

Γραμμικές απεικονίσεις - πίνακες.

①

Επαναλήψεις - συμπληρώσεις

Έστω $f: V \rightarrow W$ μια γραμμική απεικόνιση.

Αν υποθέσουμε ότι $(v_1, v_2, \dots, v_m) = \hat{v}$ είναι μια διατεταγμένη βάση του V , τότε η f καθορίζεται από τις τιμές της

$$f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_m) \in W$$

Πράγματι, αν $v \in V$, τότε $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m, (\lambda_i \in F)$

Λόγω της γραμμικότητας της f έχουμε:

$$\begin{aligned} f(v) &= f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m) = \\ &= \lambda_1 \underline{f(v_1)} + \lambda_2 \underline{f(v_2)} + \dots + \lambda_m \underline{f(v_m)} \end{aligned}$$

(Τα $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί).

Αντιστρόφως, έστω $w_1, w_2, \dots, w_m \in W$ τυχαία διανύσματα του W , τότε μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση

$$\begin{aligned} f: V &\rightarrow W \text{ με } f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m) = \\ &= \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_m w_m \end{aligned}$$

(2)

Προφανώς $f(v_i) = w_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$.

Η f είναι γραμμική:

Πράγματι, έστω $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$ και $v' = \sum_{i=1}^m \mu_i v_i$ δύο στοιχεία του V .

$$\begin{aligned} \text{Τότε } f(v+v') &= f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^m \mu_i v_i\right) = \\ &= f\left(\sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i) v_i\right) = \sum_{i=1}^m (\lambda_i + \mu_i) w_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i + \sum_{i=1}^m \mu_i w_i = f(v) + f(v') \end{aligned}$$

και αν $\lambda \in F$ ($F = \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C}$) και $v = \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$,
 τότε $f(\lambda v) = f\left(\sum_{i=1}^m (\lambda \lambda_i) v_i\right) =$
 $= \sum_{i=1}^m \lambda \lambda_i w_i = \lambda \sum_{i=1}^m \lambda_i w_i = \lambda f(v).$

Άρα για να οριστεί η γραμμική απεικόνιση $f: V \rightarrow W$ θα πρέπει και αρκεί να σέβουμε "πού πάνε" τα $v_1, v_2, \dots, v_m$, δηλαδή "ποιά είναι τα $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_m)$ ".

(3)

Ας υποθέσουμε τώρα ότι

$\hat{V} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$ είναι βάση του V
και $\hat{U} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ είναι βάση του W .

Τότε, για κάθε $j = 1, 2, \dots, m$

το $f(v_j) \in W$, άρα γράφεται μοναδικά

στη μορφή $f(v_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i$ (λ_{ij} σκω
σώμα)

δηλαδή $f(v_j) = \lambda_{1j} u_1 + \lambda_{2j} u_2 + \dots + \lambda_{nj} u_n$

Αν την παραπάνω σχέση τη γράψουμε
κατακόρυφα έχουμε:

$$\begin{array}{c} f(v_j) \\ = \\ \lambda_{1j} u_1 \\ + \\ \lambda_{2j} u_2 \\ + \\ \lambda_{3j} u_3 \\ + \\ \vdots \\ + \\ \lambda_{nj} u_n \end{array}$$

Αυτό το κάνουμε για κάθε $j=1,2,\dots,m$
 παίρνουμε

$$\begin{array}{ccc}
 f(v_1) & f(v_2) & \dots f(v_m) \\
 \parallel & \parallel & \parallel \\
 \lambda_{11}u_1 & \lambda_{12}u_1 & \lambda_{1m}u_1 \\
 + & + & + \\
 \lambda_{21}u_2 & \lambda_{22}u_2 & \lambda_{2m}u_2 \\
 + & + & + \\
 \lambda_{31}u_3 & \lambda_{32}u_3 & \lambda_{3m}u_3 \\
 + & + & + \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 + & + & + \\
 \lambda_{n1}u_n & \lambda_{n2}u_n & \lambda_{nm}u_n
 \end{array}$$

Έτσι παίρνουμε τον πίνακα.

$A = (f: \hat{v}, \hat{u})$ της γραμμικής απεικόνισης
 f ως προς τις βάσεις $\hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$
 του V και $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ του W

Ο A είναι ο

$$\begin{pmatrix}
 \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1m} \\
 \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2m} \\
 \lambda_{31} & \lambda_{32} & \dots & \lambda_{3m} \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
 \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nm}
 \end{pmatrix}$$

(5)

Τι ζητάει το ερώτημα:

Ένα τυχαίο στοιχείο $v \in V$ γράφεται μονοδιάγραμμα στη μορφή

$$v = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_m v_m \quad (\mu_i \in \mathbb{R} \text{ ή } \mathbb{C})$$

(Αν χρησιμοποιούσαμε λ , για να μην τη φέρουμε τον πίνακα $A = (f: \hat{v}, \hat{u}) = (\lambda_{ij})$).

Πώς υπολογίζουμε την εικόνα του $f(v)$;

Επειδή το $f(v)$ θα γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός της βάσης $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$

εμείς δέλουμε τους συντελεστές του $f(v)$ ως προς τη βάση $\hat{u}$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε: } f(v) &= f(\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \dots + \mu_m v_m) = \\ &= \mu_1 f(v_1) + \mu_2 f(v_2) + \dots + \mu_m f(v_m) = \\ &= \mu_1 \sum_{i=1}^n \lambda_{i1} u_i + \mu_2 \sum_{i=1}^n \lambda_{i2} u_i + \dots + \mu_m \sum_{i=1}^n \lambda_{im} u_i \\ &= \sum_{j=1}^m \mu_j \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^m \mu_j \lambda_{ij} \right) u_i \end{aligned}$$

Άρα οι συντελεστές του $f(v)$ ως προς τη βάση $\hat{u}$ είναι οι

$$\sum_{j=1}^m \mu_j \lambda_{1j}, \quad \sum_{j=1}^m \mu_j \lambda_{2j}, \quad \dots, \quad \sum_{j=1}^m \mu_j \lambda_{nj}$$

①
②
③

Πώς προκύπτουν αυτοί;

Παρατηρούμε ότι.

6

$$A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_{11}p_1 + \lambda_{12}p_2 + \dots + \lambda_{1m}p_m \\ \lambda_{21}p_1 + \lambda_{22}p_2 + \dots + \lambda_{2m}p_m \\ \vdots \\ \lambda_{n1}p_1 + \lambda_{n2}p_2 + \dots + \lambda_{nm}p_m \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \lambda_{1j} p_j \\ \sum_{j=1}^m \lambda_{2j} p_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \lambda_{nj} p_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m p_j \lambda_{1j} \\ \sum_{j=1}^m p_j \lambda_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m p_j \lambda_{nj} \end{pmatrix} \begin{matrix} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \vdots \\ \textcircled{n} \end{matrix}$$

Άρα οι συντελεστές του $f(v) = \sum_{j=1}^m p_j v_j$
ως προς τη βάση $\hat{u}$ του W προκύπτουν
μέσω του πολλαπλασιασμού

$$A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} = (f: \hat{v}, \hat{u}) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix}$$

(7)

Αντίστροφα: Έστω $\hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$
 και $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ δύο διατεταγμένες
 βάσεις των V και W αντίστοιχα.

Έστω $A = (\lambda_{ij}) \in F^{n \times m}$ ένας τυχαίος
 πίνακας.

Ορίσουμε τη γραμμική απεικόνιση
 $f: V \rightarrow W$

$$\text{όπου } f(v_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i \quad \forall j=1, 2, \dots, m$$

Ποιάς είναι ο πίνακας της f ως προς τις
 βάσεις $\hat{v}$ και $\hat{u}$.

$$\text{Από τη σχέση } f(v_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_{ij} u_i \text{ έχουμε}$$

$$f(v_j)$$

"

$$\lambda_{1j} u_1$$

+

$$\lambda_{2j} u_2$$

⋮

+

$$\lambda_{nj} u_n$$

δηλαδή ο πίνακας της f είναι ο $A = (\lambda_{ij})$

Άρα για σταθερές βάσεις $\hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_m)$
 και $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ των V και W

(8)

αντίστοιχα, έχουμε μια αμφιμονοσήμαντη
αντίστοιχια ($l-l$ και eni).

$$\mathbb{F}^{n \times m} \longleftrightarrow \text{Hom}(V, W),$$

όπου $\text{Hom}(V, W) = \{f: V \rightarrow W \mid f \text{ γραμμική}\}$

Σύνθεση

Έστω V, U και W διαν. χώροι επί του F με βάσεις $\hat{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_m)$, $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ και $\hat{w} = (w_1, w_2, \dots, w_k)$ αντίστοιχα.

Έστω οι γραμμικές απεικονίσεις

$$V \xrightarrow{f} U \xrightarrow{g} W.$$

Αν $A = (a_{ij}) = (f: \hat{v}, \hat{u})$ και $B = (b_{ij}) = (g: \hat{u}, \hat{w})$ ποιος είναι ο πίνακας $C = (c_{ij})$ της σύνθεσης $g \circ f$ (Για συντομία θα γράφουμε gf αντί $g \circ f$). Εννοείται ως προς τις βάσεις $\hat{v}$ και $\hat{w}$, δηλαδή $C = (gf: \hat{v}, \hat{w})$.

Έχουμε $f(v_j) = \sum_{s=1}^n a_{sj} u_s$ (γράφουμε s αντί i).

$$\begin{aligned} \text{Άρα } gf(v_j) &= g\left(\sum_{s=1}^n a_{sj} u_s\right) = \\ &= \sum_{s=1}^n a_{sj} g(u_s) = \sum_{s=1}^n a_{sj} \sum_{i=1}^k b_{is} w_i = \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{s=1}^n (b_{is} a_{sj})\right) w_i. \end{aligned}$$

Επομένως, αν $C = (gf: \hat{v}, \hat{w}) = (c_{ij})$,

τότε $\underline{c_{ij} = \sum_{s=1}^n \beta_{is} a_{sj}}$.

Το δεύτερο μέλος είναι το (i,j) -στοιχείο του πίνακα BA .

Άρα $C = BA$, δηλαδή

$(gf: \hat{v}, \hat{w}) = (g: \hat{u}, \hat{w})(f: \hat{v}, \hat{u})$

Παραδείγματα:

1) Έστω V με βάση $\hat{v} = (v_1, v_2)$,
 U με βάση $\hat{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και
 W με βάση $\hat{w} = (w_1, w_2, w_3)$.

Έστω $f: V \rightarrow U$ με $f(xv_1 + yv_2) =$
 $= -yu_1 + (x+y)u_2 + (2x-y)u_3$, $x, y \in F$

και $g: U \rightarrow W$ με $g(xu_1 + yu_2 + zu_3) =$
 $= (x+y)w_1 + (y+z)w_2 + (z+x)w_3$, $x, y, z \in F$.

Να βρεθούν οι πίνακες $A = (f: \hat{v}, \hat{u})$, $B =$
 $= (g: \hat{u}, \hat{w})$ και $C = (gf: \hat{v}, \hat{w})$.

Λύση: 'Εξοφμε:

$$f(v_1) = f(1v_1 + 0v_2) = u_2 + 2u_3$$

$$f(v_2) = f(0v_1 + 1v_2) = -u_1 + u_2 - u_3$$

$$\begin{array}{cc} f(v_1) & f(v_2) \\ \parallel & \\ 1u_2 & -1u_1 \\ + & + \\ 2u_3 & 1u_2 \\ + & + \\ 0u_1 & -1u_3 \end{array}$$

Άρα $A = (f: \hat{V}, \hat{U}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Επίσης $g(u_1) = w_1 + w_3$, $g(u_2) = w_1 + w_2$ και
 $g(u_3) = w_2 + w_3$

Άρα $B = (g: \hat{U}, \hat{W}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Επομένως $C = BA = (gf: \hat{V}, \hat{W}) =$
 $= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

- 2) $V = \mathbb{R}^3$ με βάση $\hat{V} = (e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_3 + e_1)$
 όπου $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$
 η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^3$.

Διδαδύ $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ και $v_3 = (1, 0, 1)$

Τα v_1, v_2, v_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα
γιατί αν $xv_1 + yv_2 + zv_3 = 0$, τότε

$$(x, x, 0) + (0, y, y) + (z, 0, z) = \\ = (x+z, x+y, y+z) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ x+y=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ x=-y \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ x=-y \\ y=-z=x=-y \end{cases}$$

και από την τελευταία $y = -y \Rightarrow y = 0$
και άρα $x = y = z = 0$.

Αλλά ως παίρνουμε τον πίνακα.

$$\begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \Gamma_3} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Άρα η $\hat{v} = (v_1, v_2, v_3)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$
αφού $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

$U = \mathbb{R}^2$ με βάση $\hat{u} = (e'_1 + e'_2, e'_1 - e'_2) =$
 $= ((1, 1), (1, -1))$, διδαδύ

$u_1 = (1, 1)$ και $u_2 = (1, -1)$

Όπως προηγουμένως τα u_1, u_2 είναι γραμ.

ανεξαρτήτως, άρα η $\hat{u} = (u_1, u_2)$ είναι
 βάση του $\mathbb{R}^2$

(13)

Τέλος $W = \mathbb{R}^3$ με βάση $\hat{w} = (w_1, w_2, w_3)$,
 όπου $w_1 = (-1, 1, 1)$, $w_2 = (1, 0, 1)$ και
 $w_3 = (0, -1, 1)$.

Έχουμε:

$$\begin{matrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{3}\Gamma_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - 2\Gamma_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2 - \Gamma_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow -\Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Άρα η $\hat{w} = (w_1, w_2, w_3)$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

Έστω $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ με ~~$f(v_1) = u_1 + u_2$~~
 ~~$f(v_2) = 2u_1 - u_2$~~
 ~~$f(v_3) = -u_1 + 2u_2$~~

$$\begin{aligned} f(v_1) &= u_1 + u_2 \\ f(v_2) &= 2u_1 - u_2 \\ f(v_3) &= -u_1 + 2u_2 \end{aligned}$$

(1), δηλαδή

$$f(xv_1 + yv_2 + zv_3) = x(u_1 + u_2) + y(2u_1 - u_2) + z(-u_1 + 2u_2)$$

$$= (x + 2y - z)u_1 + (x - y + 2z)u_2, \quad x, y, z \in \mathbb{R}$$

και $g: \underset{U}{\mathbb{R}^2} \rightarrow \underset{W}{\mathbb{R}^3} \quad \text{p.e.}$

$$\boxed{\begin{aligned} g(u_1) &= w_1 - 2w_2 \\ g(u_2) &= w_2 - w_3 \end{aligned}} \quad (2), \delta\eta\lambda\alpha\delta\eta$$

$$\begin{aligned} g(xu_1 + yu_2) &= x(w_1 - 2w_2) + y(w_2 - w_3) = \\ &= xw_1 + (-2x + y)w_2 - yw_3 \end{aligned}$$

Από τις σχέσεις (1) παίρνουμε

$$A = (f: \hat{v}, \hat{u}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{και}$$

από τις σχέσεις (2) παίρνουμε:

$$B = (g: \hat{u}, \hat{w}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Άρα ο πίνακας $C = (gf: \hat{v}, \hat{w})$ ισούται

$$\text{p.e.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -5 & 4 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Πίνακας αλλαγής βάσης:

Έστω V διαν. χώρος και

$$\hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \quad \text{και} \quad \hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

δύο βάσεις του V .

Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση

$$I_V: V \rightarrow V \text{ με } I_V(v) = v \quad \forall v \in V \quad (15)$$

Τι εκφράζει ο πίνακας $A = (I_V: \hat{v}, \hat{u})_j$

Έχουμε

$$v_1 = I_V(v_1) \quad v_2 = I_V(v_2) \quad \dots \quad v_n = I_V(v_n)$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & a_{11}u_1 + a_{21}u_2 + a_{31}u_3 + \dots + a_{n1}u_n \\ & \parallel \\ & a_{12}u_1 + a_{22}u_2 + a_{32}u_3 + \dots + a_{n2}u_n \\ & \parallel \\ & a_{1n}u_1 + a_{2n}u_2 + a_{3n}u_3 + \dots + a_{nn}u_n \end{aligned}$$

Άρα $A = (I_V: \hat{v}, \hat{u}) =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

δηλαδή οι στήλες αποτελούνται από τους συντελεστές των u_i , όταν αναπαραστήσουμε κάθε v_j ως γραμμικό συνδυασμό των u_i .

