ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, ΕΚΠΑ

Δυναμικά Συστήματα (739) - Σεπτέμβρης 2024

Έχετε ελεύθερη επιλογή θεμάτων. Ο βαθμός σας υπολογίζεται ως $\min(B, 10)$ *όπου* B *το άθροισμα των βαθμών που θα συγκεντρώσετε. Καλή Επιτυχία!*

Θέμα 1: Έστω το σύστημα: $x_1' = \frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_2}$, $x_2' = -\frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_1}$, όπου $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ κλάσης $\mathcal{C}^2$. Έστω (x_1^*, x_2^*) σημείο ισορροπίας του συστήματος με $\det J(x_1^*, x_2^*) \neq 0$, όπου $J(x_1^*, x_2^*)$ ο πίνακας Jacobian του συστήματος στο σημείο (x_1^*, x_2^*). Δείξτε ότι το (x_1^*, x_2^*) είναι σαγματικό σημείο η κέντρο και βρείτε συνθήκες που αντιστοιχούν σε κάθε μία από αυτές τις δύο περιπτώσεις. Ποιές είναι οι ιδιότητες ευστάθειας του σημείου ισορροπίας σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις; **[1 βαθμός]**

Λύση: Ο πίνακας Jacobian είναι:

$$J(x_1^*, x_2^*) = \begin{bmatrix} \frac{\partial H(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 H(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2} \\ -\frac{\partial^2 H(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial H(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} H_{12} & H_{22} \\ -H_{11} & -H_{12} \end{bmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\det(\lambda I_2 - J(x_1^*, x_2^*)) = \det \begin{bmatrix} \lambda - H_{12} & -H_{22} \\ H_{11} & \lambda + H_{12} \end{bmatrix} = \lambda^2 - H_{12}^2 + H_{11}H_{22}$$

και επομένως οι ιδιοτιμές είναι ρίζες της εξίσωσης:

$$\lambda^2 = H_{12}^2 - H_{11}H_{22}$$

Εφόσον $\lambda \neq 0$ έχουμε τις περιπτώσεις:

(α) $H_{12}^2 - H_{11}H_{22} > 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{H_{12}^2 - H_{11}H_{22}}$.

(β) $H_{12}^2 - H_{11}H_{22} < 0 \Rightarrow \lambda = \pm i\sqrt{H_{11}H_{22} - H_{12}^2}$.

Στην περίπτωση (α) έχουμε πραγματικές ιδιοτιμές με αντίθετο πρόσημο (σάγμα) ενώ στην περίπτωση (β) έχουμε φανταστικές ιδιοτιμές (κέντρο). Το (x_1^*, x_2^*) στην περίπτωση (α) είναι ασταθές σημείο ισορροπίας και στην περίπτωση (β) ευσταθές κατά Lyapunov (αλλά όχι ασυμπτωτικά).

Θέμα 2:

(i) Δίνεται το σύστημα: $y'(t) = y^2(t)$, $t \geq 0$, $y(0) = 1$. Να βρεθεί η λύση του συστήματος, $\phi(t)$, και το μέγιστο διάστημα $J = [0,\ \alpha^*)$ στο οποίο ορίζεται. **[0,5 βαθμοί]**

(ii) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα $J_1 = [0,\ t_1^*]$ στο οποίο το Θεώρημα Picard-Lindelof εγγυάται ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης για το σύστημα στο (i). **[1 βαθμός]**

(iii) Βρείτε τον πίνακα e^{At}, αν

$$A = \begin{pmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{pmatrix}$$

και όπου $\sigma \in \mathbb{R}$ και $\omega \in \mathbb{R}$. **[1 βαθμός]**

Λύση: (i) $y(t) = \frac{1}{1-t}$, $J = [0, 1)$. (ii) $\alpha = \max\{\frac{b}{(1+b)^2} : b > 0\} = \frac{1}{4}$, $J_1 = [0, \frac{1}{4}]$.

