan blocks που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i (σε κάθε διακεκριμένη ιδιοτιμή λ_i αντιστοιχούν d_i Jordan blocks). Γενικά $1 \leq d_i \leq \tau_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, \rho$. Η διάσταση όλων των Jordan blocks που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i είναι ίση με την μονάδα αν και μόνο αν $d_i = \tau_i$. Από την παραπάνω ανάλυση προκύπτει το επόμενο Θεώρημα:

Θεώρημα: Το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ευσταθές (κατά Lyapunov) αν και μόνο αν για κάθε ιδιοτιμή λ_i , $i = 1, 2, \dots, \rho$, του πίνακα A ισχύει $\operatorname{Re}(\lambda_i) \leq 0$ και κάθε ιδιοτιμή με $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$ έχει ίση αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα. Το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι (ολικά) ασυμπτωτικά ευσταθές αν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα A ικανοποιούν την ανισότητα $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2, \dots, \rho$.

Απόδειξη: Από την σχέση $\mathbf{x}(t) = e^{At}\mathbf{x}_0$ συμπεραίνουμε ότι το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ευσταθές αν και μόνο αν η συνάρτηση e^{At} είναι φραγμένη για $t \geq 0$. Αν υπάρχει ιδιοτιμή λ_i με $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, ο αντίστοιχος όρος $e^{\lambda_i t}$ της

$$e^{At} = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1} e^{\lambda_i t} R_{ik}$$

δεν φράσσεται καθώς $t \rightarrow \infty$. Επομένως πρέπει να περιορίσουμε τις ιδιοτιμές στο $\mathbb{C}_-$. Όμως, αν $k > 1$, οι ιδιοτιμές στον άξονα των φανταστικών (αν υπάρχουν) αντιστοιχούν επίσης σε μη φραγμένες συναρτήσεις στο $t \in [0, \infty)$. Άρα για ευστάθεια (κατά Lyapunov) κάθε ιδιοτιμή που κείται στον άξονα των φανταστικών πρέπει να έχει ίση αλγεβρική και γεωμετρική πολλαπλότητα (ώστε τα αντίστοιχα Jordan blocks να έχουν διάσταση 1×1). Οι παραπάνω συνθήκες είναι επίσης ικανές για να εξασφαλίσουν ότι η συνάρτηση $[0, \infty) \rightarrow e^{At}$ είναι φραγμένη. Επίσης, από την μορφή του αναπτύγματος της e^{At} προκύπτει ότι $e^{At} \rightarrow 0$ καθώς $t \rightarrow \infty$ αν και μόνο αν $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, \rho$. Εφόσον η λύση $\mathbf{x}(t)$ εξαρτάται γραμμικά από την αρχική κατάσταση $\mathbf{x}_0$, η ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ στην περίπτωση αυτή είναι ολική. $\square$

Παρατήρηση: Πίνακας $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ με $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$ λέγεται πίνακας Hurwitz.

Παρατήρηση: Έστω σύστημα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ πίνακας Hurwitz. Ορίζουμε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ όπου $P = P^T \succ 0$. Η V είναι συνεχώς διαφορίσιμη και θετικά ορισμένη ως προς το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ του συστήματος. Επιπλέον, η παράγωγος της V κατά μήκος της τροχιάς του συστήματος είναι

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \dot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}}^T P \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (PA + A^T P) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$$

όπου $Q = Q^T$ ορίζεται ως: $PA + A^T P = -Q$. Αν $Q \succ 0$, τότε

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}' + \mathbf{x}'^T P \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (PA + A^T P) \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} < 0$$

για $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ και από το Θεώρημα Lyapunov το σημείο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές (και μάλιστα ολικά, εφόσον $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x} \geq \lambda_{\min}(P) \|\mathbf{x}\|^2 \rightarrow \infty$ καθώς $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$, η V είναι ακτινικά μη-φραγμένη εφόσον $\lambda_{\min}(P) > 0$). Επομένως, αν για κάποιον πίνακα $Q = Q^T \succ 0$ η αλγεβρική εξίσωση Lyapunov $PA + A^T P + Q = 0$ έχει θετικά ορισμένη λύση $P = P^T \succ 0$, τότε ο πίνακας A είναι Hurwitz και $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ είναι (ισχυρή) συνάρτηση Lyapunov ως προς το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ του συστήματος $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

Θεώρημα (Εξίσωση Lyapunov): $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι πίνακας Hurwitz ($\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_-$) αν και μόνο αν για κάθε $Q = Q^T \succ 0$ υπάρχει $P = P^T \succ 0$ τέτοιος ώστε: $PA + A^T P + Q = 0$. Επιπλέον αν A Hurwitz, τότε ο P γράφεται ως

$$P = P^T = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

και είναι η μοναδική λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Lyapunov: $PA + A^T P + Q = 0$. Στην περίπτωση αυτή (A Hurwitz) η συνάρτηση $V(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ είναι ισχυρή συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ και ακτινικά μη-φραγμένη, και επομένως το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη: ($\Leftarrow$): Έστω $Q = Q^T \succ 0$ (αυθαίρετος). Ορίζουμε $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$. Τότε η συνάρτηση $V(\mathbf{x})$ (σύμφωνα με την τελεψαία παρατήρηση) ισχυρή συνάρτηση Lyapunov για το σύστημα $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ και επομένως το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι (ολικά) ασυμπτωτικά ευσταθές. Άρα ο πίνακας A είναι Hurwitz.

