

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Κ.Π.Α.
715. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΟΛΟΓΙΑ
19-06-2024

Δίνεται το ακόλουθο μοντέλο

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI + \gamma I \quad (1\alpha')$$

$$\frac{dI}{dt} = -\gamma I + \beta SI, \quad (1\beta')$$

όπου όλες οι παράμετροι είναι θετικές, με το αντίστοιχο πρόβλημα Cauchy:

$$\begin{aligned} & \text{Με δεδομένα } S_0, I_0 \geq 0, \text{ αναζητούμε διάστημα } \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \text{ με } 0 \in \mathcal{I} \text{ και} \\ & \text{συνάρτηση } (S, I): \mathcal{I} \rightarrow [0, \infty)^2, \text{ τέτοια ώστε η } (S, I) \text{ να ικανοποιεί τόσο} \\ & \text{το σύστημα εξισώσεων (1) στο } (\mathcal{I} \setminus \{0\})^\circ, \text{ όσο και την} \\ & (S(0), I(0)) = (S_0, I_0). \end{aligned} \quad (\Pi_1)$$

Θεωρούμε, επίσης, δεδομένη την ύπαρξη μοναδικής, ομαλής, μεγιστικής και συνεχώς εξαρτώμενης από τα αρχικά δεδομένα λύσης του (Π_1) .

- I. (1μ) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα ροών του (1).
- II. (1μ) Να αποδείξετε την ολικότητα της λύσης του (Π_1) .
- III. (1μ) Να βρείτε αδιαστατοποιημένη εκδοχή του (Π_1) , (Π_2) .
- IV. (1μ) Να απλοποιήσετε το (Π_2) σε ένα ισοδύναμο πρόβλημα, (Π_3) , μίας μόνο διαφορικής εξίσωσης.
- V. (1μ) Να βρείτε το/-α σημείο/-α ισορροπίας του (Π_3) .
- VI. (1μ) Να χαρακτηρίσετε την ευστάθεια του/-ων σημείου/-ων ισορροπίας του (Π_3) μέσω γραμμικοποίησης.
- VII.
 - i. (1μ) Να δείξετε ότι υπάρχει διακλάδωση σταθερής κατάστασης από από κάποιο σημείο ισορροπίας του (Π_3) και για κάποια συνθήκη των παραμέτρων.
 - ii. (1μ) Να κατασκευάσετε το αντίστοιχο διάγραμμα διακλάδωσης και να βρείτε τον τύπο της.
- VIII. (1μ) Να κατασκευάσετε την γραμμή φάσης του (Π_3) .
- IX. (1μ) Να χαρακτηρίσετε την ολική ευστάθεια του/-ων σημείου/-ων ισορροπίας του (Π_3) .