(iii) Υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(\sigma+i\omega)t} & 0 \\ 0 & e^{(\sigma-i\omega)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}^{-1}$$

Επομένως

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{(\sigma+i\omega)t} + e^{(\sigma-i\omega)t} & -ie^{(\sigma+i\omega)t} + ie^{(\sigma-i\omega)t} \\ ie^{(\sigma+i\omega)t} - ie^{(\sigma-i\omega)t} & e^{(\sigma+i\omega)t} + e^{(\sigma-i\omega)t} \end{bmatrix} = e^{\sigma t} \begin{bmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{bmatrix}$$

μετά από λίγες πράξεις.

Θέμα 3: Έστω το σύστημα: $x_1' = x_1 - x_2 - x_1^3$, $x_2' = x_1 + x_2 - x_2^3$.

(i) Εφαρμόζοντας αλλαγή μεταβλητών $(x_1, x_2) \to (r, \theta)$, όπου $x_1 = r\cos\theta$ και $x_2 = r\sin\theta$, δείξτε ότι στο σύστημα έχει μοναδικό σημείο ισορροπίας $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο $\mathcal{D} = \{(r, \theta) : \frac{1}{3} \leq r \leq 2\}$ είναι θετικά αναλλοίωτο. *Υπενθύμιση:* Τριγωνομετρικές ταυτότητες: (α) $4(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = 3 + \cos 4\theta$, (β) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, (γ) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$. **[1 βαθμός]**

(ii) Γραμμικοποιώντας το σύστημα γύρω απο το σημείο ισορροπίας, εξετάστε τις τοπικές ιδιότητες ευστάθειας. **[1 βαθμός]**

Λύση: (i) Προφανώς το $(0, 0)$ είναι σημείο ισορροπίας. Σε πολικές συντεταγμένες οι εξισώσεις γράφονται:

$$r'\cos\theta - r\sin\theta \cdot \theta' = r\cos\theta - r\sin\theta - r^3\cos^3\theta \quad (1)$$

$$r'\sin\theta + r\cos\theta \cdot \theta' = r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\sin^3\theta \quad (2)$$

Έχουμε:

$$(1)\cos\theta + (2)\sin\theta: \ r' = r - \frac{1}{4}r^3(3 + \cos 4\theta) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{4}r^2(3 + \cos 4\theta) = 0$$

αν $r \neq 0$. Επίσης:

$$(1)\sin\theta - (2)\cos\theta: \ \theta' = 1 - \frac{r^2}{4}\sin 4\theta = 0 \Rightarrow \frac{r^2}{4}\sin 4\theta = 1$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε την εξίσωση:

$$3 + \cos 4\theta + \sin 4\theta = 0$$

που δεν έχει λύση. Άρα το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το $(x_1^*, x_2^*) = (0, 0)$.

Για $r = \frac{1}{3}$:

$$r' = \frac{1}{3}\left[1 - \frac{1}{36}(3 + \cos 4\theta)\right] > 0$$

Για $r = 2$:

$$r' = -2(2 + \cos 4\theta) < 0$$

Επομένως: $x(0) \in \mathcal{D} \Rightarrow x(t) \in \mathcal{D}$ για κάθε $t \geq 0$.

(ιι) Ο πίνακας Jacobian:

$$J(0, 0) = \left.\begin{bmatrix} 1 - 3x_1^2 & -1 \\ 1 & 1 - 3x_2^2 \end{bmatrix}\right|_{(x_1, x_2) = (0, 0)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\det(\lambda I_2 - J(0, 0)) = (\lambda - 1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \pm i$$

και το σημείο ισορροπίας $(0, 0)$ είναι ασταθής εστία.