($\Rightarrow$): Αντίστροφα, έστω ότι ο πίνακας A είναι Hurwitz. Ορίζουμε:

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$$

Τα στοιχεία του πίνακα που ολοκληρώνεται είναι της μορφής $t^k e^{\mu t}$, $k \geq 0$, $\operatorname{Re}(\mu) < 0$, και επομένως ο P είναι καλά ορισμένος. Επίσης, εφόσον ο πίνακας που ολοκληρώνεται είναι συμμετρικός για κάθε $t \geq 0$, έχουμε ότι $P = P^T$. Έστω ότι $P \neq 0$. Τότε υπάρχει $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε $\mathbf{x}^T P \mathbf{x} = 0$. Άρα

$$\mathbf{x}^T \left(\int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt \right) \mathbf{x} = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \mathbf{x}^T e^{A^T t} Q e^{At} \mathbf{x} dt = 0 \Rightarrow \int_0^\infty \|Q^{1/2} e^{At} \mathbf{x}\|^2 dt = 0 \Rightarrow \|Q^{1/2} e^{At} \mathbf{x}\| = 0$$

λόγω συνέπειας της συνάρτησης $t \mapsto \|Q^{1/2}e^{At}\mathbf{x}\|$ και εφόσον $\|Q^{1/2}e^{At}\mathbf{x}\|^2 \geq 0$ για κάθε $t \geq 0$. Εφόσον $Q^{1/2} = (Q^{1/2})^T \succ 0$ και $\det(e^{At}) \neq 0$ για κάθε $t \geq 0$, η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ και οδηγεί σε αντίφαση. Επομένως:

$$\begin{aligned} PA + A^T P &= \int_0^\infty \left(e^{A^T t} Q e^{At} A + A^T e^{A^T t} Q e^{At} \right) dt = \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(e^{A^T t} Q e^{At} \right) dt \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{A^T t} Q e^{At} \right) - e^{A^T t} Q e^{At} \Big|_{t=0} = -Q \end{aligned}$$

και επομένως ο P είναι λύση της αλγεβρικής εξίσωσης Lyapunov $PA + A^T P + Q = 0$. Για να δείξουμε ότι ο P είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης, έστω ότι $\tilde{P}$ είναι επίσης λύση, δηλαδή ότι $\tilde{P}A + A^T \tilde{P} + Q = 0$. Αφαιρώντας τις δύο εξισώσεις Lyapunov κατά μέλη έχουμε για κάθε $t \geq 0$:

$$(P - \tilde{P})A + A^T(P - \tilde{P}) = 0 \Rightarrow e^{A^T t} \left[(P - \tilde{P})A + A^T(P - \tilde{P}) \right] e^{At} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(e^{A^T t} (P - \tilde{P}) e^{At} \right) = 0$$

Επομένως ο πίνακας $e^{A^T t} (P - \tilde{P}) e^{At}$ είναι σταθερός για κάθε $t \geq 0$ και

$$e^{A^T t} (P - \tilde{P}) e^{At} = e^{A^T t} (P - \tilde{P}) e^{At} \Big|_{t=0} = P - \tilde{P}$$

Στο όριο καθώς $t \rightarrow \infty$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{A^T t} (P - \tilde{P}) e^{At} = 0 = P - \tilde{P}$$

και επομένως $P = \tilde{P}$. Η ολική ασυμπτωτική ευστάθεια του σημείου ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ του συστήματος $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ προκύπτει από την τελευταία Παρατήρηση. $\square$

Παρατήρηση: Η αλγεβρική εξίσωση Lyapunov $A^T P + PA + Q = 0$ είναι ειδική περίπτωση της εξίσωσης Sylvester $AX + XB = C$ (όπου $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{r \times r}$ και $C, X \in \mathbb{R}^{n \times r}$) που αναλύθηκε στην ενότητα 1.2 (Ανάδραση καταστάσεων/Παρατηρητές). Αποδεικνύεται στην ενότητα αυτή ότι η εξίσωση Sylvester έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\sigma(A) \cap \sigma(-B) = \emptyset$. Συνεπώς η εξίσωση Lyapunov έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν $\sigma(A) \cap \sigma(-A) = \emptyset$, η ισοδύναμα αν και μόνο αν $\lambda_i(A) + \bar{\lambda}_j(A) \neq 0$ για κάθε ζεύγος ιδιοτιμών $\lambda_i, \lambda_j \in \sigma(A)$, ιδιότητα που ισχύει αν ο A είναι πίνακας Hurwitz.

