

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ II

Εξέταση Ιουνίου 2024

Θέμα 1^ο: Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

α) Είναι ο πίνακας A διαγωνίσιμος στο $\mathbb{C}$;

β) Να βρεθεί πολυώνυμο $\varphi(x) \in \mathbb{R}[x]$, τέτοιο ώστε $A^{-1} = \varphi(A)$.

γ) Έστω $B = A^{11} + 2048I_3$. Να βρεθεί το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του B .

Λύση: α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A ισούται με

$$\begin{aligned} \chi_A(x) &= \det \begin{pmatrix} -x & 0 & -2 \\ 1 & -x & -5 \\ 0 & 1 & -4-x \end{pmatrix} = -x^2(x+4) - 2 - 5x = -(x^3 + 4x^2 + 5x + 2) = \\ &= -(x^3 + x^2 + 3x^2 + 3x + 2x + 2) = -(x^2(x+1) + 3x(x+1) + 2(x+1)) = \\ &= -(x+1)(x^2 + 3x + 2) = -(x+1)^2(x+2) \text{ με ιδιοτιμές } -1 \text{ (διπλή) και } -2. \text{ Για να} \\ &\text{είναι διαγωνίσιμος ο } A \text{ θα πρέπει } \dim V_A(-1) = 2. \text{ Αλλά,} \end{aligned}$$

$$(A + I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ x + y - 5z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{C}. \text{ Επομένως ο } V_A(-1) \text{ παράγεται από το μη μηδενικό ιδιοδιάνυσμα}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ και συνεπώς } \dim V_A(-1) \neq 2, \text{ άρα ο } A \text{ δεν είναι διαγωνίσιμος στο } \mathbb{C} \text{ (και το } \mathbb{R}).$$

$$\begin{aligned} \text{β)} \chi_A(A) &= O_{3 \times 3} \Leftrightarrow -A^3 - 4A^2 - 5A - 2I_3 = O_{3 \times 3} \Leftrightarrow A(-A^2 - 4A - 5I_3) = 2I_3 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow A \left(-\frac{1}{2}A^2 - 2A - \frac{5}{2}I_3 \right) = I_3 \text{ και κατά συνέπεια } A^{-1} = \varphi(A), \text{ όπου} \end{aligned}$$

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - \frac{5}{2}.$$

γ) Εφόσον το $\chi_A(x) = -(x+1)^2(x+2)$, δηλαδή είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων, ο A τριγωνοποιείται, δηλαδή υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, τέτοιος

$$\begin{aligned} \text{ώστε } QAQ^{-1} &= \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = Q^{-1} \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} Q \Rightarrow A^{11} + 2048I_3 = \\ &= \left(Q^{-1} \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} Q \right)^{11} + 2048Q^{-1}Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{11} Q + 2048Q^{-1}Q = \\ &= Q^{-1} \begin{pmatrix} (-1)^{11} & * & * \\ 0 & (-1)^{11} & * \\ 0 & 0 & (-2)^{11} \end{pmatrix} Q + 2048Q^{-1}Q = \end{aligned}$$

$$= Q^{-1} \left(\begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 0 & -1 & * \\ 0 & 0 & -2048 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2048 & 0 & 0 \\ 0 & 2048 & 0 \\ 0 & 0 & 2048 \end{pmatrix} \right) Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} 2047 & * & * \\ 0 & 2047 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q.$$

Επειδή όμοιοι πίνακες έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο,

$$\chi_B(x) = \det \begin{pmatrix} 2047-x & * & * \\ 0 & 2047-x & * \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix} = -x(x-2047)^2. \quad \blacksquare$$

Θέμα 2°: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $A^* = -A$.

α) Δείξτε ότι κάθε ιδιοτιμή του A είναι της μορφής $\lambda \mathbf{i}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Δείξτε ότι ο πίνακας $I_n + A$ είναι αντιστρέψιμος.

γ) Δείξτε ότι ο πίνακας $U = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ είναι μοναδιαίος.

Λύση: α) Έστω $\mu = \kappa + \lambda \mathbf{i} \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A ($\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$) και $X \in \mathbb{C}^{n \times 1} \setminus \{0\}$ ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε έχουμε: $\mu \|X\|^2 = \mu \langle X, X \rangle = \langle \mu X, X \rangle = \langle AX, X \rangle = \langle X, A^* X \rangle = \langle X, -AX \rangle = \langle X, -\mu X \rangle = (-\mu) \langle X, X \rangle = -\bar{\mu} \langle X, X \rangle = -\bar{\mu} \|X\|^2$.