Θέμα 4: Έστω γραμμικό σύστημα ελέγχου $\Sigma_i(A,B)$, $x' = Ax + Bu$, $x(0) = \xi \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Hurwitz και $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Δείξτε ότι:

(i) Αν $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ συνεχής και φραγμένη, τότε $x(t)$ φραγμένη στο $[0,\infty)$. **[1 βαθμός]**

(ii) Αν επιπλέον $u(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$, τότε $x(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$. **[1 βαθμός]**

Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε (χωρίς απόδειξη) ότι αν A πίνακας Hurwitz, τότε υπάρχουν $M \geq 1$ και $\alpha > 0$ ώστε $\|e^{At}\| \leq Me^{-\alpha t}$, $t \geq 0$, όπου $\|e^{At}\|$ η φασματική νόρμα του πίνακα e^{At}, δηλ. $\|e^{At}\| = \max\{\sqrt{y^T e^{A^T t} e^{At} y} : y^T y = 1\}$.

Λύση: (α) Εφόσον u συνεχής στο $[0,\infty)$, τότε γιά $t \geq 0$,

$$x(t) = e^{At}\xi + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$$

συνεχώς διαφορίσιμη. Εφόσον A Hurwitz, υπάρχουν $M \geq 1$ και $\alpha > 0$ τέτοια ώστε

$$\left\|e^{At}\right\| \leq Me^{-\alpha t}, \ \ \forall t \geq 0$$

Επομένως

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|\xi\| + M\|B\| \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\| \int_0^t e^{-\alpha(t-s)}ds \ \ \forall t \geq 0$$

Θέτοντας $\gamma = M\|B\|/\alpha$, έχουμε:

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|\xi\| + \gamma \sup_{s\in[0,t]} \|u(s)\| \ \ \forall t \geq 0$$

από όπου προκύπτει το (α).

(β) Υποθέτουμε επιπλέον ότι $u(t) \to 0$ καθώς $t \to \infty$. Ορίζουμε

$$U := \sup\{\|u(s)\| : s \in [0,\infty)\} \ \ \text{και} \ \ U_t := \sup\{\|u(s)\| : s \in [t/2,\infty)\}$$

Έχουμε: $U < \infty$ και $U_t \to 0$ καθώς $t \to \infty$. Γράφουμε:

$$\int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds = \int_0^{t/2} e^{A(t-s)}Bu(s)ds + \int_{t/2}^t e^{A(t-s)}Bu(s)ds$$

και επομένως έχουμε την εκτίμηση:

$$\|x(t)\| \leq Me^{-\alpha t}\|\xi\| + \gamma e^{-\alpha t/2}U + \gamma U_t \ \ \forall t \geq 0$$

και επομένως

$$\|x(t)\| \to 0 \ \ \text{καθώς} \ \ t \to \infty$$

που αποδεικνύει το (β). □

Θέμα 5: Έστω το σύστημα:

$$x' = f(x), \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 \end{bmatrix}$$

(α) Δείξτε ότι $x^* = 0$ είναι το μοναδικό σημείο ισορροπίας. Βρείτε την αναλυτική λύση του συστήματος και σχεδιάστε το διάγραμμα φάσης. Συγκρίνετε με το διάγραμμα φάσης του γραμμικοποιημένου συστήματος $y' = Df(0)y$ όπου $Df(0)$ είναι ο πίνακας Jacobian στο σημείο $x^* = 0$. **[1 βαθμός]**

(β) Έστω $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ η συνάρτηση:

$$h(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 + \frac{1}{3}x_1^2 \end{bmatrix}$$

Δείξτε ότι υπάρχει αντίστροφη συνάρτηση $h^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ συνεχής στο $\mathbb{R}^2$. Δείξτε επίσης ότι η h μετασχηματίζει το σύστημα $x' = f(x)$ στο γραμμικό σύστημα $y' = Df(0)y$ υπό την έννοια ότι αν $y = h(x)$ τότε $y' = Df(0)y$. **[1 βαθμός]**