Παρατήρηση: Έστω A πίνακας Hurwitz. Τότε από την παραπάνω παρατήρηση η λύση P της $A^T P + PA + Q = 0$ υπάρχει και είναι μοναδική. Έστω $Q = Q^T$. Τότε αναγκαστικά $P = P^T$. Γιατι αν P είναι λύση, δηλ. $A^T P + PA + Q = 0$, τότε $(A^T P + PA + Q)^T = 0 \Rightarrow P^T A + A^T P^T + Q = 0$, δηλ. P^T είναι επίσης λύση. Λόγω μοναδικότητας λύσης έχουμε $P = P^T$.

Μία γενίκευση του παραπάνω Θεωρήματος όταν $Q = Q^T \succeq 0$ είναι η παρακάτω:

Λήμμα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ πίνακας Hurwitz. Τότε ισχύουν τα παρακάτω σε σχέση με την (μοναδική) λύση της εξίσωσης Lyapunov $A^T P + PA + Q = 0$:

1. $P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt$.
2. (α) Αν $Q = Q^T \succ 0$ τότε $P = P^T \succ 0$. (β) Αν $Q = Q^T \succeq 0$, τότε $P = P^T \succeq 0$.
3. Αν $Q = Q^T \succeq 0$, τότε $P = P^T \succ 0$ αν και μόνο αν $\Sigma_o(A, Q)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο.

Απόδειξη: Το (1) και (2α) έχουν ήδη αποδειχθεί. Παρόμοια, το (2β) επίσης ισχύει: Το ολοκλήρωμα συγκλίνει εφόσον ο A είναι πίνακας Hurwitz και $P = P^T \succeq 0$ ως ολοκλήρωμα συμμετρικού, θετικά ημιορισμένου πίνακα στο διάστημα $[0, \infty)$. (3 $\Rightarrow$) Έστω ότι $P = P^T \succ 0$ και έστω (για αντίφαση) ότι το σύστημα $\Sigma_o(A, Q)$ δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο. Τότε υπάρχει ζεύγος $(\lambda, \mathbf{v})$, $\lambda \in \sigma(A)$, $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ τέτοιο ώστε $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ και $Q\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Επομένως:

$$\mathbf{v}^* (A^T P + PA + Q) \mathbf{v} = \mathbf{0} \Rightarrow 2\operatorname{Re}(\lambda)(\mathbf{v}^* P \mathbf{v}) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\lambda) = 0$$

που είναι άτοπο γιατί ο A είναι πίνακας Hurwitz εξ' υποθέσεως. (3.⇐) Έστω $Q = Q^T \succeq 0$ και $\Sigma_o(A, Q)$ πλήρως παρατηρήσιμο. Από το (2b) έχουμε $P = P^T \succeq 0$. Αν $P = P^T \succ 0$ η απόδειξη ολοκληρώθηκε. Έστω (για αντίφαση) ότι $\det(P) = 0$. Τότε υπάρχει $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\xi \neq 0$, τέτοιο ώστε $P\xi = 0$. Επομένως:

$$\xi^T(A^T P + PA + Q)\xi = 0 \Rightarrow \xi^T Q \xi = 0 \Rightarrow Q\xi = 0$$

αφού $Q = Q^T \succeq 0$. Επομένως $\ker(P) \subseteq \ker(Q)$. Επίσης:

$$(A^T P + PA + Q)\xi = 0 \Rightarrow PA\xi = 0 \Rightarrow \xi^T A^T (A^T P + PA + Q)A\xi = \xi^T A^T Q A\xi = 0 \Rightarrow Q A\xi = 0$$

Επαγωγικά:

$$Q A^k \xi = 0 \text{ για κάθε } k \in \mathbb{N}_0 \Rightarrow Q e^{At} \xi = 0 \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}$$

και επομένως το σύστημα $\Sigma_o(A, Q)$ δεν είναι πλήρως παρατηρήσιμο που είναι άτοπο εξ' υποθέσεως. $\square$

Πόρισμα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ πίνακας Hurwitz. Τότε το σύστημα $\Sigma_o(A, C)$ είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνο αν η λύση P της εξίσωσης Lyapunov $A^T P + PA + C^T C = 0$ είναι θετικά ορισμένη. Αντίστοιχα, αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ είναι πίνακας Hurwitz, τότε το $\Sigma_i(A, B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνο αν η λύση Q της εξίσωσης Lyapunov $AQ + QA^T + BB^T = 0$ είναι θετικά ορισμένη.

Απόδειξη: Προκύπτει άμεσα από το μέρος (3) του παραπάνω Λήμματος και την διυκότητα ελεγχιμότητας και παρατηρησιμότητας. Οι πίνακες P και Q είναι οι πίνακες Gramian παρατηρησιμότητας και ελεγχιμότητας, αντίστοιχα, του συστήματος $\Sigma(A, B, C)$. $\square$

Σε ορισμένες περιπτώσεις θέλουμε να συνάγουμε συμπεράσματα για το φάσμα του πίνακα A από την λύση εξίσωσης Lyapunov. Στις περιπτώσεις αυτές το παρακάτω Λήμμα είναι χρήσιμο:

Λήμμα: Έστω P η λύση της εξίσωσης Lyapunov $A^T P + PA + Q = 0$. Τότε,

1. $\operatorname{Re}(\lambda_i(A)) \leq 0$ για κάθε $\lambda_i(A) \in \sigma(A)$ αν $P = P^T \succ 0$ και $Q = Q^T \succeq 0$.
2. A Hurwitz αν $P = P^T \succ 0$ και $Q = Q^T \succ 0$.
3. A Hurwitz αν $P = P^T \succeq 0$, $Q = Q^T \succeq 0$ και $\Sigma_o(A, Q)$ ανιχνεύσιμο (detectable).