Δηλαδή

$$v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i$$

Από τη βάση $\hat{v}$ "περναίμε" στη βάση $\hat{u}$.

Αν ξέρουμε τον $A = (I_V: \hat{v}, \hat{u})$ ποιος είναι ο $B = (I_V: \hat{u}, \hat{v})$

Κατ' αρχάς έχουμε $(L_V: \hat{v}, \hat{v}) = I_n$,
 $n = \dim V$, γιατί

$$\begin{array}{cccc}
 v_1 & v_2 & v_3 & \dots & v_n \\
 \parallel & \parallel & \parallel & & \parallel \\
 \textcircled{1} v_1 & 0 v_1 & 0 v_1 & & 0 v_1 \\
 + & + & + & & + \\
 0 v_2 & \textcircled{1} v_2 & 0 v_2 & & 0 v_2 \\
 + & + & + & & + \\
 0 v_3 & 0 v_3 & \textcircled{1} v_3 & & 0 v_3 \\
 + & + & + & & + \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
 + & + & + & & + \\
 0 v_n & 0 v_n & 0 v_n & & \textcircled{1} v_n
 \end{array}$$

Επομένως $BA = (L_V: \hat{u}, \hat{u}) (L_V: \hat{v}, \hat{u}) = (L_V: \hat{v}, \hat{v}) = I_n$
 Άρα $B = (L_V: \hat{u}, \hat{v}) = A^{-1} L = (L_V: \hat{v}, \hat{u})$

Παράδειγμα: Στην προηγούμενη άσκηση
 είδαμε ότι οι $\hat{v} = (v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1))$
 και $\hat{w} = (w_1 = (-1, 1, 1), w_2 = (1, 0, 1), w_3 = (0, -1, 1))$
 είναι βάσεις του $\mathbb{R}^3$.
 Να βρεθούν οι αντίστοιχες αλγεβρικές βάσεις
 $A = (L_{\mathbb{R}^3}: \hat{v}, \hat{w})$ και $B = (L_{\mathbb{R}^3}: \hat{w}, \hat{v})$.

Λύση: Για ευκολία χρησιμοποιούμε τη
 συνήθη βάση $\hat{e} = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$
 του $\mathbb{R}^3$.

Exemple:

$$\begin{aligned}v_1 &= e_1 + e_2 \\v_2 &= e_2 + e_3 \\v_3 &= e_1 + e_3\end{aligned}$$

~~var d'ordre 103 1005~~
 ~~e_1, e_2, e_3~~

$$\text{'Apa } (L_{\mathbb{R}^3}: \hat{v}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\text{Enisw. } w_1 &= -e_1 + e_2 + e_3 \\w_2 &= e_1 + e_3 \\w_3 &= -e_2 + e_3\end{aligned}$$

$$\text{'Apa } (L_{\mathbb{R}^3}: \hat{w}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \Gamma$$

~~Exemple~~ Total $(L_{\mathbb{R}^3}: \hat{e}, \hat{w}) = \Gamma^{-1}$

$$\det \Gamma = -1 - 1 - 1 = -3$$

$$\begin{aligned}\text{adj } \Gamma &= \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{'Apa } (L_{\mathbb{R}^3}: \hat{e}, \hat{w}) &= -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Apr. $A = (L_{\mathbb{R}^3}: \hat{v}, \hat{w}) =$

(18)
 ~~$(L_{\mathbb{R}^3}: \hat{e}, \hat{w}) (L_{\mathbb{R}^3}: \hat{v}, \hat{e})$~~

$$= (L_{\mathbb{R}^3}: \hat{e}, \hat{w}) (L_{\mathbb{R}^3}: \hat{v}, \hat{e}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1/3 & +1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2/3 & 0 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1 \\ -1 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

Eniows. $B = (L_{\mathbb{R}^3}: \hat{w}, \hat{v}) = A^{-1} =$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 2/3 & 1 \\ -1 & -1/3 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -1 \\ +3/2 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Τάξη γραμμών - Τάξη στηλών (19)

Έστω $A = (a_{ij})$ ένας $n \times m$ πίνακας

Η τάξη γραμμών $r(A)$ του A είναι η διάσταση του χώρου των $1 \times m$ γραμμών του.

Δηλαδή, αν $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$, όπου A_i η i -στή

γραμμή του A , τότε $r(A) = \dim \langle A_1, A_2, \dots, A_n \rangle \leq \mathbb{F}^{1 \times m}$ ($r(A)$, r από το row)

Η τάξη στηλών $c(A)$ του A είναι η διάσταση του χώρου των $n \times 1$ στηλών του.

Δηλαδή, αν $A = (A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)})$, όπου $A^{(j)}$ η j -στή στήλη, τότε

$$c(A) = \dim \langle A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(m)} \rangle \leq \mathbb{F}^{n \times 1}.$$

(c από το column = στήλη).

Ισχύει το εξής:

Θεώρημα: Η τάξη γραμμών είναι ίση με την τάξη στηλών κάθε πίνακα $n \times m$ $A = (a_{ij})$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $r(A) = k \geq 0$

(20)

($k=0 \Leftrightarrow A=0$). Προφανώς $k \leq n$.

Έστω $A_{s_1}, A_{s_2}, \dots, A_{s_k}$ μια βάση του χώρου γραμμών. ($s_1, s_2, \dots, s_k \in \{1, 2, \dots, n\}$)

Τότε κάθε γραμμή $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$A_i = \lambda_{i1} A_{s_1} + \lambda_{i2} A_{s_2} + \dots + \lambda_{ik} A_{s_k}, \text{ δηλαδή}$$
$$(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{in}) =$$

$$= (\lambda_{i1} a_{s_1,1}, \lambda_{i1} a_{s_1,2}, \lambda_{i1} a_{s_1,3}, \dots, \lambda_{i1} a_{s_1,n}) +$$
$$+ (\lambda_{i2} a_{s_2,1}, \lambda_{i2} a_{s_2,2}, \lambda_{i2} a_{s_2,3}, \dots, \lambda_{i2} a_{s_2,n}) +$$
$$+ \dots + (\lambda_{ik} a_{s_k,1}, \lambda_{ik} a_{s_k,2}, \lambda_{ik} a_{s_k,3}, \dots, \lambda_{ik} a_{s_k,n})$$
$$= \left(\sum_{t=1}^k \lambda_{it} a_{s_t,1}, \sum_{t=1}^k \lambda_{it} a_{s_t,2}, \dots, \sum_{t=1}^k \lambda_{it} a_{s_t,n} \right)$$

Άρα ~~$a_{ij} = \lambda_{i1} a_{s_1,j} + \lambda_{i2} a_{s_2,j} + \dots + \lambda_{ik} a_{s_k,j}$~~ για $i=1$

$$a_{11} = \lambda_{11} a_{s_1,1} + \lambda_{12} a_{s_2,1} + \lambda_{13} a_{s_3,1} + \dots + \lambda_{1k} a_{s_k,1}$$

και γενικότερα.

$$a_{ij} = \lambda_{i1} a_{s_1,j} + \lambda_{i2} a_{s_2,j} + \dots + \lambda_{ik} a_{s_k,j}$$

και γενικότερα.

$$a_{ij} = \lambda_{i1} a_{s_1,j} + \lambda_{i2} a_{s_2,j} + \dots + \lambda_{ik} a_{s_k,j}$$

(21)

Άρα η στήλη $A^{(j)}$ γράφεται

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} a_{s_{1j}} + \lambda_{12} a_{s_{2j}} + \dots + \lambda_{1k} a_{s_{kj}} \\ \lambda_{21} a_{s_{1j}} + \lambda_{22} a_{s_{2j}} + \dots + \lambda_{2k} a_{s_{kj}} \\ \lambda_{31} a_{s_{1j}} + \lambda_{32} a_{s_{2j}} + \dots + \lambda_{3k} a_{s_{kj}} \\ \vdots \\ \lambda_{n1} a_{s_{1j}} + \lambda_{n2} a_{s_{2j}} + \dots + \lambda_{nk} a_{s_{kj}} \end{pmatrix}$$

$$= a_{s_{1j}} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \lambda_{31} \\ \vdots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix} + a_{s_{2j}} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \lambda_{32} \\ \vdots \\ \lambda_{n2} \end{pmatrix} + \dots + a_{s_{kj}} \begin{pmatrix} \lambda_{1k} \\ \lambda_{2k} \\ \lambda_{3k} \\ \vdots \\ \lambda_{nk} \end{pmatrix}$$

δηλαδή κάθε στήλη είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \lambda_{1k} \\ \lambda_{2k} \\ \vdots \\ \lambda_{nk} \end{pmatrix}$$

$\parallel$ $\Lambda^{(1)}$ $\parallel$ $\Lambda^{(2)}$ $\parallel$ $\Lambda^{(k)}$

δηλαδή ο χώρος στηλών $\langle A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)} \rangle$ περιέχεται στον χώρο στηλών $\langle \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \dots, \Lambda^{(k)} \rangle$

$$\text{Άρα } c(A) = \dim \langle A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)} \rangle \leq \dim \langle \Lambda^{(1)}, \Lambda^{(2)}, \dots, \Lambda^{(k)} \rangle \leq k = r(A)$$

Συμπέρασμα: Για κάθε πίνακα A έχουμε

$$c(A) \leq r(A) \quad (1)$$

(22)

Η σχέση (1) ισχύει για κάθε $n \times n$ A .
Αν αντί του A πάρουμε τον A^t (αναστροφή)
τότε $c(A^t) \leq r(A^t)$. (2)

Αλλά οι στήλες του A^t είναι οι γραμμές του A , άρα $c(A^t) = r(A)$ και οι γραμμές του A^t είναι οι στήλες του A , άρα $r(A^t) = c(A)$.

Άρα η σχέση (2) γράφεται

$$r(A) \leq c(A) \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) παίρνουμε
$$\boxed{r(A) = c(A)} = \text{ΡΑΝΚΟΣ ΤΟΥ } A = r(A^t)$$

Σχέση με γραμμικές απεικονίσεις:

Έστω τώρα V, U δύο διανυσματικοί χώροι με βάσεις $\hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ και $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)$ αντίστοιχα και

$f: V \rightarrow U$ μια γραμμική απεικόνιση

Είδαμε στα προηγούμενα, ότι η εικόνα

$\text{Im } f = f(V) \subseteq U$ καθορίζεται από τις εικόνες $f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)$ των στοιχείων της βάσεως $\hat{v}$ του V .

Άρα $\dim \text{Im } f = \dim \langle f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n) \rangle$

Αν $A = (a_{ij}) = (f: \hat{v}, \hat{u})$, τότε

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i \quad \forall j=1, 2, \dots, m.$$

Αν $k = \dim \operatorname{Im} f = \dim \langle f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_m) \rangle$,

τότε υπάρχει βάση $(f(v_{s_1}), f(v_{s_2}), \dots, f(v_{s_k}))$ της $\operatorname{Im} f$.

Αυτό σημαίνει ότι κάθε $f(v_j)$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$\begin{aligned} f(v_j) &= \lambda_{j1} f(v_{s_1}) + \lambda_{j2} f(v_{s_2}) + \dots + \lambda_{jk} f(v_{s_k}) \\ \sum_{i=1}^n a_{ij} u_i &= \lambda_{j1} \sum_{i=1}^n a_{i,s_1} u_i + \lambda_{j2} \sum_{i=1}^n a_{i,s_2} u_i + \dots + \lambda_{jk} \sum_{i=1}^n a_{i,s_k} u_i \\ &= \sum_{t=1}^k \lambda_{jt} \sum_{i=1}^n a_{i,s_t} u_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{t=1}^k \lambda_{jt} a_{i,s_t} \right) u_i \end{aligned}$$

Άρα κάθε a_{ij} γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$a_{ij} = \sum_{t=1}^k \lambda_{jt} a_{i,s_t}.$$

Για $i=1$ έχουμε

$$a_{1j} = \sum_{t=1}^k \lambda_{jt} a_{1,s_t}$$

Για $i=2$ έχουμε

$$a_{2j} = \sum_{t=1}^k \lambda_{jt} a_{2,s_t}$$

$\vdots$

Για $i=n$ έχουμε

$$a_{nj} = \sum_{t=1}^k \lambda_{jt} a_{n,s_t}$$

Άρα $A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^k \lambda_{jt} a_{1,s_t} \\ \sum_{t=1}^k \lambda_{jt} a_{2,s_t} \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^k \lambda_{jt} a_{n,s_t} \end{pmatrix} =$

$= \sum_{t=1}^k \lambda_{jt} \begin{pmatrix} a_{1,s_t} \\ a_{2,s_t} \\ \vdots \\ a_{n,s_t} \end{pmatrix}$ μονοδέκμαντα!

Άρα κάθε στήλη $A^{(j)}$ του A είναι γραμμικός (μονοδέκμαντα ορισμένος) των στηλών

$A^{(s_1)}, A^{(s_2)}, \dots, A^{(s_k)}$.

Άρα $k = \dim \langle A^{(s_1)}, A^{(s_2)}, \dots, A^{(s_k)} \rangle$

και $k = \dim \langle A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)} \rangle = c(A) = r(A)$

Άρα $k = r(A) \iff \dim \text{Im } f = r(A)$

δηλαδή η διάσταση της εικόνας της f ισούται με την τάξη του πίνακα $A = (f: \hat{w}, \hat{u})$

Σχόλιο: Επειδή το $\dim \text{Im } f$ δεν αλλάζει αν αλλάξουμε τις βάσεις $\hat{v}$ και $\hat{u}$, το $r(A) = r(f: \hat{v}, \hat{u})$ είναι ανεξάρτητο από τις χρησιμοποιούμενες βάσεις.

Αν ένας $n \times n$ πίνακας Q είναι αντιστρέψιμος, τότε για δεδομένες βάσεις $\hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ και $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ των χώρων V και U αντιστοίχα, ο Q μέσω της ~~αμφιμονοσήμαντης~~ αντιστοίχιας

$$F^{n \times n} \longleftrightarrow \text{Hom}(V, U)$$

ορίσει μια ανεικόνιση $f: V \rightarrow U$ με $f(v_j) = \sum_{i=1}^n q_{ij} u_i$, όπου $Q = (q_{ij})$.

Επειδή $\dim V = \dim U$, υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοίχια.

$$F^{n \times n} \longleftrightarrow \text{Hom}(U, V)$$

Άρα ο $Q^{-1} = (q'_{ij})$ είναι πίνακας μιας $g: U \rightarrow V$ ως προς τις βάσεις $\hat{u}$ και $\hat{v}$ των U και V αντιστοίχα.

Παρατηρούμε ότι $(L_V: \hat{v}, \hat{v}) = I_n = Q^{-1}Q = (g: \hat{u}, \hat{v})(f: \hat{v}, \hat{u}) = (gf: \hat{v}, \hat{v})$. Άρα $gf = L_V$ (1) και παρόμοια $(L_U: \hat{u}, \hat{u}) = I_n = Q \cdot Q^{-1} = (f: \hat{v}, \hat{u})(g: \hat{u}, \hat{v}) = (fg: \hat{u}, \hat{u})$.

Άρα $fg = L_U$ (2).

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $g = f^{-1}$ και οι g, f είναι ισομορφισμοί.

Άρα. $r(Q) = \dim \operatorname{Im} f = 4.$

(26)

Η τάξη των στοιχείων ενός ομομορφισμού $n \times n$ νιβάρα είναι n .

Ειδικά αν ο Q είναι νιβάρας αλλαχίς βάσης, τότε $r(Q) = 4.$ ($Q = (L_V: \vec{v}, \vec{w})$)

και ~~$\dim L_V$~~ $\dim \operatorname{Im} L_V = \dim L_V(V) = \dim V = 4$

(27)

Εφαρμογή: Έστω V διανυσματικός χώρος επί του

F και $\hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ μια βάση αυτού.

Τότε υπάρχει για $L-L$ και επί αντιστοιχία μεταξύ των βάσεων $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ του V και των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων με στοιχεία από το F .