Εφόσον $X \neq 0 \Leftrightarrow \|X\| \neq 0$, έπεται ότι $\mu = -\bar{\mu} \Leftrightarrow \kappa = \operatorname{Re}(\mu) = \frac{\mu + \bar{\mu}}{2} = 0$. Άρα $\mu = \lambda \mathbf{i}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αν ο πίνακας $I_n + A$ δεν ήταν αντιστρέψιμος, τότε $0 = |I_n + A| = |A - (-1)I_n|$ και συνεπώς ο A θα είχε πραγματική ιδιοτιμή, το $-1 \neq \lambda \mathbf{i}$, άτοπο. Ομοίως αποδεικνύεται ότι και ο πίνακας $I_n - A = I_n - 1 \cdot A$ είναι αντιστρέψιμος.

γ) Ο A , άρα και ο $-A$ αντιμετατίθενται με τους πίνακες $I_n + A$ και $I_n - A$. Άρα αντιμετατίθενται με τους αντιστρώφους $(I_n + A)^{-1}$ και $(I_n - A)^{-1}$. Για παράδειγμα, $A(I_n + A)^{-1} = (I_n + A)^{-1}A \Leftrightarrow (I_n + A)A = A(I_n + A)$ και ομοίως $A(I_n - A)^{-1} = (I_n - A)^{-1}A \Leftrightarrow (I_n - A)A = A(I_n - A)$. Προφανώς ο I_n αντιμετατίθεται με οποιονδήποτε πίνακα και κατά συνέπεια όλοι οι πίνακες $I_n + A$, $(I_n + A)^{-1}$, $I_n - A$ και $(I_n - A)^{-1}$ αντιμετατίθενται ανά δύο. Έχουμε:

$$\begin{aligned} UU^* &= (I_n - A)(I_n + A)^{-1} ((I_n - A)(I_n + A)^{-1})^* = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} ((I_n + A)^{-1})^* \\ (I_n - A)^* &= (I_n - A)(I_n + A)^{-1} ((I_n + A)^*)^{-1} (I_n + A) = (I_n - A)(I_n + A)^{-1} (I_n - A)^{-1} \\ (I_n + A) &= (I_n - A)(I_n - A)^{-1} (I_n + A)^{-1} (I_n + A) = I_n I_n = I_n. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Θέμα 3°: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ μοναδιαίος και $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A .

α) Να δείξετε ότι $\lambda \neq 0$ και ότι το λ^{-1} είναι επίσης ιδιοτιμή του A .

β) Αν $\det(A) = 1$ και n περιττός, να δείξετε ότι το 1 είναι ιδιοτιμή του A .

Λύση: α) Επειδή ο A είναι μοναδιαίος πίνακας του $\mathbb{R}^{n \times n} \subseteq \mathbb{C}^{n \times n}$, διατηρεί τα μήκη των διανυσμάτων, δηλαδή $\|AX\| = \|X\|$, για κάθε $X \in \mathbb{C}^{n \times 1}$. Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του A και $X \in \mathbb{C}^{n \times 1} \neq 0$ αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Τότε αφενός $\|AX\| = \|X\|$ και αφετέρου $\|AX\| = \|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\|$. Επειδή $\|X\| \neq 0$, έπεται ότι $|\lambda| = 1 \neq 0$. Γνωρίζουμε ότι για έναν μη μηδενικό μιγαδικό λ ισχύει $\lambda^{-1} = \frac{\bar{\lambda}}{|\lambda|^2}$. Αν λοιπόν το λ είναι ιδιοτιμή

του A , τότε $\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$. Επειδή ο A είναι πραγματικός πίνακας, το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο $\chi_A(x)$ είναι πραγματικό, δηλαδή $\chi_A(x) \in \mathbb{R}[x]$. Γνωρίζουμε επίσης ότι αν ένα πραγματικό πολυώνυμο έχει ρίζα έναν μιγαδικό λ , τότε έχει ρίζα και τον συζυγή του

$\bar{\lambda}$ και μάλιστα με την ίδια πολλαπλότητα. Επομένως το $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$ είναι ρίζα του $\chi_A(x)$, δηλαδή ιδιοτιμή του A .