Απόδειξη: Έστω $(\lambda, \mathbf{v})$ ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος του πίνακα A . Τότε $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση Lyapunov από τα δεξιά με $\mathbf{v}$ και από τα αριστερά με $\mathbf{v}^*$, έχουμε:

$$\mathbf{v}^*(A^T P + PA + Q)\mathbf{v} = 2\operatorname{Re}\lambda(\mathbf{v}^* P \mathbf{v}) + \mathbf{v}^* Q \mathbf{v} = 0$$

Αν $P \succ 0$, τότε $\mathbf{v}^* P \mathbf{v} > 0$ και επομένως $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ αν $Q \succeq 0$ και $\operatorname{Re}\lambda < 0$ αν $Q \succ 0$ που αποδεικνύουν το (1) και το (2). Για να δείξουμε το (3), έστω ότι $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$. Τότε $\mathbf{v}^* Q \mathbf{v} = 0 \Rightarrow Q\mathbf{v} = 0$. Άρα $\lambda \in \mathbb{C}_+$ και είναι μη-παρατηρήσιμη ιδιοτιμή, εφόσον

$$\begin{bmatrix} \lambda I_n - A \\ C \end{bmatrix} \mathbf{v} = 0$$

που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι το σύστημα $\Sigma_o(A, Q)$ είναι ανιχνεύσιμο. $\square$

2.8 Η έμμεση μέθοδος Lyapunov

Έστω το σύστημα $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και D χωρίο (ανοικτό συνεκτικό υποσύνολο) του $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι $\mathbf{x}^* = \mathbf{0} \in D$ και $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, δηλ. ότι $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι σημείο ισορροπίας. Έστω $\mathbf{x} \in D$. Από το θεώρημα μέσης τιμής:

$$f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{0}) + \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z})\mathbf{x}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

όπου $\mathbf{z}$ σημείο που κείται στο ευθύγραμμο τμήμα του ενώνει τα σημεία $\mathbf{x}$ και $\mathbf{0}$. Υποθέτουμε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο αυτά σημεία κείται εξ' ολοκλήρου στο D . Αυτό συμβαίνει για παράδειγμα (για κάθε $\mathbf{x} \in D$) αν το σύνολο D είναι κυρτό. Εφόσον $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ μπορούμε να γράψουμε:

$$f_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z})\mathbf{x} = \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0})\mathbf{x} + \left[\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z}) - \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) \right] \mathbf{x}$$

Ισοδύναμα

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

όπου

$$A = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}), \quad g_i(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z}) - \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) \right] \mathbf{x}$$

και οι συναρτήσεις $g_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, n$ είναι οι γραμμές του διανύσματος $\mathbf{g}(\mathbf{x})$. Η συνάρτηση $g_i(\mathbf{x})$ φράσσεται ως:

$$|g_i(\mathbf{x})| \leq \left\| \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{z}) - \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}) \right\| \|\mathbf{x}\|$$

Λόγω συνέχειας της συνάρτησης $[\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}]$ (η συνάρτηση $\mathbf{f}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη):

$$\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \text{ καθώς } \|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$$

Η παραπάνω ιδιότητα υπονοεί ότι σε μία γειτονιά (αρκούντως μικρής ακτίνας) γύρω από το σημείο ισορροπίας (εδώ $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ χωρίς βλάβη γενικότητας) ίσως να μπορούμε να προσεγγίσουμε το μη γραμμικό σύστημα: $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ από το γραμμικοποιημένο σύστημα: $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, υπό την έννοια ότι η τροχιά του μη-γραμμικού συστήματος στην περιοχή αυτή μπορεί να προσεγγίζεται με ακρίβεια από την τροχιά του γραμμικοποιημένου συστήματος και επομένως οι ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας του μη-γραμμικού συστήματος να αντιστοιχούν (τουλάχιστον τοπικά) με αυτές του γραμμικοποιημένου συστήματος. Όπως θα δούμε στην συνέχεια η διαίσθηση αυτή είναι σωστή μόνο κάτω από ορισμένες συνθήκες και αποτελεί την βάση της λεγόμενης έμμεσης μεθόδου Lyapunov (Lyapunov's indirect method).