Συγκεκριμένα: $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n) \mapsto (L_V: \hat{v}, \hat{u})$

Απόδειξη: Έχουμε ήδη δει ότι αν $\hat{v}$ και $\hat{u}$ είναι βάσεις του V , τότε ο πίνακας

$Q = (L_V: \hat{v}, \hat{u})$ είναι αντιστρέψιμος με αντίστροφο τον $Q^{-1} = (L_V: \hat{u}, \hat{v})$.

Η απεικόνιση $\hat{u} \mapsto (L_V: \hat{v}, \hat{u})$ ($\hat{v}$ σταθερή βάση) είναι προφανώς $1-1$.

Έστω $Q = (q_{ij}) \in F^{n \times n}$ αντιστρέψιμος.

και $Q^{-L} = (q'_{ij})$.

Θέτουμε $u_j = \sum_{i=1}^n q'_{ij} v_i \quad \forall j=1, 2, \dots, n$

Επομένως ~~$\sum_{j=1}^n q_{jk} u_j = \sum_{j=1}^n q_{jk} \sum_{i=1}^n q'_{ij} v_i$~~
 ~~$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{jk} q'_{ij} v_i$~~

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n q_{jk} u_j &= \sum_{j=1}^n q_{jk} \sum_{i=1}^n q'_{ij} v_i = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n q_{jk} q'_{ij} \right) v_i = \sum_{i=1}^n \delta_{ik} v_i = \\ &= v_k, \text{ για κάθε } k=1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Άρα κάθε $v_k, k=1, \dots, n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $u_1, u_2, \dots, u_n$, άρα τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ παράγουν τον V .

(29)

Επειδή $\dim V = n$, n $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$
είναι βάση του V .

Από τη σχέση $u_j = \sum_{i=1}^n q_{ij}^{-1} v_i$
προκύπτει ότι $Q^{-1} = (\perp_V : \hat{u}, \hat{v}) \iff$
 $\iff Q = (\perp_V : \hat{v}, \hat{u})$

~~Ομοιότητα πινάκων~~

~~Ομοιότητα πινάκων~~

Ομοιότητα πινάκων:

Ορισμός: Έστω A και B δύο $n \times n$ πίνακες
(τετραγωνικοί), όχι απαραίτητα αντιστρέψιμοι.

Οι $n \times n$ πίνακες A και B λέγονται όμοιοι
αν και μόνο αν

υπάρχει αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας P ,
τέτοιος ώστε $B = P A P^{-1}$. Γράφουμε $A \sim B$

Στο σύνολο $F^{n \times n}$ η σχέση της ομοιότητας
είναι σχέση ισοδυναμίας:

1) $A \sim A$ γιατί $A = I_n A I_n^{-1}$.

2) $A \sim B \Rightarrow$ υπάρχει αντιστρέψιμος $P \in F^{n \times n}$
μτ $B = P A P^{-1} \Leftrightarrow A = P^{-1} B P = P^{-1} B (P^{-1})^{-1}$
και ο P^{-1} είναι αντιστρέψιμος. Άρα $B \sim A$.

3) Αν $A \sim B$ και $B \sim \Gamma$, τότε $A \sim \Gamma$.

$A \sim B \Rightarrow B = P A P^{-1}$ (P αντιστρέψιμος)

$B \sim \Gamma \Rightarrow \Gamma = Q B Q^{-1}$ (Q αντιστρέψιμος)

Επομένως $\Gamma = Q B Q^{-1} = Q P A P^{-1} Q^{-1} =$ (36)
 $= (QP) A (QP)^{-1}$. και ο QP αντιστρέφεται
 ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων.

Άρα $A \sim \Gamma$.

Οι ενδομορφισμοί ενός διανυσματικού χώρου V .

Έστω V διανυσματικός χώρος επί του F .

Θέτουμε $\text{End}(V) = \{f: V \rightarrow V \mid f \text{ γραμμική}\} =$
 $= \text{Hom}(V, V)$, δηλαδή το σύνολο των
 γραμμικών απεικονίσεων του V στον εαυτό
 του.

Αν $f \in \text{End}(V)$ και $\hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ μια
 βάση του V , τότε γράφουμε

$(f: \hat{v}) = (f: \hat{v}, \hat{v})$ για τον πίνακα
 της f , ως προς την ίδια βάση.

Κατά τα γνωστά, για $\hat{v}$ ορθονόρμη βάση
 υπάρχει μια I - L και επί αντιστοιχία.

$$F^{n \times n} \xrightarrow{\quad} \text{End}(V).$$

με $f \in \text{End}(V)$ να αντιστοιχεί στον πίνακα
 $A = (f: \hat{v}) = (f: \hat{v}, \hat{v})$

Τι θα συμβεί στον πίνακα A της f αν
 αλλάξουμε τη βάση και αντί της
 $\hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ χρησιμοποιήσουμε μια

άλλα βάση $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$;

(31)

Παρατηρούμε ότι:

$$(f: \hat{u}) = (f: \hat{u}, \hat{u}) = (L_V: \hat{v}, \hat{u}) (f: \hat{v}, \hat{v}) (L_V: \hat{u}, \hat{v})$$

Αν $P = (L_V: \hat{v}, \hat{u})$, τότε ο P είναι αντιστρέψιμος (πινάκας αλθαρής βάσης) με αντίστροφο P^{-1} τον $(L_V: \hat{u}, \hat{v})$.

$$\text{Άρα } (f: \hat{u}) = P \cdot (f: \hat{v}, \hat{v}) P^{-1} = P (f: \hat{v}) P^{-1}$$

δηλαδή οι πίνακες $A = (f: \hat{v})$ και $B = (f: \hat{u})$ είναι όμοιοι.

Αντιστρόφως, αν P είναι ένας αντιστρέψιμος πίνακας, έχουμε δείξει ότι ο P είναι πίνακας αλθαρής βάσης $(L_V: \hat{v}, \hat{u})$, όπου $\hat{u}$ νέα βάση του V .

$$\text{Άρα } P A P^{-1} = (L_V: \hat{v}, \hat{u}) (f: \hat{v}, \hat{v}) (L_V: \hat{u}, \hat{v}) = (f: \hat{u}) = B.$$

Άρα η ομοιότητα πινάκων στο $F^{n \times n}$ αντιστοιχεί στην ίδια γραμμική απεικόνιση $f: V \rightarrow V$ αν αλλάξουμε τη βάση του V .

Παρατηρούμε ότι για κάθε $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ (αν θέσουμε $A^0 = I_n$) έχουμε

$$P A^k P^{-1} = (P A P^{-1})^k:$$

Πράγματι, για $k=0$ έχουμε

$$(PAP^{-1})^0 = I_n = P P^{-1} = P I_n P^{-1} = P A^0 P^{-1}.$$

Αν $k \geq 1$, τότε

$$\begin{aligned} (PAP^{-1})^k &= \underbrace{(PAP^{-1})(PAP^{-1})(PAP^{-1}) \dots (PAP^{-1})}_{k \text{ φορές}} = \\ &= P \underbrace{AA \dots A}_{k \text{ φορές}} P^{-1} = P A^k P^{-1}. \end{aligned}$$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\begin{aligned} (PAP^{-1})^{-1} &= (P^{-1})^{-1} A^{-1} P^{-1} = P A^{-1} P^{-1} \\ \text{και γενικά } (PAP^{-1})^{-k} &= [(PAP^{-1})^{-1}]^k = \\ &= (P A^{-1} P^{-1})^k = P (A^{-1})^k P^{-1} = P A^{-k} P^{-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Προφανώς } |PAP^{-1}| &= |P| |A| |P^{-1}| = \\ &= |P| |A| |P|^{-1} = |A|. \end{aligned}$$

Όποιοι πίνακες έχουν την ίδια ορίζουσα.

Υπενθυμίζουμε ότι το ίχνος (trace) ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in F^{n \times n}$ ισούται με το άθροισμα των διαγωνίων στοιχείων του και συμβολίζεται με $\text{tr}(A)$.

Πρόταση: Όποιοι πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος

$$A = (a_{ij}), \quad P = (p_{ij}), \quad P^{-1} = (p'_{ij}). \quad (33)$$

$$B = P A P^{-1} = (\beta_{ij})$$

~~β_{ij}~~ Το c_{ij} -στοιχείο του πίνακα $A P^{-1}$ ισούται με $c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} p'_{sj}$

Το β_{ij} -στοιχείο του $B = P A P^{-1}$ ισούται με $\beta_{ij} = \sum_{t=1}^n p_{it} \cdot c_{tj} = \sum_{t=1}^n p_{it} \sum_{s=1}^n a_{ts} p'_{sj}$

$$\begin{aligned} \text{Άρα } \beta_{ii} &= \sum_{t=1}^n p_{it} \sum_{s=1}^n a_{ts} p'_{si} = \\ &= \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{ts} p_{it} p'_{si} \end{aligned}$$

$$\text{Επομένως } \text{tr}(B) = \sum_{i=1}^n \beta_{ii} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{ts} p_{it} p'_{si} =$$

$$= \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{ts} \sum_{i=1}^n \underset{\substack{\uparrow \\ P^{-1}}}{p'_{si}} \underset{\substack{\uparrow \\ P}}{p_{it}} =$$

$$= \sum_{s=1}^n \sum_{t=1}^n a_{ts} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{μόνο για } s=t}}{\delta_{st}} = \sum_{s=1}^n a_{ss} = \text{tr}(A)$$

2.9 Πολυώνυμα και Πολυωνυμικές Εξισώσεις

Θεωρούμε ότι η διαισθητική έννοια του πολυωνύμου μιας μεταβλητής x είναι γνωστή από τη β' λυκείου, ως μια έκφραση της μορφής $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, όπου τα α_k με $k = 0, 1, 2, \dots, n$ είναι «αριθμοί». Ο αυστηρός ορισμός του πολυωνύμου θα δοθεί στη Βασική Άλγεβρα.

Εμείς εδώ θα θεωρούμε ότι οι συντελεστές α_k ανήκουν σε κάποιο σώμα $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. Σπανιότερα θα θεωρούμε ότι οι συντελεστές είναι ακέραιοι. Συμβολίζουμε με

$$\mathbb{Q}[x] = \{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \mid n \text{ μη αρνητικός ακέραιος και } \alpha_k \in \mathbb{Q}, \text{ για κάθε } k = 0, 1, 2, \dots, n\},$$

$$\mathbb{R}[x] = \{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \mid n \text{ μη αρνητικός ακέραιος και } \alpha_k \in \mathbb{R}, \text{ για κάθε } k = 0, 1, 2, \dots, n\} \text{ και}$$

$$\mathbb{C}[x] = \{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \mid n \text{ μη αρνητικός ακέραιος και } \alpha_k \in \mathbb{C}, \text{ για κάθε } k = 0, 1, 2, \dots, n\}.$$

Όπως προείπαμε, σπανιότερα θα ασχοληθούμε με το σύνολο $\mathbb{Z}[x] = \{\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \mid n \text{ μη αρνητικός ακέραιος και } \alpha_k \in \mathbb{Z}, \text{ για κάθε } k = 0, 1, 2, \dots, n\}$.

Αντιμετωπίζουμε στην αρχή ενιαία κάποια βασικά αποτελέσματα που αφορούν τα πολυώνυμα στο $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ και $\mathbb{C}$. Αν λοιπόν με $\mathbb{F}$ παραστήσουμε κάποιο από τα σώματα $\mathbb{Q}$ ή $\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, θα συμβολίζουμε με $\mathbb{F}[x]$ το αντίστοιχο σύνολο πολυωνύμων με συντελεστές από το $\mathbb{F}$.

Παρατηρήσεις: **1)** Είναι σαφές ότι δύο πολυώνυμα $f(x)$ και $g(x)$ είναι ίσα αν και μόνον αν έχουν τους ίδιους όρους (Μονώνυμα).

2) Μπορούμε να προσθέτουμε αλλά και να διαγράφουμε από ένα πολυώνυμο όρους της μορφής $0x^k$, θεωρώντας τους μηδέν.

3) Το αριθμητικό σώμα $\mathbb{F}$ μπορεί να θεωρηθεί ως υποσύνολο του $\mathbb{F}[x]$ της μορφής $\alpha_0 = \alpha_0 x^0 \in \mathbb{F}$. Αυτά είναι τα **σταθερά πολυώνυμα**. Ανάμεσα σ' αυτά τα σταθερά πολυώνυμα υπάρχει το **μηδενικό πολυώνυμο**, το οποίο συμβολίζουμε με 0. Σύμφωνα με τη δεύτερη παρατήρηση, μπορούμε να γράψουμε $0 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$ ή κάτι παρόμοιο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.12. Αν $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{F}[x]$ συμβολίζουμε με $\deg f(x)$ τον **μέγιστο δείκτη** k με την ιδιότητα $\alpha_k \neq 0$. Συνήθως θεωρούμε $\alpha_n \neq 0$, οπότε $\deg f(x) = n$. Για τις μη μηδενικές σταθερές $f(x) = \alpha$ θέτουμε $\deg \alpha = 0$.

Για το μηδενικό πολυώνυμο και για λόγους τεχνικούς θέτουμε $\deg 0 = -1$.

Στο σύνολο $\mathbb{F}[x]$ των πολυωνύμων ορίζουμε τις ακόλουθες πράξεις:

Πρόσθεση: Αν $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $g(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$ είναι δύο πολυώνυμα, τότε με βάση την πρώτη παρατήρηση μπορούμε να συμπληρώσουμε με «μηδενικούς» όρους της μορφής $0x^k$, έτσι ώστε να θεωρήσουμε ότι $n = m$. Το άθροισμα λοιπόν $f(x) + g(x)$ ορίζεται κατά τον προφανή τρόπο

$$f(x) + g(x) = (\alpha_n + \beta_n) x^n + (\alpha_{n-1} + \beta_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (\alpha_1 + \beta_1) x + \alpha_0 + \beta_0.$$

Αλλιώς απλά προσθέτουμε τα όμοια μονώνυμα. Είναι σαφές ότι $f(x) + 0 = f(x)$, για κάθε πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Εύκολα μπορεί να αποδείξει κανείς ότι η πρόσθεση στο $\mathbb{F}[x]$ έχει την προσεταιριστική και την αντιμεταθετική ιδιότητα και υπάρχει, όπως αναφέρθηκε μηδενικό στοιχείο, το μηδενικό πολυώνυμο.

Επίσης, κάθε πολυώνυμο $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ έχει μοναδικό αντίθετο $-f(x) = -\alpha_n x^n - \alpha_{n-1} x^{n-1} - \dots - \alpha_1 x - \alpha_0$ με $f(x) + (-f(x)) = 0$ ή απλούστερα $f(x) - f(x) = 0$. Έτσι ορίζεται και η πράξη της **αφαίρεσης** πολυωνύμων ως $f(x) - g(x) = f(x) + (-g(x))$.

Παρατήρηση: Ισχύει $\deg(f(x) + g(x)) \leq \max\{\deg f(x), \deg g(x)\}$. Για παράδειγμα, αν $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ και $g(x) = x^2 + x + 1$, τότε $\max\{\deg f(x), \deg g(x)\} = 3$ και $f(x) + g(x) = 2x^3 + 4x$ με $\deg(f(x) + g(x)) = 3$. Αλλά, αν $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$ και $g(x) = -2x^3 + x^2 + x + 1$, τότε $f(x) + g(x) = 4x$ και $\deg(f(x) + g(x)) = 1 < 3 = \max\{\deg f(x), \deg g(x)\} = \max\{3, 3\} = 3$.

Πολλαπλασιασμός: Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $g(x) = \beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + \dots + \beta_1 x + \beta_0$ πολυώνυμα του $\mathbb{F}[x]$ με $\alpha_n \neq 0$ και $\beta_m \neq 0$. Το γινόμενο $f(x)g(x)$ ορίζεται με βάση την επιμεριστική ιδιότητα και ισούται με

$$f(x)g(x) = c_{n+m}x^{n+m} + c_{n+m-1}x^{n+m-1} + c_{n+m-2}x^{n+m-2} + c_1x + c_0,$$

όπου $c_k = \sum_{s+t=k} \alpha_s \beta_t$, για όλους τους συνδυασμούς $s = 0, 1, 2, \dots, n$ και $t = 0, 1, 2, \dots, m$ με $s + t = k$.

Είναι σαφές ότι ο μη μηδενικός μεγιστοβάθμιος όρος είναι ο $c_{n+m} = \alpha_n \beta_m$, οπότε $\deg(f(x)g(x)) = n + m = \deg f(x) + \deg g(x)$. Ο σταθερός όρος c_0 ισούται προφανώς με $\alpha_0 \beta_0$.