β) Αν το $\chi_A(x)$ είχε μόνον μιγαδικές ρίζες, αυτές χωρίζονται σε κ ζεύγη $(\lambda, \bar{\lambda}) = (\lambda, \lambda^{-1})$ με γινόμενο 1. Επομένως $\deg \chi_A(x) = 2\kappa = 11$, άτοπο. Επομένως το $\chi_A(x)$ έχει πραγματικές ρίζες λ με $|\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = \pm 1$. Αν παραλείψουμε το άρτιο πλήθος των μιγαδικών ριζών (αν υπάρχουν, θα είναι σε ζεύγη αντιστρόφων) παίρνουμε περιττό πλήθος ριζών της μορφής ± 1 . ($\deg \chi_A(x) = 11$). Αν τώρα όλες οι πραγματικές ρίζες ήταν ίσες με -1 , τότε το γινόμενο των ριζών του $\chi_A(x)$, δηλαδή των ιδιοτιμών του A θα ήταν ίσο με -1 . Αλλά το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός πίνακα ισούται με την ορίζουσά του. Άρα θα είχαμε $\det(A) = -1$, άτοπο. Επομένως ο A έχει μια ιδιοτιμή ίση με 1. ■

Θέμα 4^ο: Έστω $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ κανονικός πίνακας.

α) Αν $\langle X, Y \rangle = X^t \bar{Y}$ είναι το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο του $\mathbb{C}^{n \times 1}$, να δείξετε ότι $\langle AX, AY \rangle = \langle A^* X, A^* Y \rangle$, για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^{n \times 1}$.

β) Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του A , δείξτε ότι το $\bar{\lambda}$ είναι ιδιοτιμή του A^* και μάλιστα $V_A(\lambda) = V_{A^*}(\bar{\lambda}) \leq \mathbb{C}^{n \times 1}$, όπου $V_A(\lambda)$ και $V_{A^*}(\bar{\lambda})$ οι ιδιόχωροι των A και A^* , οι οποίοι αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ και $\bar{\lambda}$ των A και A^* αντίστοιχα.

Λύση: α) Εφόσον ο A είναι κανονικός, έχουμε $A^* A = A A^*$. Παρατηρούμε ότι:

$$\langle AX, AY \rangle = \langle X, A^* AY \rangle = \langle X, AA^* Y \rangle = \langle A^* X, A^* Y \rangle.$$

β) Εφόσον ο A είναι κανονικός, τότε και ο $A - \lambda I_n$ είναι κανονικός, όπου $\lambda \in \mathbb{C}$. Πράγματι, $(A - \lambda I_n)^* = A^* - \bar{\lambda} I_n^* = A^* - \bar{\lambda} I_n$. Επομένως $(A - \lambda I_n)(A - \lambda I_n)^* = (A - \lambda I_n)(A^* - \bar{\lambda} I_n) = AA^* - (\lambda A^* + \bar{\lambda} A) + |\lambda|^2 I_n$ και $(A - \lambda I_n)^*(A - \lambda I_n) = (A^* - \bar{\lambda} I_n)(A - \lambda I_n) = A^* A - (\lambda A^* + \bar{\lambda} A) + |\lambda|^2 I_n$, που είναι το ίδιο με το προηγούμενο γιατί $AA^* = A^* A$. Έχουμε:

$$X \in V_A(\lambda) \Leftrightarrow AX = \lambda X \Leftrightarrow (A - \lambda I_n)X = O_{n \times 1} \Leftrightarrow \|(A - \lambda I_n)X\| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|(A - \lambda I_n)X\|^2 = 0 \Leftrightarrow \langle (A - \lambda I_n)X, (A - \lambda I_n)X \rangle = 0 \stackrel{\text{από το α)}}{=} 0$$

$$= \langle (A - \lambda I_n)^* X, (A - \lambda I_n)^* X \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle (A^* - \bar{\lambda} I_n)X, (A^* - \bar{\lambda} I_n)X \rangle = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|(A^* - \bar{\lambda} I_n)X\|^2 = 0 \Leftrightarrow \|(A^* - \bar{\lambda} I_n)X\| = 0 \Leftrightarrow (A^* - \bar{\lambda} I_n)X = O_{n \times 1} \Leftrightarrow A^* X = \bar{\lambda} X \Leftrightarrow X \in V_{A^*}(\bar{\lambda}). \text{ Επομένως } V_A(\lambda) = V_{A^*}(\bar{\lambda}). \quad \blacksquare$$