Θεώρημα (ασυμπτωτικής ευστάθειας): Έστω $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ σημείο ισορροπίας του μη-γραμμικού συστήματος $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και D γειτονιά του $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Έστω

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

Τότε, αν $\text{Re} \lambda_i < 0$ για κάθε $\lambda_i \in \sigma(A)$, το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Απόδειξη: Έστω A πίνακας Hurwitz. Τότε, από προηγούμενο Θεώρημα γνωρίζουμε ότι για κάθε $Q = Q^T \succ 0$ η (μοναδική) λύση της εξίσωσης Lyapunov: $A^T P + PA + Q = 0$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας P . Έστω $V(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$ υποψήφια συνάρτηση Lyapunov για το μη γραμμικό σύστημα. Η παράγωγος της V κατά μήκος της τροχιάς του συστήματος είναι:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x}^T P \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{f}^T(\mathbf{x}) P \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T P [A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})] + [\mathbf{x}^T A^T + \mathbf{g}^T(\mathbf{x})] P \mathbf{x} \\ &= \mathbf{x}^T (PA + A^T P) \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T P \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &= -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T P \mathbf{g}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος $(-\mathbf{x}^T Q \mathbf{x})$ στο δεξιό μέλος της εξίσωσης είναι αρνητικά ορισμένη συνάρτηση και ο δεύτερος $(2\mathbf{x}^T P \mathbf{g}(\mathbf{x}))$ μπορεί να έχει θετικό ή αρνητικό πρόσημο. Η συνάρτηση $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ικανοποιεί:

$$\frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \rightarrow 0 \text{ καθώς } \|\mathbf{x}\| \rightarrow 0$$

Επομένως, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:

$$0 < \|\mathbf{x}\| < \delta \Rightarrow 0 < \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| < \epsilon\|\mathbf{x}\|$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\dot{V}(\mathbf{x}) &= -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + 2\mathbf{x}^T P \mathbf{g}(\mathbf{x}) \\ &< -\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + 2\epsilon\|P\|\|\mathbf{x}\|^2 \quad \text{για κάθε } 0 < \|\mathbf{x}\| < \delta \\ &\leq -\lambda_{\min}(Q)\|\mathbf{x}\|^2 + 2\epsilon\|P\|\|\mathbf{x}\|^2 \quad \text{για κάθε } 0 < \|\mathbf{x}\| < \delta \\ &= -(\lambda_{\min}(Q)\|\mathbf{x}\|^2 - 2\epsilon\|P\|\|\mathbf{x}\|^2) \quad \text{για κάθε } 0 < \|\mathbf{x}\| < \delta\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $0 < \epsilon < \lambda_{\min}(Q)/(2\|P\|)$, η συναρτηση $\dot{V}(\mathbf{x})$ είναι αρνητικά ορισμένη και το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. $\square$

Θεώρημα (αστάθειας): Έστω $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ σημείο ισορροπίας του μη-γραμμικού συστήματος $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ όπου $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και D γειτονιά του $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Έστω

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{0}}$$

Τότε, αν $\operatorname{Re} \lambda_i > 0$ για (τουλάχιστον) μία ιδιοτιμή $\lambda_i \in \sigma(A)$, το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασταθές.

Απόδειξη: Υποθέτουμε αρχικά (για απλούστευση της απόδειξης) ότι ο πίνακας A δεν έχει ιδιοτιμές στον άξονα των φανταστικών. Τότε, Υπάρχει πίνακας $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ τέτοιος ώστε:

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$$

όπου A_1 και A_2 πίνακες Hurwitz. Έστω

$$\mathbf{z} = T\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

όπου ο διαχωρισμός του διανύσματος $\mathbf{z}$ στα διανύσματα $\mathbf{z}_1$ και $\mathbf{z}_2$ είναι συμβατός με τις διαστάσεις των πινάκων A_1 και A_2 , αντίστοιχα. Έστω η αλλαγή μεταβλητών: $\mathbf{z} = T\mathbf{x}$. Τότε

$$\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} \mathbf{z}'_1 \\ \mathbf{z}'_2 \end{bmatrix} = T\mathbf{x}' = T(A\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})) = TAT^{-1}\mathbf{z} + T\mathbf{g}(T^{-1}\mathbf{z}) = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{z}) \\ g_2(\mathbf{z}) \end{bmatrix}$$

όπου

$$\begin{bmatrix} g_1(\mathbf{z}) \\ g_2(\mathbf{z}) \end{bmatrix} = T\mathbf{g}(\mathbf{x}) = T\mathbf{g}(T^{-1}\mathbf{z})$$

Επομένως

$$\mathbf{z}'_1 = -A_1\mathbf{z}_1 + g_1(\mathbf{z}), \quad \mathbf{z}'_2 = A_2\mathbf{z}_2 + g_2(\mathbf{z})$$

και άρα:

$$\|\mathbf{g}_i(\mathbf{z})\| \leq \left\| \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{z}) \\ g_2(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \right\| = \|T\mathbf{g}(\mathbf{x})\| \leq \|T\| \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|, \quad i = 1, 2$$

Απο προηγούμενη ανάλυση, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| < \epsilon\|\mathbf{x}\| \quad \text{για κάθε } \|\mathbf{x}\| < \delta, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$$