Αν κάποιο από τα δύο πολυώνυμα είναι μια μη μηδενική σταθερά, π.χ. $f(x) = \lambda$, τότε $f(x)g(x) = \lambda g(x) = \lambda \beta_m x^m + \lambda \beta_{m-1} x^{m-1} + \dots + \lambda \beta_1 x + \lambda \beta_0$.

Επειδή $\deg \lambda = 0$ και πάλι ισχύει ο τύπος $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$.

Τέλος, αν κάποιο από τα δύο πολυώνυμα είναι μηδέν, τότε και το γινόμενό τους θα είναι μηδέν. Τότε **δεν ισχύει** ο τύπος $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$.

Και για τον πολλαπλασιασμό εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι έχει την προσεταιριστική και αντιμεταθετική ιδιότητα καθώς και την επιμεριστική ως προς την πρόσθεση. Ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού είναι η σταθερά 1.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.13. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $f(x)g(x) = 0$. Τότε κάποιο από τα $f(x)$ και $g(x)$ είναι 0.

Απόδειξη: Αν $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$, τότε $\deg f(x) \geq 0$ και $\deg g(x) \geq 0$. Επομένως $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x) \geq 0$, άτοπο γιατί $\deg(f(x)g(x)) = \deg 0 = -1$. ■

Σημείωση: Η παραπάνω ιδιότητα χαρακτηρίζει το $\mathbb{F}[x]$ ως **ακέραια περιοχή**.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.14. Τα μόνα αντιστρέψιμα στοιχεία του $\mathbb{F}[x]$ είναι οι μη μηδενικές σταθερές.

Απόδειξη: Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $f(x)g(x) = 1$. Αν κάποιο από τα $f(x), g(x)$ ήταν το μηδενικό πολυώνυμο, τότε $f(x)g(x) = 0$, άτοπο. Άρα $f(x), g(x) \neq 0$ και επομένως $\deg f(x) \geq 0$ και $\deg g(x) \geq 0$. Επομένως $0 = \deg 1 = \deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x) \geq 0 + 0 = 0$. Άρα $\deg f(x) = \deg g(x) = 0$, δηλαδή τα $f(x)$ και $g(x)$ είναι μη μηδενικές σταθερές $f(x) = \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ και $g(x) = \lambda^{-1} \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. ■

Διαιρετότητα Πολυωνύμων

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.15. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ με $g(x) \neq 0$. Τότε υπάρχουν μοναδικά $\pi(x), v(x) \in \mathbb{F}[x]$ με την ιδιότητα

$$f(x) = \pi(x)g(x) + v(x)$$

με $\deg v(x) < \deg g(x)$. (Αν $\deg v(x) = -1$, αυτό σημαίνει ότι $v(x) = 0$).

Απόδειξη: Αν $g(x) = \lambda$ μια μη μηδενική σταθερά, τότε $f(x) = \lambda \cdot \lambda^{-1}f(x) + 0$. Εδώ $\pi(x) = \lambda^{-1}f(x)$ και $v(x) = 0$.

Έστω ότι το $g(x)$ δεν είναι σταθερά. Αν $\deg f(x) < \deg g(x)$, τότε θέτουμε $\pi(x) = 0$ και $v(x) = f(x)$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι $\deg f(x) \geq \deg g(x)$ και ότι το $g(x)$ είναι μη σταθερό πολυώνυμο. Αν $\alpha_n x^n$ είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του $f(x)$ και $\beta_m x^m$ ($n > m$) είναι ο μεγιστοβάθμιος όρος του $g(x)$, τότε ο μεγιστοβάθμιος όρος του $\frac{\alpha_n}{\beta_m} x^{n-m} g(x)$ είναι ίσος με τον μεγιστοβάθμιο όρο του

$f(x)$, δηλαδή $\alpha_n x^n$. Επομένως το πολυώνυμο $f(x) - \frac{\alpha_n}{\beta_m} x^{n-m} g(x)$ είναι βαθμού μικρότερου του n . Με επαγωγή επί του n συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν πολυώνυμα $\pi'(x), v(x)$, τέτοια ώστε

$$f(x) - \frac{\alpha_n}{\beta_m} x^{n-m} g(x) = \pi'(x)g(x) + v(x) \text{ με } \deg v(x) < \deg g(x).$$

Επομένως $f(x) = \pi(x)g(x) + v(x)$, όπου $\pi(x) = \frac{\alpha_n}{\beta_m} x^{n-m} + \pi'(x)$ και η ύπαρξη αποδείχτηκε.

Όσον αφορά το μονοσήμαντο, υποθέτουμε ότι υπάρχουν και κάποια άλλα πολυώνυμα $\pi_1(x)$ και $v_1(x)$ με $f(x) = \pi_1(x)g(x) + v_1(x)$ και $\deg v_1(x) < \deg g(x)$.

Τότε θα έχουμε $(\pi_1(x) - \pi(x))g(x) = v(x) - v_1(x)$.

Αν $\pi_1(x) - \pi(x) \neq 0$, τότε $\deg(\pi_1(x) - \pi(x)) \geq 0$ και επίσης $v(x) - v_1(x) \neq 0$.

Άρα $\max\{\deg v(x), \deg v_1(x)\} \geq (\deg v(x) - v_1(x)) = \deg((\pi_1(x) - \pi(x))g(x)) = \deg((\pi_1(x) - \pi(x)) + \deg g(x) \geq \deg g(x)$. Αυτό είναι άτοπο γιατί $\deg v(x) < \deg g(x)$ και $\deg v_1(x) < \deg g(x)$ και συνεπώς $\max\{v(x), v_1(x)\} < \deg g(x)$. Άρα $\pi_1(x) = \pi(x)$ και κατά συνέπεια και $v_1(x) = v(x)$. ■

Παράδειγμα: Εδώ διαιρούμε το $-6x^5 - 3x^4 + x^3 - 8x^2 - 2x - 6$ με το $2x^2 + x + 1$.

$-6x^5$	$-3x^4$	$+x^3$	$-8x^2$	$-2x$	-6	$2x^2$	$+x$	$+1$
$6x^5$	$+3x^4$	$+3x^3$				$-3x^3$	$+2x$	-5
		$4x^3$	$-8x^2$	$-2x$	-6			
		$-4x^3$	$-2x^2$	$-2x$				
			$-10x^2$	$-4x$	-6			
			$10x^2$	$+5x$	$+5$			
				x	-1			

Πηλίκο $-3x^3 + 2x - 5$ και υπόλοιπο $x - 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.16. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. Θα λέμε ότι το $f(x)$ **διαιρεί** το $g(x)$ ή αλλιώς ότι το $g(x)$ είναι πολλαπλάσιο του $f(x)$ αν υπάρχει πολυώνυμο $h(x) \in \mathbb{F}[x]$ με την ιδιότητα $g(x) = f(x)h(x)$. Σε αυτή την περίπτωση γράφουμε $f(x) \mid g(x)$. Αν το $f(x)$ **δεν διαιρεί** το $g(x)$ γράφουμε $f(x) \nmid g(x)$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.17. Ισχύουν τα εξής:

(i) $f(x) \mid 0$, για κάθε $f(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αν $0 \mid f(x)$, αν και μόνον αν $f(x) = 0$.

(ii) $\lambda \mid f(x)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

(iii) Αν $f(x) \mid g(x)$ και $g(x) \mid h(x)$, τότε $f(x) \mid h(x)$.

(iv) Αν $f(x) \mid g_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$ και $h_1(x), h_2(x), \dots, h_m(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε

$$f(x) \mid \sum_{k=1}^m h_k(x)g_k(x).$$

(v) Αν $f(x) \mid g(x)$ και $h(x) \in \mathbb{F}[x]$, τότε $f(x)h(x) \mid g(x)h(x)$. Αν $h(x) \neq 0$, τότε ισχύει η ισοδυναμία: $f(x) \mid g(x) \Leftrightarrow f(x)h(x) \mid g(x)h(x)$.

(vi) Αν $f_k(x) \mid g_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$, τότε $f_1(x) \cdots f_m(x) \mid g_1(x) \cdots g_m(x)$. Στην περίπτωση που $f_1(x) = \cdots = f_m(x) = f(x)$ και $g_1(x) = \cdots = g_m(x) = g(x)$ παίρνουμε: $f(x) \mid g(x) \Rightarrow (f(x))^m \mid (g(x))^m$.

(vii) Έστω $g(x) \neq 0 \Leftrightarrow \deg g(x) \geq 0$. Αν $f(x) \mid g(x)$, τότε $\deg f(x) \leq \deg g(x)$. Αν $f(x) \mid g(x)$ και $g(x) \mid f(x)$, τότε $g(x) = \lambda f(x)$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$.

Απόδειξη: (i) $0 = f(x) \cdot 0$, άρα $f(x) \mid 0$. Έστω $0 \mid f(x) \Rightarrow$ υπάρχει $h(x)$ με $f(x) = 0 \cdot h(x) = 0$. Προφανώς $0 \mid 0$, γιατί $0 = 0 \cdot h(x)$, για κάθε $h(x) \in \mathbb{F}[x]$.

(ii) $f(x) = \lambda \cdot (\lambda^{-1}f(x))$.

(iii) $g(x) = f(x)\tau(x)$ και $h(x) = g(x)\mu(x)$, με $\tau(x), \mu(x) \in \mathbb{F}[x]$ και άρα $h(x) = f(x)(\tau(x)\mu(x))$.

(iv) $g_k(x) = f(x)\tau_k(x)$, όπου $\tau_k(x) \in \mathbb{F}[x]$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$.

$$\text{Επομένως } \sum_{k=1}^m h_k(x)g_k(x) = \sum_{k=1}^m h_k(x)\tau_k(x)f(x) = \left(\sum_{k=1}^m h_k(x)\tau_k(x) \right) f(x).$$

(v) $f(x) \mid g(x) \Leftrightarrow g(x) = f(x)\tau(x)$, για κάποιο $\tau(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Επομένως $g(x)h(x) = (f(x)h(x))\tau(x) \Rightarrow f(x)h(x) \mid g(x)h(x)$. Αν τώρα $h(x) \neq 0$ και $g(x)h(x) = (f(x)h(x))\tau(x)$, τότε $h(x)(g(x) - f(x)\tau(x)) = 0$ και επειδή $h(x) \neq 0$, $g(x) = f(x)\tau(x) \Rightarrow f(x) \mid g(x)$.

(vi) $f_k(x) \mid g_k(x)$, τότε $g_k(x) = f_k(x)\tau_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, m$, όπου $\tau_1(x), \tau_2(x), \dots, \tau_m(x) \in \mathbb{F}[x]$.

Επομένως $g_1(x)g_2(x) \cdots g_m(x) = f_1(x)f_2(x) \cdots f_m(x)\tau(x)$, όπου $\tau(x) = \tau_1(x)\tau_2(x) \cdots \tau_m(x)$.

(vii) $f(x) \neq 0$, γιατί αν $0 \mid g(x)$, τότε $g(x) = 0$. Άρα $g(x) = f(x)\tau(x)$, όπου $\tau(x) \neq 0$. Κατά συνέπεια $\deg g(x) = \deg(f(x)\tau(x)) = \deg f(x) + \deg \tau(x) \geq \deg f(x)$.

Αν τώρα $f(x) \mid g(x)$ και $g(x) \mid f(x)$, τότε $g(x) = \tau(x)f(x)$ και $f(x) = g(x)\varphi(x)$, όπου $\tau(x), \varphi(x) \in \mathbb{F}[x]$. Επομένως $g(x) = \tau(x)\varphi(x)g(x) \Leftrightarrow g(x)(1 - \tau(x)\varphi(x)) = 0 \Leftrightarrow \tau(x)\varphi(x) = 1$ (επειδή $g(x) \neq 0$). Επομένως τα $\tau(x), \varphi(x)$ είναι αντιστρέψιμες σταθερές, έστω $\tau(x) = \lambda \in \mathbb{F}$ και $\varphi(x) = \lambda^{-1}$. Άρα $g(x) = \lambda f(x)$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.18. Ένα (μη μηδενικό) πολυώνυμο $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\deg f(x) = n \Leftrightarrow \alpha_n \neq 0$, λέγεται **μονικό** αν $\alpha_n = 1$, δηλαδή

$$f(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.19. Έστω $f(x), g(x)$ δύο μονικά πολυώνυμα. Τότε τα επόμενα είναι ισοδύναμα:

(i) $f(x) = g(x)$.

(ii) $f(x) \mid g(x)$ και $\deg f(x) = \deg g(x)$.

Απόδειξη: Η κατεύθυνση (i) $\Rightarrow$ (ii) είναι προφανής. Υποθέτουμε τώρα ότι $f(x) \mid g(x)$ και $\deg f(x) = \deg g(x)$. Επομένως $g(x) = f(x)h(x)$, για κάποιο μη μηδενικό πολυώνυμο $h(x)$. Τότε $\deg g(x) = \deg f(x) + \deg h(x) \Leftrightarrow \deg h(x) = \deg g(x) - \deg f(x) = 0$. Επομένως $h(x) = \lambda$, όπου λ μια μη μηδενική σταθερά και συνεπώς $g(x) = \lambda f(x)$. Εφόσον το $f(x)$ είναι μονικό, ο μεγιστοβάθμιος όρος του $\lambda f(x) = g(x)$ έχει συντελεστή λ και άρα, εφόσον το $g(x)$ είναι μονικό, $\lambda = 1$. ■

Παρατήρηση: Από το (vii) της πρότασης 2.17 προκύπτει ότι αν για δύο μονικά πολυώνυμα

$f(x)$ και $g(x)$ έχουμε $f(x) \mid g(x)$ και $g(x) \mid f(x)$, τότε $f(x) = g(x)$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.20. Ένα μη σταθερό πολυώνυμο $p(x)$ του $\mathbb{F}[x]$ λέγεται **ανάγωγο** αν και μόνον αν από κάθε σχέση της μορφής $p(x) = g(x)h(x)$ προκύπτει ότι κάποιο από τα $g(x), h(x)$ είναι μη μηδενική σταθερά.

Παρατηρήσεις: α) Αν το $p(x)$ είναι ανάγωγο και λ μια μη μηδενική σταθερά, τότε και το $\lambda p(x)$ είναι ανάγωγο. Πράγματι, αν $\lambda p(x) = g(x)h(x)$, τότε $p(x) = (\lambda^{-1}g(x))h(x)$. Επομένως είτε $\lambda^{-1}g(x) = \mu$, μη μηδενική σταθερά, άρα $g(x) = \lambda\mu$, μη μηδενική σταθερά ή $h(x)$ μια μη μηδενική σταθερά.

Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε ανάγωγα μονικά πολυώνυμα, που φυσικά προκύπτουν αν διαιρέσουμε με τον συντελεστή του μεγιστοβάθμιου όρου.

β) Αν $p(x)$ και $q(x)$ είναι δύο ανάγωγα μονικά πολυώνυμα και $p(x) \mid q(x)$, τότε $p(x) = q(x)$. Πράγματι, αν $q(x) = p(x)h(x)$, τότε επειδή το $q(x)$ είναι ανάγωγο και το $p(x)$ μη σταθερό, έπεται ότι $h(x) = \lambda \in \mathbb{F}$. Αλλά τότε ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $p(x)\lambda = q(x)$ είναι λ . Επειδή το $q(x)$ είναι μονικό, έπεται ότι $\lambda = 1$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.21. Έστω $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \in \mathbb{F}[x]$, όχι όλα μηδενικά, όπου $n \geq 2$. Τότε υπάρχει μοναδικό **μονικό** πολυώνυμο $\delta(x)$ μεγίστου βαθμού με την ιδιότητα $\delta(x) \mid f_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$, δηλαδή το $\delta(x)$ είναι κοινός μονικός διαιρέτης των $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ μεγίστου βαθμού.