Λύση: (α) $x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$. Λύνοντας την πρώτη εξίσωση: $x_1(t) = x_1(0)e^{-t}$. Επομένως

$$x_2' - x_2 = x_1^2(0)e^{-2t}$$

Γενική λύση ομογενούς εξίσωσης: $x_2 = c_1e^t$. Ειδική λύση μη ομογενούς: $x_2 = Ae^{-2t}$ και άρα:

$$-2Ae^{-2t} - Ae^{-2t} = x_1^2(0)e^{-2t} \Rightarrow A = -\frac{1}{3}x_1^2(0)$$

και επομένως

$$x_2(t) = c_1e^t - \frac{1}{3}x_1^2(0)e^{-2t}$$

Αρχική συνθήκη:

$$x_2(0) = c_1 - \frac{1}{3}x_1^2(0) \Rightarrow c_1 = x_2(0) + \frac{1}{3}x_1^2(0)$$

και έτσι

$$x_2(t) = \left(x_2(0) + \frac{1}{3}x_1^2(0)\right)e^t - \frac{1}{3}x_1^2(0)e^{-2t}$$

Παρατηρούμε οτι

$$x_2(0) = -\frac{1}{3}x_1^2(0) \Rightarrow x_2(t) = -\frac{1}{3}x_1^2(t)$$

για κάθε $t \geq 0$ και επομένως η παραβολή $x_2 = -\frac{1}{3}x_1^2$ είναι θετικά αναλλοίωτο σύνολο (όπως και ο άξονας $x_2 = 0$.

(β) Έχουμε

$$H^{-1}(y) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 - \frac{1}{3}y_1^2 \end{bmatrix}$$

που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$. Επίσης:

$$y' = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' + \frac{2}{3}x_1x_1' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_2 + x_1^2 + \frac{2}{3}x_1(-x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} y$$

Θέμα 6: Οι εξισώσεις του Euler για περιστρεφόμενο δορυφόρο γράφονται ως:

$$\begin{aligned} J_1\omega_1' &= (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 + u_1 \\ J_2\omega_2' &= (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 + u_2 \\ J_3\omega_3' &= (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 + u_3 \end{aligned}$$

όπου ω_i, $i = 1, 2, 3$, είναι οι γωνιακές ταχύτητες ως προς τους τρείς κύριους άξονες, u_i, $i = 1, 2, 3$, οι ροπές εισόδου και J_i, $i = 1, 2, 3$, θετικές σταθερές (ροπές αδράνειας ως προς τους κύριους άξονες).

(i) Δείξτε ότι αν $u_1 = u_2 = u_3 = 0$ το σημείο ισορροπίας $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (0, 0, 0)$ είναι ευσταθές κατά Lyapunov. Είναι και ασυμπτωτικά ευσταθές; *Υπόδειξη:* Χρησιμοποιείστε υποψήφια συνάρτηση Lyapunov: $V(\omega) = \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 + \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2$. **[1 βαθμός]**

(ii) Έστω ότι οι ροπές εισόδου διαμορφώνονται μέσω ανάδρασης, δηλ. $u_i = -k_i\omega_i$, $i = 1, 2, 3$, όπου k_i θετικές σταθερές. Δείξτε ότι σε αυτήν την περίπτωση το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. **[1 βαθμός]**

Λύση: (i) Το σημείο $\omega = 0$ είναι σημείο ισορροπίας. Έχουμε

$$V'(\omega) = J_1\omega_1\frac{J_2 - J_3}{J_1}\omega_2\omega_3 + J_2\omega_2\frac{J_3 - J_1}{J_2}\omega_1\omega_3 + J_3\omega_3\frac{J_1 - J_2}{J_3}\omega_1\omega_2$$

Άρα,

$$V'(\omega) = (J_2 - J_3 + J_3 - J_1 + J_1 - J_2)\omega_1\omega_2\omega_3 = 0$$

δηλ. $V(\omega) = c$. Το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές κατά Lyapunov αλλά όχι ασυμπτωτικά.