Άρα για $i = 1, 2$

$$\|\mathbf{g}_i(\mathbf{z})\| \leq \|T\| \|\mathbf{g}(\mathbf{x})\| < \epsilon\|T\| \|\mathbf{x}\| = \epsilon\|T\| \|T^{-1}\mathbf{z}\| \leq \epsilon\|T\| \|T^{-1}\| \|\mathbf{z}\| = \epsilon\kappa(T) \|\mathbf{z}\|$$

για κάθε

$$\|\mathbf{x}\| < \delta, \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \|T^{-1}\mathbf{z}\| < \delta, T^{-1}\mathbf{z} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \|T^{-1}\|\|\mathbf{z}\| < \delta, \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \|\mathbf{z}\| < \delta\|T^{-1}\|^{-1}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$$

Θέτοντας $\hat{\epsilon} := \epsilon\kappa(T)$ και $\hat{\delta} := \delta\|T^{-1}\|^{-1}$ συμπεραίνουμε ότι για κάθε $\hat{\epsilon} > 0$ υπάρχει $\hat{\delta} = \hat{\delta}(\hat{\epsilon}) > 0$ τέτοιο ώστε:

$$\|\mathbf{g}_i(\mathbf{z})\| < \hat{\epsilon}\|\mathbf{z}\| \text{ για κάθε } \|\mathbf{z}\| < \hat{\delta}, \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$$

όπου $i = 1, 2$. Το σημείο $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ είναι σημείο ισορροπίας του μη γραμμικού συστήματος εκφρασμένου στις νέες ($\mathbf{z}$) συντεταγμένες. Επίσης, εφόσον $\det(T) \neq 0$, κάθε συμπέρασμα ως προς τις ιδιότητες ευστάθειας του σημείου $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ (στις νέες συντεταγμένες) αυτομάτως αντιστοιχεί στο ίδιο συμπέρασμα ως προς τις ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (στις αρχικές συντεταγμένες).

Θα αποδείξουμε αστάθεια του σημείου ισορροπίας $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Chataev: Έστω Q_1 και Q_2 συμμετρικοί, θετικά ορισμένοι πίνακες με διαστάσεις ίσες με αυτές των A_1 και A_2 , αντίστοιχα. Έστω P_1 και P_2 οι (μοναδικές) λύσεις των εξισώσεων Lyapunov:

$$P_i A_i + A_i^T P_i + Q_i = 0, \quad i = 1, 2$$

Εφόσον A_1 και A_2 πίνακες Hurwitz έχουμε $P_1 = P_1^T \succ 0$ και $P_2 = P_2^T \succ 0$. Έστω η συνάρτηση

$$V(\mathbf{z}) = \mathbf{z}_1^T P_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{z}_2^T P_2 \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1^T & \mathbf{z}_2^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & -P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_1 \\ \mathbf{z}_2 \end{bmatrix}$$

Στον υπόχωρο $\mathbf{z}_2 = \mathbf{0}$, $V(\mathbf{z}) > 0$ σε σημεία αυθαίρετα κοντά στο σημείο $\mathbf{0}$. Έστω

$$U = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{z}\| \leq \hat{\delta} \text{ και } V(\mathbf{z}) > 0\}$$

Για κάθε $\mathbf{z} \in U$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\mathbf{z}) &= (\mathbf{z}_1')^T P_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T P_1 \mathbf{z}_1' - (\mathbf{z}_2')^T P_2 \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_2^T P_2 \mathbf{z}_2' \\ &= (-\mathbf{z}_1^T A_1^T + \mathbf{g}_1^T(\mathbf{z})) P_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_1^T P_1 (-A_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{g}_1(\mathbf{z})) - (\mathbf{z}_2^T A_2^T + \mathbf{g}_2^T(\mathbf{z})) P_2 \mathbf{z}_2 - \mathbf{z}_2^T P_2 (A_2 \mathbf{z}_2 + \mathbf{g}_2(\mathbf{z})) \\ &= -\mathbf{z}_1^T (P_1 A_1 + A_1^T P_1) \mathbf{z}_1 + 2\mathbf{z}_1^T P_1 \mathbf{g}_1(\mathbf{z}) - \mathbf{z}_2^T (P_2 A_2 + A_2^T P_2) \mathbf{z}_2 - 2\mathbf{z}_2^T P_2 \mathbf{g}_2(\mathbf{z}) \\ &= \mathbf{z}_1^T Q_1 \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2^T Q_2 \mathbf{z}_2 + 2\mathbf{z}^T \begin{bmatrix} P_1 \mathbf{g}_1(\mathbf{z}) \\ -P_2 \mathbf{g}_2(\mathbf{z}) \end{bmatrix} \\ &\geq \lambda_{\min}(Q_1) \|\mathbf{z}_1\|^2 + \lambda_{\min}(Q_2) \|\mathbf{z}_2\|^2 - 2\|\mathbf{z}\| \sqrt{\|P_1\|^2 \|\mathbf{g}_1(\mathbf{z})\|^2 + \|P_2\|^2 \|\mathbf{g}_2(\mathbf{z})\|^2} \end{aligned}$$