Επιπροσθέτως, υπάρχουν πολυώνυμα (όχι μοναδικά) $h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x) \in \mathbb{F}[x]$, τέτοια ώστε

$$\delta(x) = h_1(x)f_1(x) + h_2(x)f_2(x) + \dots + h_n(x)f_n(x).$$

Επιπλέον, κάθε κοινός διαιρέτης $\delta'(x)$ των $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ διαιρεί το $\delta(x)$. Το $\delta(x)$ ονομάζεται **μέγιστος κοινός διαιρέτης των $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$** και συμβολίζεται με $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f_1(x) \neq 0$. Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{k=1}^n h_k(x)f_k(x) \mid h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x) \in \mathbb{F}[x] \text{ και } \sum_{k=1}^n h_k(x)f_k(x) \neq 0 \right\}$$

όλων των **μη μηδενικών** γραμμικών συνδυασμών (με συντελεστές στο $\mathbb{F}[x]$) των $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, n$. Εφόσον $1 \cdot f_1(x) + 0 \cdot f_2(x) + \dots + 0 \cdot f_n(x) = f_1(x) \neq 0$, άρα $f_1(x) \in \mathcal{A}$, το $\mathcal{A}$ είναι μη κενό. Επειδή οι βαθμοί των πολυωνύμων του $\mathcal{A}$ είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του μηδενός,

έπεται ότι υπάρχει πολυώνυμο $\delta(x) = \sum_{k=1}^n h_k(x)f_k(x) \in \mathcal{A}$ **ελαχίστου βαθμού $m \geq 0$** .

Το $\delta(x)$ μπορεί να θεωρηθεί **μονικό** γιατί, σε αντίθετη περίπτωση αν $\alpha \neq 0$ είναι ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του, τότε το $\alpha^{-1}\delta(x) = \sum_{k=1}^n \alpha^{-1}h_k(x)f_k(x)$ είναι μονικό στοιχείο της $\mathcal{A}$ του ίδιου βαθμού με το $\delta(x)$.

Ισχυριζόμαστε ότι $\delta(x) \mid f_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$. Πράγματι, αν $\delta(x) \nmid f_k(x)$, για κάποιο $k = 1, 2, \dots, n$, τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $\delta \nmid f_1(x)$.

Επομένως $f_1(x) = \delta(x)\pi(x) + v(x)$, όπου $v(x) \neq 0$ και $\deg v(x) < \deg \delta(x)$. Αλλά τότε έχουμε:

$$v(x) = f_1(x) - \pi(x)\delta(x) = f_1(x) - \pi(x) \left(\sum_{k=1}^n h_k(x)f_k(x) \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n h'_k(x) f_k(x) \in \mathcal{A},$$

όπου $h'_1(x) = 1 - \pi(x)h_1(x)$ και $h'_k(x) = -\pi(x)h_k(x)$, για κάθε $k = 2, 3, \dots, n$.

Αυτό είναι άτοπο γιατί το $\delta(x)$ είναι ελαχίστου βαθμού στο $\mathcal{A}$. Επομένως $\delta(x) \mid f_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$.

Αν τώρα $\delta'(x)$ είναι κοινός διαιρέτης των $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, τότε $\delta'(x) \mid \sum_{k=1}^n h_k(x) f_k(x) = \delta(x)$ και συνεπώς $\deg \delta'(x) \leq \deg \delta(x)$. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.22. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αν $(f(x), g(x)) = 1$, τότε τα $f(x)$ και $g(x)$ λέγονται **πρώτα μεταξύ τους** ή **σχετικώς πρώτα**.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.23. Έστω $f(x) \neq 0$ και $f(x) \mid g(x)\varphi(x)$. Υποθέτουμε ότι $(f(x), g(x)) = 1$. Τότε $f(x) \mid \varphi(x)$.

Απόδειξη: Εφόσον $(f(x), g(x)) = 1$, υπάρχουν $\tau_1(x), \tau_2(x) \in \mathbb{F}[x]$, τέτοια ώστε $\tau_1(x)f(x) + \tau_2(x)g(x) = 1$. Επομένως $\tau_1(x)f(x)\varphi(x) + \tau_2(x)g(x)\varphi(x) = \varphi(x)$. Επειδή $f(x) \mid \tau_1(x)f(x)\varphi(x)$ και $f(x) \mid \tau_2(x)(g(x)\varphi(x))$, έπεται ότι $f(x) \mid \tau_1(x)f(x)\varphi(x) + \tau_2(x)g(x)\varphi(x) = \varphi(x)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.24. (i) Αν $p(x)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο και $p(x) \nmid f(x)$, τότε $(p(x), f(x)) = 1$.

(ii) Αν $p(x)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο και $p(x) \mid f_1(x)f_2(x) \cdots f_m(x)$, τότε $p(x) \mid f_k(x)$, για κάποιο $k = 1, 2, \dots, m$.

Απόδειξη: (i) Έστω $\delta(x) = (p(x), f(x))$. Τότε $p(x) = \delta(x)h(x)$. Αν $\delta(x)$ μη σταθερό πολυώνυμο, τότε $h(x) = \lambda \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Τότε $p(x) = \delta(x)\lambda \Leftrightarrow \delta(x) = \lambda^{-1}p(x)$. Εφόσον $\lambda^{-1}p(x) = \delta(x) \mid f(x)$, έπεται ότι $p(x) \mid f(x)$, άτοπο. Επομένως $\delta(x)$ είναι σταθερό πολυώνυμο και επειδή είναι μονικό, $\delta(x) = 1$.

(ii) Αν $m = 1$ δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Έστω $m > 1$. Αν $p(x) \mid f_1(x)$ έχει καλώς. Αν $p(x) \nmid f_1(x)$, από το **(i)** προκύπτει ότι $(p(x), f_1(x)) = 1$. Τώρα με βάση το προηγούμενο πόρισμα προκύπτει ότι $p(x) \mid f_2(x) \cdots f_m(x)$. ($m-1$ παράγοντες). Η απόδειξη συμπληρώνεται με επαγωγή επί του πλήθους των παραγόντων $f_k(x)$. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.25. (Θεώρημα Ανάλυσης σε Γινόμενο Αναγώγων Μονικών Πολυωνύμων)

Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{F}[x]$ μη σταθερό πολυώνυμο. ($\alpha_k \in \mathbb{F}$ και $\alpha_n \neq 0$).

Τότε υπάρχουν μονικά πολυώνυμα $p_1(x), p_2(x), \dots, p_r(x)$ με την ιδιότητα

$$f(x) = \alpha_n \cdot p_1(x)p_2(x) \cdots p_r(x). \quad (1)$$

Επιπλέον, τα $p_1(x), p_2(x), \dots, p_r(x)$ είναι **μοναδικά**, δηλαδή αν

$$f(x) = \alpha_n \cdot q_1(x)q_2(x) \cdots q_t(x), \quad (2)$$

όπου τα $q_1(x)q_2(x) \cdots q_t(x)$ είναι ανάγωγα μονικά πολυώνυμα, τότε $r = t$ και (εν ανάγκη αλλάζοντας την αρίθμηση των $q_k(x)$) έχουμε $p_k(x) = q_k(x)$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, r$.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε επαγωγή επί του $\deg f(x) = n$. Αν $n = 1$, τότε το $f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$ είναι πρωτοβάθμιο, άρα ανάγωγο και $f(x) = \alpha_1 \left(x + \frac{\alpha_0}{\alpha_1} \right)$ και το $p_1(x) = x + \frac{\alpha_0}{\alpha_1}$ είναι προφανώς ανάγωγο μονικό.

Έστω ότι ο ισχυρισμός ισχύει για όλα τα πολυώνυμα βαθμού μικρότερου του $n > 1$. Έστω λοιπόν $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_n \neq 0 \Leftrightarrow \deg f(x) = n$.

Αν το $f(x)$ ήταν ανάγωγο δεν έχουμε παρά να γράψουμε $f(x) = \alpha_n \cdot \frac{1}{\alpha_n} f(x)$ και το $p_1(x) =$

$= \frac{1}{\alpha_n} f(x)$ είναι ανάγωγο μονικό.

Αν το $f(x)$ δεν ήταν ανάγωγο, τότε θα γραφόταν στη μορφή $f(x) = g(x)h(x)$, όπου $g(x), h(x)$ μη σταθερά πολυώνυμα. Κατά συνέπεια $\deg g(x) \geq 1$ και $\deg h(x) \geq 1$. Επειδή $\deg g(x) + \deg h(x) = \deg f(x) = n$, θα είχαμε $1 \leq \deg g(x) < n$ και $1 \leq \deg h(x) < n$. Με βάση την επαγωγική υπόθεση $g(x) = \beta_\kappa \cdot p_1(x)p_2(x) \cdots p_\mu(x)$ και $h(x) = \gamma_\lambda \cdot p'_1(x)p'_2(x) \cdots p'_\nu(x)$, όπου $\beta_\kappa \neq 0$ ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $g(x)$, ($\kappa = \deg g(x)$) και $\gamma_\lambda \neq 0$ ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $h(x)$. ($\lambda = \deg h(x)$).

Επειδή τα $p_i(x), p'_j(x)$ είναι μονικά, ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $g(x)h(x) = f(x)$ είναι $\beta_\kappa \gamma_\lambda$, δηλαδή $\beta_\kappa \gamma_\lambda = \alpha_n$. Συνεπώς $f(x) = \alpha_n \cdot p_1(x)p_2(x) \cdots p_\mu(x)p'_1(x)p'_2(x) \cdots p'_\nu(x)$ και θέτοντας για λόγους ομοιομορφίας $p_{\mu+1}(x) = p'_1(x), p_{\mu+2}(x) = p'_2(x), \dots, p_{\mu+\nu}(x) = p'_\nu(x)$, γράφουμε το $f(x)$ στη μορφή $f(x) = \alpha_n p_1(x)p_2(x) \cdots p_r(x)$, όπου $r = \mu + \nu$.

Όσον αφορά το μονοσήμαντο: Οι σχέσεις (1) και (2) ισοδυναμούν με τη σχέση

$$p_1(x)p_2(x) \cdots p_r(x) = q_1(x)q_2(x) \cdots q_t(x) \quad (3).$$

Για $r = 1$ θα είχαμε και $t = 1$, γιατί αλλιώς το ανάγωγο πολυώνυμο $p_1(x)$ θα ήταν ίσο με το γινόμενο δύο ή περισσότερων μη σταθερών πολυωνύμων. Άρα $p_1(x) = q_1(x)$ και τελειώσαμε.

Έστω $r > 1$. Επειδή το $p_1(x)$ είναι ανάγωγο, σύμφωνα με το πόρισμα 2.24 (ii) πρέπει να έχουμε $p_1(x) \mid q_k(x)$, για κάποιο $k = 1, 2, \dots, s$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $p_1(x) \mid q_1(x)$. Σύμφωνα με την παρατήρηση β) (σελ. 97) έχουμε $p_1(x) = q_1(x)$. Η σχέση (3) γράφεται λοιπόν

$$p_2(x) \cdots p_r(x) = q_2(x) \cdots q_t(x)$$

και στο πρώτο μέλος έχουμε $r - 1$ παράγοντες, άρα η απόδειξη συμπληρώνεται με επαγωγή επί του r . ■

Λυμένες Ασκήσεις-Παραδείγματα

140. Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x] \setminus \{0\}$ με $(f(x), g(x)) = 1$. Αν $f(x) \mid h(x)$ και $g(x) \mid h(x)$, δείξτε ότι και $f(x)g(x) \mid h(x)$.

Απόδειξη: Εφόσον $f(x) \mid h(x)$, $h(x) = f(x)\tau(x)$, για κάποιο πολυώνυμο $\tau(x) \in \mathbb{F}[x]$. Αλλά $g(x) \mid h(x) = f(x)\tau(x)$ και $(f(x), g(x)) = 1$. Από το πόρισμα 2.23 προκύπτει ότι $g(x) \mid \tau(x)$ και άρα $\tau(x) = g(x)\omega(x)$, για κάποιο $\omega(x) \in \mathbb{F}[x]$. Επομένως $h(x) = f(x)g(x)\omega(x)$ και συνεπώς $f(x)g(x) \mid h(x)$. ■

141. Θεωρούμε τα πραγματικά πολυώνυμα $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ και $g(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$. Υπολογίστε τον μέγιστο κοινό διαιρέτη τους και εκφράστε τον ως γραμμικό συνδυασμό αυτών.

Λύση: Διαιρούμε το $f(x)$ με το $g(x)$

x^4	$+x^3$	$-3x^2$	$-x$	$+2$	x^3	$-2x^2$	$-5x$	$+6$
$-x^4$	$+2x^3$	$+5x^2$	$-6x$		x	$+3$		
	$3x^3$	$+2x^2$	$-7x$	$+2$				
	$-3x^3$	$+6x^2$	$+15x$	-18				
		$8x^2$	$+8x$	-16				

Άρα $\pi(x) = x + 3$ και $\nu(x) = 8x^2 + 8x - 16 = 8(x^2 + x - 2)$.

Στη συνέχεια διαιρούμε το $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$ με το $\nu(x) = 8x^2 + 8x - 16$.

$$\begin{array}{ccc|ccc}
x^3 & -2x^2 & -5x & +6 & 8x^2 & +8x & -16 \\
-x^3 & -x^2 & +2x & & \frac{1}{8}x & -\frac{3}{8} & \\
\hline
& -3x^2 & -3x & +6 & & & \\
& 3x^2 & +3x & -6 & & & \\
\hline
& & & 0 & & &
\end{array}$$

Άρα $\pi_1(x) = \frac{1}{8}x - \frac{3}{8}$ και $v_1(x) = 0$.

Το συμπέρασμα είναι ότι

$$(f(x), g(x)) = x^2 + x - 2 = \frac{1}{8}(f(x) - (x+3)g(x)) = \frac{1}{8}f(x) - \frac{1}{8}(x+3)g(x).$$

Αριθμητική Τιμή-Ρίζα Πολυωνύμου

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.26. Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{F}[x]$ με $\alpha_n \neq 0$. Αν $\rho \in \mathbb{F}$ θέτουμε $f(\rho) = \alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1} \rho^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \rho + \alpha_0$.

(i) Το $f(\rho)$ ονομάζεται **αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$** .

(ii) Η συνάρτηση $\mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$ με τύπο $f(\rho) = \alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1} \rho^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \rho + \alpha_0$, για κάθε $\rho \in \mathbb{F}$ ονομάζεται **πολυωνυμική συνάρτηση** και συμβολίζεται με f .

(iii) Αν $f(\rho) = 0$, το $\rho \in \mathbb{F}$ ονομάζεται **ρίζα** του πολυωνύμου $f(x)$ ή της πολυωνυμικής συνάρτησης f .

Ισχύει το εξής θεμελιώδες:

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.27. Το ρ είναι ρίζα του $f(x)$ αν και μόνον αν $x - \rho \mid f(x)$. Γενικά, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το $x - \rho$, όπου $\rho \in \mathbb{F}$ ισούται με $f(\rho)$.

Απόδειξη: Έστω $f(x) = (x - \rho)\pi(x) + v(x)$, όπου $\deg v(x) < \deg(x - \rho) = 1$. Άρα $v(x) = 0$ ή μια μη μηδενική σταθερά του $\mathbb{F}$. Επομένως $f(x) = (x - \rho)\pi(x) + v$, όπου $v \in \mathbb{F}$. Συμπεραίνουμε ότι $f(\rho) = (\rho - \rho)\pi(\rho) + v = v$.

Άρα $f(x) = (x - \rho)\pi(x) + f(\rho)$. Τώρα, $f(\rho) = 0$ αν και μόνον αν $f(x) = (x - \rho)\pi(x)$, δηλαδή $x - \rho \mid f(x)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.28. (ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΣ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ) Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ (με μιγαδικούς συντελεστές) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{C}$.

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας. Ακόμη και οι στοιχειωδέστερες χρησιμοποιούν ως ένα βαθμό στοιχεία Ανάλυσης. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι το $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ κατασκευάζεται με βάση το σύνολο των πραγματικών και κατά συνέπεια η συνέχεια των πραγματικών παίζει καθοριστικό ρόλο.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.29. Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_k \in \mathbb{C}$, για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$ και $\alpha_n \neq 0$ μη σταθερό μιγαδικό πολυώνυμο. ($n = \deg f(x) \geq 1$).

Τότε το $f(x)$ έχει ακριβώς **n μιγαδικές ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ όχι κατ' ανάγκην διαφορετικές μεταξύ τους.**

Απόδειξη: Αν $f(x) = \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_1 \neq 0$, δηλαδή $\deg f(x) = 1$, τότε $f(x) = \alpha_1 \cdot (x - \rho)$, όπου $\rho = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1}$ η μοναδική ρίζα του $f(x)$.