(ii) Με ανάδραση $u_i = -k_i\omega_i$ έχουμε:

$$V'(\omega) = J_1\omega_1\left(\frac{J_2 - J_3}{J_1}\omega_2\omega_3 - \frac{k_1\omega_1}{J_1}\right) + J_2\omega_2\left(\frac{J_3 - J_1}{J_2}\omega_1\omega_3 - \frac{k_2\omega_2}{J_2}\right) + J_3\omega_3\left(\frac{J_3 - J_1}{J_2}\omega_1\omega_2 - \frac{k_3\omega_3}{J_3}\right)$$

Αρα,

$$V'(\omega) = -k_1\omega_1^2 - k_2\omega_2^2 - k_3\omega_3^2 < 0$$

και το σημείο ισορροπίας $\omega = 0$ είναι ασψμπτωτικά ευσταθές (και μάλιστα ολικά εφόσον V ακτινικά μη-φραγμένη συνάρτηση).

Θέμα 7: Δίνεται το σύστημα:

$$x_1' = -x_1 + x_1 x_2, \ \ x_2' = -x_2$$

Δείξτε ότι το σημείο ισορροπίας $(0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. [Υπόδειξη: Δείξτε ότι $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$ είναι συνάρτηση Lyapunov]. Είναι το $(0,0)$ ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές; (δηλ. ισχύει ότι $\lim_{t\to\infty}(x_1(t), x_2(t)) = (0,0)$ για κάθε $(x_1(0), x_2(0)) \in \mathbb{R}^2$;) **[1 βαθμός]**

Λύση: Σημεία ισορροπίας: $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$, αρα $x^* = (0,0)$ μοναδικό σημείο ισορροπίας.

(α) Έχουμε: $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{2}\|x\|^2 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, Επίσης:

$$V'(x) = \frac{\partial V}{\partial x_1}x_1' + \frac{\partial V}{\partial x_2}x_2' = x_1(-x_1 + x_1 x_2) + x_2(-x_2) = -(x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2)$$

Η $-V'(x)$ είναι θετικά ορισμένη σε κάποια περιοχή του $x^* = (0,0)$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_1^2 x_2 &\geq x_1^2 + x_2^2 - |x_1| \cdot |x_1| \cdot |x_2| \geq x_1^2 + x_2^2 - \|x\| \cdot |x_1| \cdot |x_2| \\ &= \begin{bmatrix} |x_1| & |x_2| \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\|x\|}{2} \\ -\frac{\|x\|}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_2| \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ο πίνακας είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $1 - \frac{\|x\|^2}{4} > 0 \Leftrightarrow \|x\| < 2$. Άρα $V'(x) < 0$ για κάθε $x \in B_2(0) \setminus \{0\}$ και $x^* = (0,0)$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές.

Το σύστημα λύνεται αναλυτικά:

$$x_2' = -x_2 \Rightarrow x_2(t) = e^{-t}x_2(0) \Rightarrow x_1' = -x_1(1 - x_2(0)e^{-t}) \Rightarrow \int \frac{dx_1}{x_1} = \ln|x_1| = -t - x_2(0)e^{-t} + c$$

Όταν $t = 0$, $\ln|x_1(0)| = -x_2(0) + c$ και άρα $c = x_2(0) + \ln|x_1(0)|$. Επομένως,

$$\ln|x_1(0)| = -t - x_2(0)e^{-t} + x_2(0) + \ln|x_1(0)| \Rightarrow |x_1(t)| = |x_1(0)|e^{x_2(0)}e^{-t}e^{-x_2(0)e^{-t}} \to 0$$

καθώς $t \to +\infty$ για κάθε $x_1(0) \in \mathbb{R}$. Εφόσον έχουμε επίσης $x_2(t) \to 0$ καθώς $t \to +\infty$ για κάθε $x_2(0) \in \mathbb{R}$, το $x^* = (0,0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές. [Διαφορετικά, παρατηρούμε ότι η $V(x)$ είναι ακτινικά μη-φραγμένη].