Θέτοντας

$$\alpha := \min\{\lambda_{\min}(Q_1), \lambda_{\min}(Q_2)\}$$

έχουμε:

$$\lambda_{\min}(Q_1) \|\mathbf{z}_1\|^2 + \lambda_{\min}(Q_2) \|\mathbf{z}_2\|^2 \geq \alpha \|\mathbf{z}_1\|^2 + \alpha \|\mathbf{z}_2\|^2 = \alpha (\|\mathbf{z}_1\|^2 + \|\mathbf{z}_2\|^2) = \alpha \|\mathbf{z}\|^2$$

Επίσης, θέτοντας

$$\beta = \max\{\|P_1\|, \|P_2\|\}$$

έχουμε

$$\|P_1\|^2 \|\mathbf{g}_1(\mathbf{z})\|^2 + \|P_2\|^2 \|\mathbf{g}_2(\mathbf{z})\|^2 \leq \beta^2 \|\mathbf{g}_1(\mathbf{z})\|^2 + \beta^2 \|\mathbf{g}_2(\mathbf{z})\|^2 < 2\beta^2 \hat{\epsilon}^2 \|\mathbf{z}\|^2$$

οπότε

$$2\|\mathbf{z}\| \sqrt{\|P_1\|^2 \|\mathbf{g}_1(\mathbf{z})\|^2 + \|P_2\|^2 \|\mathbf{g}_2(\mathbf{z})\|^2} < 2\sqrt{2}\beta\hat{\epsilon}\|\mathbf{z}\|^2$$

και

$$\dot{V}(\mathbf{z}) > (\alpha - 2\sqrt{2}\beta\hat{\epsilon}) \|\mathbf{z}\|^2$$

Επιλέγοντας:

$$\hat{\epsilon} < \frac{\alpha}{2\sqrt{2}\beta}$$

έχουμε ότι $\dot{V}(\mathbf{z}) > 0$ για $z \in U$ και επομένως από το Θεώρημα Chataev το σημείο ισορροπίας $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ είναι ασταθές. $\square$

Παράδειγμα: Εξετάζουμε το μαθηματικό εκχρεμές με τριβή, του οποίου οι εξισώσεις είναι:

$$x_1' = x_2, \quad x_2' = -a \sin x_1 - bx_2, \quad a > 0, b > 0$$

Υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας: $(x_1, x_2) = (0, 0)$ και $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$. Ο πίνακας Jacobian του συστήματος είναι:

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a \cos x_1 & -b \end{bmatrix}$$

Στο σημείο ισορροπίας $(x_1, x_2) = (0, 0)$:

$$A_1 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_1, x_2) = (0, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας A_1 έχει ιδιοτιμές:

$$\phi_{A_1}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ a & \lambda + b \end{bmatrix} = \lambda^2 + b\lambda + a = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a}$$

Επομένως $\text{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2$, και το σημείο ισορροπίας είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Στο σημείο ισορροπίας $(x_1, x_2) = (\pi, 0)$,

$$A_2 = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(x_1, x_2) = (\pi, 0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -b \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας A_2 έχει ιδιοτιμές:

$$\phi_{A_2}(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -a & \lambda + b \end{bmatrix} = \lambda^2 + b\lambda - a = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 4a}$$

Επομένως, μία ιδιοτιμή έχει θετικό πραγματικό μέρος και το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές.

2.9 Μη-γραμμικά συστήματα ανάδρασης

Έστω μη-γραμμικό σύστημα της μορφής

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{g}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (*)$$

όπου $\mathbf{u}(t)$ είναι η συνάρτηση ελέγχου (υπό σχεδίαση) και $\mathbf{g} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$). Από τον ορισμό συμπεραίνουμε ότι το σύστημα ανοικτού βρόγχου $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{0})$ έχει σημείο ισορροπίας στο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$. Το πρόβλημα που εξετάζουμε είναι το εξής: Κάτω από ποιές συνθήκες υπάρχει ανάδραση καταστάσεων $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$, $\mathbf{k}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, που να σταθεροποιεί το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$, δηλαδή τέτοια ώστε το σημείο ισορροπίας $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ του συστήματος κλειστού βρόγχου: $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x}))$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Ορισμός: Το σύστημα (*) είναι $\mathcal{C}^1$ -σταθεροποιήσιμο αν υπάρχει $\mathbf{k} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ με $\mathbf{k}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ τέτοιο ώστε το σημείο $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ να είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας του συστήματος $\mathbf{x}' = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x}))$.

Το πρόβλημα της σταθεροποίησης του συστήματος (*) συνδέεται άμεσα με το πρόβλημα της σταθεροποίησης της γραμμικοποίησης του συστήματος. Έστω το γραμμικοποιημένο σύστημα $\Sigma_i(A, B) : \mathbf{x}' = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$, όπου

$$A = (D_1\mathbf{g})(0, 0) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(0, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B = (D_2\mathbf{g})(0, 0) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Τότε έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα: Το σύστημα (*) είναι $\mathcal{C}^1$ -σταθεροποιήσιμο αν η γραμμικοποίηση του $\Sigma_i(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμη (δηλαδή υπάρχει $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ τέτοιος ώστε ο πίνακας $A + BF$ να είναι Hurwitz).