Υποθέτουμε ότι $n = \deg f(x) > 1$ και άρα $\alpha_n \neq 0$. Από το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας προκύπτει ότι το $f(x)$ έχει μια μιγαδική ρίζα ρ_1 . Όπως είδαμε, αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι $x - \rho_1 \mid f(x)$ και επομένως $f(x) = (x - \rho_1)g(x)$, όπου $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ και $\deg g(x) = n - 1 > 0$. Σημειώνουμε ότι επειδή το $x - \rho_1$ είναι μονικό και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου

του $f(x)$ είναι ο α_n , αυτός θα είναι και ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $g(x)$. Επαγωγικώς υποθέτουμε ότι το $g(x)$ έχει $n-1$ ρίζες, τις $\rho_2, \rho_3, \dots, \rho_n$ και $g(x) = \alpha_n \cdot (x - \rho_2)(x - \rho_3) \cdots (x - \rho_n)$. Κατά συνέπεια $f(x) = \alpha_n \cdot (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.30. (Σχέσεις του Vieta²) Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ με $\alpha_k \in \mathbb{C}$, για κάθε $k = 0, 1, \dots, n$ και $\alpha_n \neq 0$ μη σταθερό μιγαδικό πολυώνυμο. ($n = \deg f(x) \geq 1$). Αν $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n \in \mathbb{C}$ είναι οι ρίζες του $f(x)$, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \sum_{k=1}^n \rho_k = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \\ e_2 &= \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \rho_{k_1} \rho_{k_2} = \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n} \\ e_3 &= \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} \rho_{k_1} \rho_{k_2} \rho_{k_3} = -\frac{\alpha_{n-3}}{\alpha_n} \\ &\vdots \\ e_n &= \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n = (-1)^n \frac{\alpha_0}{\alpha_n} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Απόδειξη: Στη σχέση $\alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = \alpha_n \cdot (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)$ διαιρούμε με α_n και παίρνουμε

$$x^n + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{\alpha_1}{\alpha_n} x + \frac{\alpha_0}{\alpha_n} = (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n).$$

Στο 2^ο μέλος το x^n προκύπτει αν από κάθε παρένθεση πάρουμε το x . Επίσης στο 2^ο μέλος το x^{n-1} προκύπτει αν από κάθε παρένθεση πάρουμε το x , εκτός από μία, από την οποία θα πάρουμε το $-\rho_k$. Έχουμε n επιλογές για το ρ_k με συντελεστή -1 . Άρα ο συντελεστής του x^{n-1} στο 2^ο μέλος ισούται με $-\sum_{k=1}^n \rho_k$, ενώ στο 1^ο μέλος $\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$. Επομένως $-\sum_{k=1}^n \rho_k = \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \rho_k = -\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$.

Συνεχίζοντας, στο 2^ο μέλος το x^{n-2} προκύπτει αν πάρουμε το x από $n-2$ παρενθέσεις και από τις άλλες δύο τα $-\rho_{k_1}$ και $-\rho_{k_2}$ με γινόμενο $(-\rho_{k_1})(-\rho_{k_2}) = \rho_{k_1} \rho_{k_2}$. Επειδή τα k_1, k_2 είναι διαφορετικοί δείκτες, κάποιος, έστω ο k_1 είναι ο μικρότερος. Για όλες αυτές τις επιλογές $\rho_{k_1} \rho_{k_2}$ παίρνουμε τον συντελεστή $\sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \rho_{k_1} \rho_{k_2}$ του x^{n-2} στο 2^ο μέλος. Στο 1^ο μέλος ο συντελεστής

του x^{n-2} είναι $\frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}$. Επομένως $\sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \rho_{k_1} \rho_{k_2} = \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_n}$.

Για το x^{n-3} επιλέγουμε τρεις παρενθέσεις από τις οποίες επιλέγουμε τα $-\rho_{k_1}, -\rho_{k_2}, -\rho_{k_3}$ με $k_1 < k_2 < k_3$ και γινόμενο $-\rho_{k_1} \rho_{k_2} \rho_{k_3}$ και αθροίζουμε για όλες αυτές τις επιλογές. Παίρνουμε ως συντελεστή του x^{n-3} στο 2^ο μέλος τον $-\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} \rho_{k_1} \rho_{k_2} \rho_{k_3}$ και στο 1^ο μέλος τον $\frac{\alpha_{n-3}}{\alpha_n}$.

Επομένως $\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} \rho_{k_1} \rho_{k_2} \rho_{k_3} = -\frac{\alpha_{n-3}}{\alpha_n}$. Προχωρώντας κατ' αυτόν τον τρόπο φτάνουμε στον

σταθερό όρο του $(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)$ που είναι ο $(-1)^n \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n$, ενώ στο πρώτο είναι ο $\frac{\alpha_0}{\alpha_n}$.

Καταλήγουμε, αφού πολλαπλασιάσουμε επί $(-1)^n$ στο αποτέλεσμα $\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n = (-1)^n \frac{\alpha_0}{\alpha_n}$. ■

²Λατινική απόδοση Franciscus Vieta του ονόματος του Γάλλου Μαθηματικού François Viète, 1540-1603.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.31. Οι παραστάσεις $e_1 = \sum_{k=1}^n \rho_k$, $e_2 = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \rho_{k_1} \rho_{k_2}$, $e_3 = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} \rho_{k_1} \rho_{k_2} \rho_{k_3}$, ..., $e_n = \rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n$ στο αριστερό μέλος της σχέσης (1) λέγονται **στοιχειώδεις συμμετρικές παραστάσεις ή συναρτήσεις** των $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Δεν μεταβάλλονται για οποιαδήποτε μετάθεση των δεικτών $\{1, 2, \dots, n\}$.

Για παράδειγμα, στο τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2)$ ($\alpha \neq 0$ και ρ_1, ρ_2 οι ρίζες του τριωνύμου) έχουμε: $\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $\rho_1 \rho_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$. Αυτό είπε ο Vieta; Μάλλον, κατά την άποψη του βιβλίου της α' λυκείου....

Όπως τονίσαμε, οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ **δεν είναι κατ' ανάγκην διαφορετικές**. Έστω $\rho_{k_1}, \rho_{k_2}, \dots, \rho_{k_t}$ οι διαφορετικές ρίζες του μιγαδικού πολυωνύμου $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$. Τότε το $f(x)$ γράφεται στη μορφή

$$f(x) = \alpha_n \cdot (x - \rho_{k_1})^{r_1} (x - \rho_{k_2})^{r_2} \cdots (x - \rho_{k_t})^{r_t}, \quad (2)$$

όπου $\rho_{k_i} \neq \rho_{k_j}$, για $i \neq j$ και $r_i \geq 1$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, t$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.32. Ο εκθέτης r_i στη σχέση (2) λέγεται **πολλαπλότητα της ρίζας ρ_{k_i}** στο πολυώνυμο $f(x)$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, t$.

Παρατήρηση: Από τα παραπάνω προκύπτει ότι στο $\mathbb{C}[x]$ τα μόνα ανάγωγα μονικά πολυώνυμα είναι της μορφής $x - \rho$, όπου $\rho \in \mathbb{C}$.

Ποια είναι τώρα τα ανάγωγα μονικά πολυώνυμα στο $\mathbb{R}[x]$; Στην άσκηση 92 αποδείξαμε ότι αν ένα πραγματικό πολυώνυμο $f(x)$ έχει ρίζα έναν μιγαδικό αριθμό z , τότε έχει ρίζα και τον συζυγή του $\bar{z}$. Στην επόμενη πρόταση θα δώσουμε μιαν άλλη απόδειξη αυτού του αποτελέσματος, η οποία θα μας επιτρέψει να χαρακτηρίσουμε και τα ανάγωγα πολυώνυμα στο $\mathbb{R}[x]$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 2.33. Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$, για κάθε $i = 0, 1, \dots, n$) και $\alpha_n \neq 0$, οπότε $\deg f(x) = n$. Έστω $z = \kappa + \lambda \mathbf{i}$ καθαρός μιγαδικός, δηλαδή $\lambda \neq 0$, που είναι ρίζα του $f(x)$. Τότε το $f(x)$ διαιρείται από το ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$ πολυώνυμο $x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2$ και επομένως και ο $\kappa - \lambda \mathbf{i}$ είναι ρίζα του $f(x)$.

Απόδειξη: Επειδή $x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2 = (x - (\kappa + \lambda \mathbf{i}))(x - (\kappa - \lambda \mathbf{i}))$, το $x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2$ είναι όντως ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$, διότι δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων πραγματικών πολυωνύμων ή αλλιώς έχει αρνητική διακρίνουσα, την $-4\lambda^2$.

Επίσης, $\deg f(x) \geq 2$ γιατί αν το $f(x)$ ήταν της μορφής $\alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$, τότε θα είχε μια μοναδική πραγματική ρίζα, την $-\frac{\beta}{\alpha}$.

Έστω $f(x) = (x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2)\pi(x) + v(x)$, όπου $\pi(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$ και $\deg v(x) < \deg(x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2) = 2$. Άρα το $v(x)$ είναι το πολύ βαθμού 1, δηλαδή $v(x) = px + q$, όπου $p, q \in \mathbb{R}$. Εφόσον ο μιγαδικός $\kappa + \lambda \mathbf{i}$ μηδενίζει το $f(x)$, αλλά και το $x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2$, θα μηδενίζει και το $v(x) = px + q$, δηλαδή $p\kappa + q + p\lambda \mathbf{i} = 0$. Επομένως $p\lambda = 0$ και επειδή $\lambda \neq 0$, έχουμε $p = 0$. Αλλά από τη σχέση $p\kappa + q + p\lambda \mathbf{i} = 0$ παίρνουμε ότι και $q = 0$. Επομένως $v(x) = 0$, δηλαδή $x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2 \mid f(x) = (x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2)\pi(x)$. Επειδή όμως και ο μιγαδικός $\kappa - \lambda \mathbf{i} = \kappa + \lambda \mathbf{i}$ μηδενίζει το $x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2$, θα μηδενίζει και το $f(x)$. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.34. Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 = \alpha_n \cdot (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_n)$ πραγματικό πολυώνυμο με ρίζες τους μιγαδικούς $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$. Αν κάποια ρίζα $\rho_i = \kappa + \lambda \mathbf{i}$

ήταν καθαρός μιγαδικός της μορφής $\kappa + \lambda i$, ($\lambda \neq 0$), τότε η **πολλαπλότητα της ρίζας ρ_i συμπίπτει με την πολλαπλότητα της συζυγούς ρίζας $\bar{\rho}_i$** στην ανάλυση του $f(x)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων μιγαδικών παραγόντων.

Απόδειξη: Έστω r_i η πολλαπλότητα της ρ_i και s_i η πολλαπλότητα του $\bar{\rho}_i$ στην ανάλυση του $f(x)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων μιγαδικών πολυωνύμων. Από την προηγούμενη πρόταση $f(x) = (x^2 - 2\kappa x + \kappa^2 + \lambda^2)\pi(x)$, όπου $\pi(x) \in \mathbb{R}[x]$ και $\deg \pi(x) = \deg f(x) - 2$. Τότε η πολλαπλότητα του ρ_i στην ανάλυση του $\pi(x)$ θα είναι $r_i - 1$, πιθανώς μηδέν. Επίσης η αντίστοιχη πολλαπλότητα του $\bar{\rho}_i$ θα είναι $s_i - 1$. Με επαγωγή επί του r_i συμπεραίνουμε ότι $r_i - 1 = s_i - 1 \Leftrightarrow r_i = s_i$. ■

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι **οι καθαρές μιγαδικές ρίζες πραγματικών πολυωνύμων εμφανίζονται σε ζεύγη συζυγών με προφανώς την ίδια πολλαπλότητα.**

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.35. Τα ανάγωγα πολυώνυμα του $\mathbb{R}[x]$ είναι:

(i) Τα πρωτοβάθμια και

(ii) Τα δευτεροβάθμια με αρνητική διακρίνουσα.

Απόδειξη: (i) Προφανώς τα πρωτοβάθμια είναι ανάγωγα στο $\mathbb{R}[x]$.

(ii) Έστω $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ με $\deg f(x) > 1$. Το $f(x)$ δεν μπορεί να έχει πρωτοβάθμιο πραγματικό διαιρέτη, γιατί τότε θα είχε και άλλον μη σταθερό διαιρέτη, επομένως δεν θα ήταν ανάγωγο. Επειδή το $f(x)$ αναλύεται στο $\mathbb{C}$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων, κανείς από τους πρωτοβάθμιους διαιρέτες δεν θα ήταν πραγματικός, σύμφωνα με το (i). Άρα θα ήταν της μορφής $(x - \rho)$, όπου $\rho = \kappa + \lambda i$ καθαρός μιγαδικός. Αλλά τότε και ο $\bar{\rho} = \kappa - \lambda i$ θα ήταν ρίζα του $f(x)$. Επομένως και το $(x - \bar{\rho})$ θα ήταν διαιρέτης του $f(x)$. Αλλά το $\alpha(x - \rho)(x - \bar{\rho}) = \alpha x^2 - 2\alpha \operatorname{Re}(\rho) + \alpha|\rho|^2$ θα ήταν ανάγωγο, όπου α ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου του $f(x)$, αφού η διακρίνουσά του είναι $4\alpha^2((\operatorname{Re}(\rho))^2 - (\operatorname{Re}(\rho))^2 - (\operatorname{Im}(\rho))^2) = -4\alpha^2(\operatorname{Im}(\rho))^2 < 0$. Επειδή το $f(x)$ είναι ανάγωγο και διαιρείται από το ανάγωγο $\alpha x^2 - 2\alpha \operatorname{Re}(\rho) + \alpha|\rho|^2$ και έχει τον ίδιο συντελεστή μεγιστοβάθμιου όρου το α , έπεται ότι $f(x) = \alpha x^2 - 2\alpha \operatorname{Re}(\rho) + \alpha|\rho|^2$, δευτεροβάθμιο τριώνυμο με αρνητική διακρίνουσα. ■

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.36. Κάθε πραγματικό πολυώνυμο $f(x)$ περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Απόδειξη: Αν όλες οι ρίζες ήταν καθαρές μιγαδικές, αυτές χωρίζονται σε ζεύγη συζυγών $\rho, \bar{\rho}$ και παράγουν τα ανάγωγα (στο $\mathbb{R}$) δευτεροβάθμια τριώνυμα $x^2 - 2\operatorname{Re}(\rho) + |\rho|^2$ υψωμένα στη πολλαπλότητα της ρ , έστω r . Προφανώς $\deg((x^2 - 2\operatorname{Re}(\rho) + |\rho|^2)^r) = 2r$ άρτιος. Επομένως ο βαθμός του $f(x)$ θα ήταν άθροισμα αρτίων ακεραίων, άρα άρτιος. Άτοπο. ■

Σημείωση: Το προηγούμενο πόρισμα προκύπτει και από το θεώρημα Bolzano. Έστω $f(x) = \alpha_{2n+1}x^{2n+1} + \alpha_{2n}x^{2n} + \dots + \alpha_1x + \alpha_0$ με $\alpha_{2n+1} \neq 0$. Αρκούμαστε στην περίπτωση $\alpha_{2n+1} > 0$. Τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Άρα υπάρχουν $\delta, \varepsilon \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\delta < \varepsilon$ και $f(\delta) < 0$ και $f(\varepsilon) > 0$. Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $\xi \in (\delta, \varepsilon)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 2.37. (i) Αν $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_m$ είναι διαφορετικές ανά δύο ρίζες ενός πολυωνύμου $f(x)$, τότε

$$(x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_m) \mid f(x).$$

(ii) Ένα πολυώνυμο $f(x)$ το πολύ βαθμού $n \geq 0$ δεν μπορεί να έχει περισσότερες από n διαφορετικές ρίζες. Άρα ένα πολυώνυμο το πολύ βαθμού n με τουλάχιστον $n + 1$ διαφορετικές ρίζες είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Απόδειξη: (i) Αν $m = 1$, τότε αυτό είναι το περιεχόμενο της πρότασης 2.27. Υποθέτουμε ότι

$m > 1$. Εφόσον ρ_1 είναι ρίζα του $f(x)$, τότε $x - \rho_1 \mid f(x)$, δηλαδή $f(x) = (x - \rho_1)\pi(x)$, για κάποιο πολυώνυμο $\pi(x)$. Επειδή $f(\rho_k) = (\rho_k - \rho_1)\pi(\rho_k) = 0$ και $\rho_k - \rho_1 \neq 0$, για κάθε $k = 2, 3, \dots, m$, έπεται ότι $\pi(\rho_k) = 0$, για κάθε $k = 2, 3, \dots, m$. Επαγωγικά προκύπτει ότι $\pi(x) = (x - \rho_2)(x - \rho_3) \cdots (x - \rho_m)\pi'(x)$, για κάποιο πολυώνυμο $\pi'(x)$. Επομένως

$$f(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2) \cdots (x - \rho_m)\pi'(x).$$

(ii) Έστω $n = 0$, δηλαδή $f(x) = \alpha_0$, σταθερά. Αν ρ είναι μια ρίζα του $f(x)$, τότε $f(x) = \alpha_0 = f(\rho) = 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η πρόταση ισχύει για $0 \leq \deg f(x) < n$, όπου n θετικός ακέραιος.