Απόδειξη: Έστω ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα $\Sigma_i(A, B)$ είναι σταθεροποιήσιμο. Τότε υπάρχει $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, τέτοιος ώστε ο πίνακας $A + BF$ να είναι Hurwitz. Εφαρμόζοντας την (γραμμική) ανάδραση $\mathbf{u} = F\mathbf{x}$ στο (μή-γραμμικό) σύστημα (*), έχουμε

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \text{όπου } \mathbf{f}(\mathbf{x}) := \mathbf{g}(\mathbf{x}, F\mathbf{x})$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας

$$(D\mathbf{f})(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} (D_1\mathbf{g})(0, 0) & (D_2\mathbf{g})(0, 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix} = (D_1\mathbf{g})(0, 0) + (D_2\mathbf{g})(0, 0)F = A + BF$$

Από την έμμεση μέθοδο Lyapunov (Θεώρημα ασυμπτωτικής ευστάθειας) συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές σημείο ισορροπίας για το σύστημα ανάδρασης. $\square$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή του παραπάνω Θεωρήματος δεν ισχύει: Αν το γραμμικοποιημένο σύστημα δεν είναι σταθεροποιήσιμο, αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι το μή-γραμμικό σύστημα δεν είναι $\mathcal{C}^1$ -σταθεροποιήσιμο:

Παράδειγμα: Έστω το σύστημα:

$$x' = g(x, u) = u(t)x^2(t), \quad x(t) \in \mathbb{R}, \quad u(t) \in \mathbb{R}$$

Το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad A = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = 2xu|_{(0,0)} = 0, \quad B = \frac{\partial g}{\partial u}(0, 0) = x^2|_{(0,0)} = 0$$

Άρα το γραμμικοποιημένο σύστημα: $x'(t) = 0$ δεν είναι σταθεροποιήσιμο. Όπως θέτοντας $u(t) = -x(t)$, το μη-γραμμικό σύστημα σταθεροποιείται, δηλαδή το σημείο ισορροπίας $x^* = 0$ του συστήματος κλειστού βρόγχου $x'(t) = -x^3(t)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Θεώρημα: Έστω ότι το γραμμικοποιημένο σύστημα

$$\Sigma_i(A, B) := \Sigma_i \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(0, 0), \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(0, 0) \right)$$

του μη-γραμμικού συστήματος (*) έχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ με θετικό πραγματικό μέρος. Τότε το σύστημα (*) δεν είναι $\mathcal{C}^1$ -σταθεροποιήσιμο.

Απόδειξη: Έστω $\Sigma_i(A, B)$ το γραμμικοποιημένο σύστημα όπως ορίστηκε παραπάνω. Από την υπόθεση υπάρχει ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$ με $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. Έστω $\mathbf{k}$ συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση $\mathbf{k} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ με $\mathbf{k}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Θέτοντας $F = (D\mathbf{k})(\mathbf{0}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ και ορίζοντας $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ως $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $\mathbf{u} = \mathbf{k}(\mathbf{x})$, έχουμε

$$(D\mathbf{f})(\mathbf{x}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{u})(D\mathbf{k})(\mathbf{x})$$

και επομένως

$$(Df)(\mathbf{0}) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{0}, \mathbf{0})(Dk)(\mathbf{0}) = A + BF$$

Εφόσον $\lambda \in \sigma(A)$, λ μη-ελέγξιμη ιδιοτιμή του πίνακα A μέσω του πίνακα B , τότε $\lambda \in \sigma(A + BF)$ για κάθε $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$, άρα και για τον συγκεκριμένο F που επιλέξαμε. Από την έμμεση μέθοδο Lyapunov (Θεώρημα αστάθειας) συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας για το σύστημα ανάδρασης $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{k}(\mathbf{x}))$. Άρα το (*) δεν είναι $\mathcal{C}^1$ -σταθεροποιήσιμο. $\square$

References:

- F. Bullo, Contraction Theory of Dynamical Systems, ed. 1.2, Kindle Direct Publishing, 2024, ISBN: 979-8836646806.
- T.A. Burton, Stability by fixed point-theory of functional differential equations, Dover Publications, New York, 2006.
- H.K. Khalil, Nonlinear Systems, 3rd Edition, Prentice Hall, New Jersey, USA, 2002.
- H. Logemann and E.P. Ryan, Ordinary differential equations: Analysis, Qualitative Theory and Control, Springer-Verlag, London 2014.
- G. Meinsma and A. van der Schaft, A Course on Optimal Control, Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology (SUMAT), 2023.
- J-J.E. Slotine and W. Li, Applied Nonlinear Control, Prentice Hall, New Jersey, USA 1991.

Γ. Χαλικιάς, 18-12-2025