Έστω $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$ ένα πολυώνυμο βαθμού n . Υποθέτουμε ότι το $f(x)$ έχει $n + 1$ διαφορετικές ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \rho_{n+1}$. Εφόσον το ρ_{n+1} είναι ρίζα του $f(x)$, τότε σύμφωνα με την πρόταση 2.27 το $f(x)$ γράφεται $f(x) = (x - \rho_{n+1})g(x)$, όπου προφανώς $\deg g(x) = \deg f(x) - 1 = n - 1$. Επειδή $f(\rho_k) = (\rho_k - \rho_{n+1})g(\rho_k) = 0$ και $\rho_k - \rho_{n+1} \neq 0$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$, έπεται ότι $g(\rho_k) = 0$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n$, δηλαδή το $g(x)$ βαθμού $n - 1$ έχει n διαφορετικές ρίζες. Με επαγωγή στο n οδηγούμαστε σε άτοπο. ■

Ασκήσεις

142. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = \frac{(x - \alpha)(x - \beta)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)} + \frac{(x - \beta)(x - \gamma)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{(x - \gamma)(x - \alpha)}{(\beta - \gamma)(\beta - \alpha)}$ με $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$ είναι το σταθερό πολυώνυμο $f(x) = 1$.

Απόδειξη: Επειδή στον αριθμητή κάθε κλάσματος εμφανίζεται το x^2 συμπεραίνουμε ότι το $f(x)$, άρα και το $f(x) - 1$ είναι το πολύ δευτέρου βαθμού. Παρατηρούμε ότι $f(\alpha) = 0 + 1 + 0 = 1$, $f(\beta) = 0 + 0 + 1 = 1$ και $f(\gamma) = 1 + 0 + 0 = 1$. Άρα το πολυώνυμο $f(x) - 1$, αν δεν ήταν το μηδενικό, θα είχε περισσότερες ρίζες από το βαθμό του, άτοπο. Άρα $f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1$. ■

143. Αν $\rho \neq 0$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{F}[x]$ ($\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{F} = \mathbb{C}$), τότε το ρ^{-1} είναι ρίζα του πολυωνύμου $g(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n$.

Απόδειξη: $f(\rho) = \alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1} \rho^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \rho + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\rho^n} (\alpha_n \rho^n + \alpha_{n-1} \rho^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \rho + \alpha_0) = 0 \Leftrightarrow \alpha_n + \alpha_{n-1} \cdot \frac{1}{\rho} + \alpha_{n-2} \cdot \frac{1}{\rho^2} + \cdots + \alpha_1 \cdot \frac{1}{\rho^{n-1}} + \alpha_0 \cdot \frac{1}{\rho^n} = 0$. ■

144. Αν $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0 \in \mathbb{Z}[x]$, δηλαδή $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ ακέραιοι (Προσοχή! Το $\mathbb{Z}$ δεν είναι σώμα) με $\alpha_n, \alpha_0 \neq 0$ και $\rho = \frac{\kappa}{\lambda} \in \mathbb{Q}$ ρίζα του $f(x)$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$ και $(\kappa, \lambda) = 1$, δηλαδή το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ είναι ανάγωγο, τότε το κ είναι διαιρέτης του α_0 και το λ διαιρέτης του α_n .

Απόδειξη: $f\left(\frac{\kappa}{\lambda}\right) = \alpha_n \cdot \frac{\kappa^n}{\lambda^n} + \alpha_{n-1} \cdot \frac{\kappa^{n-1}}{\lambda^{n-1}} + \cdots + \alpha_1 \cdot \frac{\kappa}{\lambda} + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \kappa(\alpha_n \kappa^{n-1} + \alpha_{n-1} \kappa^{n-2} \lambda + \cdots + \alpha_1 \lambda^{n-1}) = -\alpha_0 \lambda^n$. Άρα το κ διαιρεί το $\alpha_0 \lambda^n$ και επειδή είναι πρώτο προς το λ , διαιρεί το α_0 . Επίσης, $\lambda(\alpha_{n-1} \kappa^{n-1} + \alpha_{n-2} \kappa^{n-2} \lambda + \cdots + \alpha_1 \kappa \lambda^{n-2}) = -\alpha_n \kappa^n$. Άρα το λ διαιρεί το $\alpha_n \kappa^n$ και επειδή είναι πρώτο προς το κ , διαιρεί το α_n . ■

Σημείωση: Από την αριθμητική ξέρουμε ότι κάθε μη μηδενικός ακέραιος διασπάται σε γινόμενο πρώτων αριθμών, δηλαδή είναι της μορφής $\pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ όπου p_i πρώτοι και $p_i \neq p_j$ για $i \neq j$. Αν $\kappa = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$, τότε επειδή κάθε p_i διαιρεί τον κ δεν μπορεί να διαιρεί και τον λ , γιατί τότε το κλάσμα $\frac{\kappa}{\lambda}$ δεν θα ήταν ανάγωγο. Κατά συνέπεια δεν εμφανίζεται στην ανάλυση του λ

σε γινόμενο πρώτων, άρα ούτε και στην ανάλυση του λ^n . Επειδή όμως διαιρεί τον $-\alpha_0 \lambda^n$, θα εμφανίζεται στην ανάλυση του α_0 σε γινόμενο πρώτων. Άρα ολόκληρος ο $\kappa = \pm p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$ διαιρεί τον α_0 . Την ίδια επιχειρηματολογία χρησιμοποιούμε και όταν ο λ διαιρεί τον $\alpha_n \kappa^n$.

145. Να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων στο $\mathbb{R}[x]$ και στο $\mathbb{C}[x]$ το πολυώνυμο $x^4 + 1$.

Λύση: Πρώτα στο $\mathbb{R}[x]$. Έχουμε $x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2 = (x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$. Τα μονικά πολυώνυμα $x^2 \pm \sqrt{2}x + 1$ είναι ανάγωγα στο $\mathbb{R}[x]$ γιατί έχουν αρνητική διακρίνουσα $\Delta = 2 - 4 = -2$. Στο $\mathbb{C}[x]$ όμως $x^2 + \sqrt{2}x + 1 = \left(x - \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{-\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)$ και $x^2 - \sqrt{2}x + 1 = \left(x - \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)$. Συνεπώς $x^4 + 1 = \left(x + \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}\right)$ με ρίζες τους μιγαδικούς $-\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Στις ίδιες ρίζες και στην ίδια ανάλυση του $x^4 + 1$ θα καταλήγαμε αν βρίσκαμε τις 4^{ες} ρίζες του $-1 = \cos \pi + i \sin \pi$. $z_0 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_1 = \cos \frac{\pi + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\pi + 2\pi}{4} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $z_3 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. ■

146. (i) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x) = x^{n\alpha_{n-1}+n-1} + x^{n\alpha_{n-2}+n-2} + \cdots + x^{n\alpha_1+1} + x^{n\alpha_0}$ διαιρείται με το πολυώνυμο $g(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1$, όπου $n, \alpha_{n-1}, \dots, \alpha_1, \alpha_0$ θετικοί ακέραιοι.

(ii) Δείξτε ότι το πολυώνυμο

$$f(x) = (x^{r-1} + \alpha x^{r-2} + \alpha^2 x^{r-3} + \cdots + \alpha^{r-2} x + \alpha^{r-1})x^{(r+1)^n+1} + \alpha^{(r+1)^n+r}$$

διαιρείται από το πολυώνυμο $g(x) = x^r + \alpha x^{r-1} + \alpha^2 x^{r-2} + \cdots + \alpha^{r-1} x + \alpha^r$ όπου $\alpha \in \mathbb{C}$ και n, r θετικοί ακέραιοι.

Απόδειξη: (i) Για κάθε $k = 0, 1, \dots, n-1$ έχουμε: $x^{n\alpha_k+k} - x^k = x^k(x^{n\alpha_k} - 1) = x^k((x^n)^{\alpha_k} - 1)$. Επίσης, $(x^n)^{\alpha_k} - 1 = (x^n - 1)(x^{n(\alpha_k-1)} + x^{n(\alpha_k-2)} + \cdots + x^n + 1) = (x^n - 1)L_k(x)$, όπου

$$L_k(x) = x^{n(\alpha_k-1)} + x^{n(\alpha_k-2)} + \cdots + x^n + 1. \text{ Επομένως } f(x) - g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (x^{n\alpha_k+k} - x^k) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k(x^n - 1)L_k(x) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k L_k(x)(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k L_k(x)(x-1)g(x).$$

Κατά συνέπεια $f(x) = g(x) \left(1 + \sum_{k=0}^{n-1} x^k L_k(x)(x-1)\right)$.

(ii) $f(x) = (x^{r-1} + \alpha x^{r-2} + \alpha^2 x^{r-3} + \cdots + \alpha^{r-2} x + \alpha^{r-1})x^{(r+1)^n+1} + \alpha^{(r+1)^n+r} = (x^r + \alpha x^{r-1} + \alpha^2 x^{r-2} + \cdots + \alpha^{r-1} x)x^{(r+1)^n} + \alpha^{(r+1)^n+r} = (x^r + \alpha x^{r-1} + \alpha^2 x^{r-2} + \cdots + \alpha^{r-2} x^2 + \alpha^{r-1} x + \alpha^r)x^{(r+1)^n} + \alpha^{(r+1)^n+r} - \alpha^r x^{(r+1)^n} = g(x)x^{(r+1)^n} + \alpha^{(r+1)^n+r} - \alpha^r x^{(r+1)^n} = g(x)x^{(r+1)^n} + \alpha^r(\alpha^{(r+1)^n} - x^{(r+1)^n}) = g(x)x^{(r+1)^n} + \alpha^r((\alpha^{r+1})^{(r+1)^{n-1}} - (x^{r+1})^{(r+1)^{n-1}}).$

Θέτουμε $k = (r+1)^{n-1}$, οπότε η τελευταία παράσταση ισούται με $g(x)x^{(r+1)^n} + \alpha^r((\alpha^{r+1})^k - (x^{r+1})^k) = g(x)x^{(r+1)^n} + \alpha^r(\alpha^{r+1} - x^{r+1})((\alpha^{r+1})^{k-1} + (\alpha^{r+1})^{k-2}x^{r+1} + \cdots + \alpha^{r+1}(x^{r+1})^{k-2} + (x^{r+1})^{k-1})$. Θέτουμε $\varphi(x) = (\alpha^{r+1})^{k-1} + (\alpha^{r+1})^{k-2}x^{r+1} + \cdots + \alpha^{r+1}(x^{r+1})^{k-2} + (x^{r+1})^{k-1}$ και άρα $f(x) = g(x)x^{(r+1)^n} + \alpha^r(\alpha^{r+1} - x^{r+1})\varphi(x) = g(x)x^{(r+1)^n} + \alpha^r(\alpha - x)g(x)\varphi(x) =$

$$= g(x) \left(x^{(r+1)^n} + \alpha^r (\alpha - x) \varphi(x) \right).$$

147. Δείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ με το $x^2 - \alpha^2$, όπου $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ισούται με

$$v(x) = \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2\alpha}x + \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2}$$

Απόδειξη: Εφόσον $\deg(x^2 - \alpha^2) = 2$, το υπόλοιπο $v(x)$ της διαίρεσης $f(x) : (x^2 - \alpha^2)$ είναι το πολύ πρώτου βαθμού. Έστω $v(x) = \kappa x + \lambda$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$ και άρα $f(x) = (x^2 - \alpha^2)\pi(x) + \kappa x + \lambda$, όπου $\pi(x) \in \mathbb{C}[x]$.

$$\text{Τότε } \begin{cases} f(\alpha) = \kappa\alpha + \lambda \text{ και} \\ f(-\alpha) = -\kappa\alpha + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\alpha) + f(-\alpha) = 2\lambda \\ f(\alpha) - f(-\alpha) = 2\kappa\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \frac{f(\alpha) - f(-\alpha)}{2\alpha} \\ \lambda = \frac{f(\alpha) + f(-\alpha)}{2} \end{cases}.$$

148. Βρείτε ένα πολυώνυμο $f(x)$ τρίτου βαθμού με $f(0) = 0$ και $f(x) - f(x-1) = x^2$. Στη συνέχεια υπολογίστε το άθροισμα $\sigma_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$, όπου n θετικός ακέραιος.

Λύση: Έστω $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$. Τότε $f(x) - f(x-1) = 3\alpha x^2 + (-3\alpha + 2\beta)x + \alpha - \beta + \gamma = x^2$.

Επομένως $\alpha = \frac{1}{3}$, $\beta = \frac{1}{2}$ και $\gamma = \frac{1}{6}$, δηλαδή $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$.

Επομένως $\sigma_n = (f(n) - f(n-1)) + (f(n-1) - f(n-2)) + \dots + (f(2) - f(1)) + (f(1) - f(0))$
 $\underset{f(0)=0}{=} f(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

149. Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3 - x^2 + 9\alpha x - \alpha$. Υποθέτουμε ότι το $f(x)$ έχει τρεις θετικές (πραγματικές) ρίζες. Να βρεθεί το α και οι ρίζες του $f(x)$.

Λύση: 1^{ος} τρόπος: Από τις σχέσεις Vieta προκύπτει ότι το άθροισμα των ριζών είναι $-\frac{-1}{1} = 1$.

Άρα για κάθε ρίζα λ έχουμε $0 < \lambda < 1$. Επίσης για κάθε ρίζα λ έχουμε $9\alpha\lambda - \alpha = \lambda^2 - \lambda^3 \Leftrightarrow \Leftrightarrow \alpha(9\lambda - 1) = \lambda^2(1 - \lambda) > 0$. Κατά συνέπεια $9\lambda - 1 \neq 0$ και μάλιστα $9\lambda - 1 > 0$ γιατί το α από

τις σχέσεις Vieta, ισούται με το γινόμενο των ριζών, άρα είναι θετικό. Επομένως $\alpha = \frac{\lambda^2(1 - \lambda)}{9\lambda - 1}$.

Αν λοιπόν λ μια ρίζα του πολυωνύμου, τότε $f(x) = f(x) - f(\lambda) = x^3 - \lambda^3 - x^2 + \lambda^2 + 9\alpha(x - \lambda) = (x - \lambda)(x^2 + \lambda x + \lambda^2) - (x - \lambda)(x + \lambda) + 9\alpha(x - \lambda) = (x - \lambda)(x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - \lambda + 9\alpha)$. Το τριώνυμο $x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda^2 - \lambda + 9\alpha$ έχει τις άλλες δύο θετικές ρίζες του $f(x)$. Επομένως η διακρίνουσά του είναι μη αρνητική, δηλαδή $\Delta = (\lambda - 1)^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 9\alpha) \geq 0$.

Αντικαθιστώντας την τιμή $\alpha = \frac{\lambda^2(1 - \lambda)}{9\lambda - 1}$ παίρνουμε: $(1 - \lambda)^2 - 4\lambda(\lambda - 1) - \frac{36\lambda^2(1 - \lambda)}{9\lambda - 1} =$

$$= (1 - \lambda) \left(1 - \lambda + 4\lambda - \frac{36\lambda^2}{9\lambda - 1} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \underset{1-\lambda>0}{1+3\lambda - \frac{36\lambda^2}{9\lambda - 1} \geq 0} \Leftrightarrow \underset{9\lambda-1>0}{9\lambda - 1 + 27\lambda^2 - 3\lambda - 36\lambda^2 \geq 0}$$

$$\geq 0 \Leftrightarrow -9\lambda^2 + 6\lambda - 1 \geq 0 \Leftrightarrow -(9\lambda^2 - 6\lambda + 1) = -(3\lambda - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3\lambda - 1)^2 \leq 0. \text{ Επομένως}$$

$$3\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{3}, \text{ για κάθε ρίζα } \lambda \text{ του } f(x). \text{ Το γινόμενο των ριζών } \alpha = \frac{1}{27} \text{ και τελικώς}$$

$$f(x) = x^3 - x^2 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{27} = \left(x - \frac{1}{3}\right)^3.$$

2^{ος} τρόπος: Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$ οι τρεις ρίζες του πολυωνύμου. Εφαρμόζουμε την ταυτότητα Lagrange για τις τριάδες $(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \sqrt{\lambda_3})$ και $\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right)$ και παίρνουμε

$$\left((\sqrt{\lambda_1})^2 + (\sqrt{\lambda_2})^2 + (\sqrt{\lambda_3})^2 \right) \left(\frac{1}{(\sqrt{\lambda_1})^2} + \frac{1}{(\sqrt{\lambda_2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{\lambda_3})^2} \right) -$$

$$-\left(\sqrt{\lambda_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \sqrt{\lambda_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} + \sqrt{\lambda_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}}\right)^2 = \left| \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(\sqrt{\lambda_1})^{-1}} \quad \frac{\sqrt{\lambda_2}}{(\sqrt{\lambda_2})^{-1}} \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{\lambda_2}}{(\sqrt{\lambda_2})^{-1}} \quad \frac{\sqrt{\lambda_3}}{(\sqrt{\lambda_3})^{-1}} \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{\lambda_3}}{(\sqrt{\lambda_3})^{-1}} \quad \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(\sqrt{\lambda_1})^{-1}} \right|^2. \quad (1)$$

$$\text{Αλλά } \left((\sqrt{\lambda_1})^2 + (\sqrt{\lambda_2})^2 + (\sqrt{\lambda_3})^2 \right) \left(\frac{1}{(\sqrt{\lambda_1})^2} + \frac{1}{(\sqrt{\lambda_2})^2} + \frac{1}{(\sqrt{\lambda_3})^2} \right) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} \right) \underset{\text{σχέσεις Vieta}}{=} 1 \cdot \frac{\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \underset{\text{σχέσεις Vieta}}{=} \frac{9\alpha}{\alpha} = 9 \text{ και}$$

$$\left(\sqrt{\lambda_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} + \sqrt{\lambda_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_2}} + \sqrt{\lambda_3} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda_3}} \right)^2 = 3^2 = 9. \text{ Άρα το αριστερό μέλος της (1) είναι μηδέν.}$$

Κατά συνέπεια θα είναι μηδέν και το δεξιό μέλος και επειδή αυτό είναι άθροισμα τετραγώνων, όλοι οι όροι θα είναι μηδέν, δηλαδή

$$\left| \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(\sqrt{\lambda_1})^{-1}} \quad \frac{\sqrt{\lambda_2}}{(\sqrt{\lambda_2})^{-1}} \right| = \left| \frac{\sqrt{\lambda_2}}{(\sqrt{\lambda_2})^{-1}} \quad \frac{\sqrt{\lambda_3}}{(\sqrt{\lambda_3})^{-1}} \right| = \left| \frac{\sqrt{\lambda_3}}{(\sqrt{\lambda_3})^{-1}} \quad \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(\sqrt{\lambda_1})^{-1}} \right| = 0.$$

$$\text{Τώρα, } \left| \frac{\sqrt{\lambda_1}}{(\sqrt{\lambda_1})^{-1}} \quad \frac{\sqrt{\lambda_2}}{(\sqrt{\lambda_2})^{-1}} \right| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda_1 \lambda_2^{-1}} = \sqrt{\lambda_2 \lambda_1^{-1}} \Leftrightarrow \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Leftrightarrow \lambda_1^2 = \lambda_2^2 \underset{\lambda_1, \lambda_2 > 0}{\Leftrightarrow} \lambda_1 = \lambda_2.$$

Ομοίως προκύπτει ότι και $\lambda_2 = \lambda_3$ και επειδή το άθροισμα των ριζών είναι 1, έχουμε $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ και το γινόμενο τους $\alpha = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$. ■

150. Αν $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί, οι οποίοι είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι το πολυώνυμο

$$P(x) = \frac{x^n}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{x^{n-1}}{\alpha_2 \alpha_3} + \dots + \frac{x^2}{\alpha_{n-1} \alpha_n} - \frac{n-1}{\alpha_1 \alpha_n}$$

διαίρεται με το $x-1$.

Απόδειξη: $P(1) = \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2 \alpha_3} + \dots + \frac{1}{\alpha_{n-1} \alpha_n} - \frac{n-1}{\alpha_1 \alpha_n}$. Έστω ω η διαφορά της προόδου,

δηλαδή $\alpha_{k+1} = \alpha_k + \omega$, για κάθε $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Γράφουμε $\frac{1}{\alpha_k \alpha_{k+1}} = \frac{1}{\alpha_k (\alpha_k + \omega)} = \frac{A}{\alpha_k} + \frac{B}{\alpha_k + \omega}$, A, B προσδιοριστέοι συντελεστές. Έχουμε $1 = A(\alpha_k + \omega) + B\alpha_k = A\omega + (A+B)\alpha_k$. Επειδή το 1 δεν εξαρτάται από τα α_k , έχουμε $A = -B$.

Ακόμη, $1 = A\omega \Leftrightarrow A = \frac{1}{\omega}$ και $B = -\frac{1}{\omega}$. Επομένως $\frac{1}{\alpha_k \alpha_{k+1}} = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\alpha_k} - \frac{1}{\alpha_{k+1}} \right)$ και κατά

συνέπεια

$$P(1) = \frac{1}{\omega} \left(\frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_2} - \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_3} - \frac{1}{\alpha_4} + \dots + \frac{1}{\alpha_{n-1}} - \frac{1}{\alpha_n} \right) - \frac{n-1}{\alpha_1 \alpha_n} = \frac{1}{\omega} \frac{\alpha_n - \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_n} - \frac{n-1}{\alpha_1 \alpha_n} = \frac{1}{\omega} \frac{\alpha_1 + (n-1)\omega - \alpha_1}{\alpha_1 \alpha_n} - \frac{n-1}{\alpha_1 \alpha_n} = 0. \text{ Άρα } x-1 \mid P(x). \quad \blacksquare$$

151. Να βρεθεί μονικό πολυώνυμο, του οποίου οι ρίζες είναι οι αντίστροφες των ριζών του πολυωνύμου $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$, όπου $\alpha_n, \alpha_0 \neq 0$.

Λύση: Έστω $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ οι μη διακεκριμένες ρίζες του $f(x)$. Ένα τέτοιο πολυώνυμο θα

$$\begin{aligned} \text{είναι αναγκαστικά το } g(x) &= \left(x - \frac{1}{\rho_1}\right) \left(x - \frac{1}{\rho_2}\right) \dots \left(x - \frac{1}{\rho_n}\right) = x^n - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\rho_k}\right) x^{n-1} + \\ &+ \left(\sum_{1 \leq k_1 < k_2 \leq n} \frac{1}{\rho_{k_1} \rho_{k_2}}\right) x^{n-2} - \left(\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq n} \frac{1}{\rho_{k_1} \rho_{k_2} \rho_{k_3}}\right) x^{n-3} + \dots + \end{aligned}$$

$$+ (-1)^{n-1} \left(\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n-1} \leq n} \frac{1}{\rho_{k_1} \rho_{k_2} \dots \rho_{k_{n-1}}} \right) x + (-1)^n \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n}.$$

Παρατηρούμε ότι $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\rho_k} = \frac{\rho_2 \dots \rho_n + \rho_1 \rho_3 \dots \rho_n + \dots + \rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots \rho_{n-1}}{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \dots \rho_n} = \frac{e_{n-1}}{e_n}$ και γενικά, αν

$1 \leq t < n$, τότε τα κλάσματα που απαρτίζουν το άθροισμα $\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq n} \frac{1}{\rho_{k_1} \rho_{k_2} \dots \rho_{k_t}}$ για να

γίνουν ομώνυμα με παρονομαστή $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n$, θα πρέπει να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με τα υπόλοιπα $n - t$ το πλήθος ρ_k που λείπουν από τους παρονομαστές. Επειδή για τους παρονομαστές έχουμε πάρει όλα τα δυνατά γινόμενα t το πλήθος από τα ρ_k , στον αριθμητή θα εμφανιστεί το άθροισμα όλων των γινομένων των ρ_k ανά $n - t$. Επομένως θα έχουμε

$$\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq n} \frac{1}{\rho_{k_1} \rho_{k_2} \dots \rho_{k_t}} = \frac{\sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_{n-t} \leq n} \rho_{k_1} \rho_{k_2} \dots \rho_{k_{n-t}}}{\rho_1 \rho_2 \dots \rho_n} = \frac{e_{n-t}}{e_n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Αλλά } \frac{e_{n-t}}{e_n} &= \frac{(-1)^{n-t} \cdot \frac{\alpha_t}{\alpha_n}}{(-1)^n \cdot \frac{\alpha_0}{\alpha_n}} = (-1)^{-t} \cdot \frac{\alpha_{n-t}}{\alpha_0}. \text{ Επομένως } (-1)^t \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_t \leq n} \frac{1}{\rho_{k_1} \rho_{k_2} \dots \rho_{k_t}} = \\ &= \frac{\alpha_{n-t}}{\alpha_0}. \text{ Άρα } g(x) = x^n + \frac{\alpha_1}{\alpha_0} x^{n-1} + \frac{\alpha_2}{\alpha_0} x^{n-2} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0} + \frac{\alpha_n}{\alpha_0}. \end{aligned}$$

152. Να βρείτε το άθροισμα των τετραγώνων και των κύβων των ριζών του πολυνύμου $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 10$.

Λύση: Έστω $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ οι ρίζες του $f(x)$. Τότε $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{-6}{2} = 3$. Επομένως $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) = 3^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 8$.

Από την ταυτότητα των τριών κύβων του Euler έχουμε $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = 3\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1)) = -3 \cdot \frac{-10}{2} + 3 \left(8 - \frac{1}{2} \right) = 15 + \frac{45}{2} = \frac{75}{2}$.

Για όσους ακόμα πιστεύουν ότι οι μιγαδικοί αριθμοί είναι «εξωπραγματικοί» ας δουν την επόμενη άσκηση.

153. Αν $n \geq 2$ θετικός ακέραιος, υπολογίστε το γινόμενο $\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \dots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}$.

Λύση: Θεωρούμε το πολυώνυμο $x^n - 1 = (x-1) \prod_{k=1}^{n-1} (x - z^k)$, όπου $z = \cos \frac{2\pi}{n} + \mathbf{i} \sin \frac{2\pi}{n}$ με ρίζες τις n -στές ρίζες της μονάδας. Απ' την άλλη μεριά, $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$. Τελικώς διαγράφουμε τον κοινό όρο $x-1$ και παίρνουμε $x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = \prod_{k=1}^{n-1} (x - z^k)$.

Θέτουμε $x = 1$ στην έκφραση αυτή. Έχουμε $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ το πλήθος}} = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - z^k)$, δηλαδή $n =$

$$\begin{aligned} &= \prod_{k=1}^{n-1} (1 - z^k). \text{ Τώρα, } 1 - z^k = 1 - \cos \frac{2k\pi}{n} - \mathbf{i} \sin \frac{2k\pi}{n} = 1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{k\pi}{n} \right) - 2 \sin \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n} = \\ &= 2 \sin \frac{k\pi}{n} \left(\sin \frac{k\pi}{n} - \mathbf{i} \cos \frac{k\pi}{n} \right). \text{ Ακόμη, } 0 < \frac{k\pi}{n} < \pi, \text{ για κάθε } k = 1, 2, \dots, n-1. \text{ Άρα } \sin \frac{k\pi}{n} > \end{aligned}$$

> 0 , για κάθε $k = 1, 2, \dots, n-1$. Επίσης, $\left| \sin \frac{k\pi}{n} - \mathbf{i} \cos \frac{k\pi}{n} \right| = 1$, για κάθε $k = 1, \dots, n-1$.

Παίρνοντας λοιπόν τα μέτρα στη σχέση $n = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - z^k)$ προκύπτει ότι $n = \prod_{k=1}^{n-1} |1 - z^k| =$

$$= \prod_{k=1}^{n-1} \left(2 \sin \frac{k\pi}{n} \right) = 2^{n-1} \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Άρα $\sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{2\pi}{n} \cdots \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$



Είδαμε ότι αν λ είναι μια ιδιοτιμή της

$$f: V \rightarrow V, \text{ τότε } \ker(f - \lambda L_V) = V(\lambda)$$

Εφόσον λ ιδιοτιμή, υπάρχει μη μηδενικό
διάνυσμα $v \in V$ με $f(v) = \lambda v \Leftrightarrow (f - \lambda L_V)(v) = 0$
Επομένως $\ker(f - \lambda L_V) \neq \{0\}$

Συνεπώς η $f - \lambda L_V$ ^η $V(\lambda)$ δεν είναι ισομορφισμός
και συνεπώς, αν $A = (f: \hat{v})$ ως προς τη
βάση του $\hat{v}$ του V , τότε ο πίνακας της

$f - \lambda L_V$ ως προς τη βάση είναι ο $A - \lambda I_n$,

($n = \dim V$) και επειδή $f - \lambda L_V$ όχι ισομορφι-
σμός έπεται ότι $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Αντιστρόφως, $\det(A - \lambda I_n) = 0 \Leftrightarrow f - \lambda L_V$
όχι ισομορφισμός, άρα $V(\lambda) = \ker(f - \lambda L_V) \neq \{0\}$

Άρα υπάρχει $v \in V \setminus \{0\}$ με $f(v) - \lambda v = 0 \Leftrightarrow$
 $f(v) = \lambda v$ και το v είναι ιδιοδιάνυσμα
της f .

Άρα οι ιδιοτιμές της f είναι οι ρίζες
του πολωνύμου

$$\chi_f(x) = \det(A - x I_n)$$

Το $\chi_f(x)$ δεν εξαρτάται από τη βάση
 $\hat{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ που χρησιμοποιούμε.

Πράγματι, αν $P = (L_V: \hat{w}, \hat{v})$ πίνακας
αλλαγής βάσης, $A = (f: \hat{v})$ και φυσικά

$$P^{-1} = (L_V: \hat{v}, \hat{w}), \text{ όπου } \hat{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$$

τότε αν $B = (f: \hat{w})$ θα έχουμε

$$\begin{aligned} B = (f: \hat{w}) &= (L_V: \hat{w}) (f: \hat{v}) (L_V: \hat{w}, \hat{v}) = \\ &= P^{-1} A P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα, } B - \lambda I_n &= P^{-1} A P - \lambda P^{-1} P = \\ &= P^{-1} (A - \lambda I_n) P \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det(B - \lambda I_n) &= \det(P^{-1}) \det(A - \lambda I_n) \cdot (\det P) = \\ &= \det(A - \lambda I_n). \end{aligned}$$

Το $\chi_f(x) = \det(A - xI_n)$ λέγεται

χαρακτηριστικό πολυώνυμο της f και οι ρίζες της είναι ακριβώς οι ιδιοτιμές της.

Το $\det(A - xI_n)$ λέγεται επίσης χαρακτηρι-
στικό πολυώνυμο του πίνακα A .

Παραδείγματα: 4) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ τέ

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3 \quad \text{και} \quad f(e_3) = 2e_1 - e_2 + 2e_3$$

όπου $\hat{e} = (e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1))$
η βασίδα του $\mathbb{R}^3$.

$$\text{Τότε } A = (f: \hat{e}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Επομένως } \chi_f(x) = |A - xI_3| = \begin{vmatrix} -x & 0 & 2 \\ 1 & -x & -1 \\ 0 & 1 & 2-x \end{vmatrix} =$$
$$= x^2(2-x) + 2 - x = (2-x)(x^2+1)$$

Η μοναδική πραγματική ρίζα το 2.

Μοναδική ιδιοτιμή το 2.

Εύρεση του $V(2)$:

Έστω $(x, y, z) \in V(2)$. Τότε $f(x, y, z) =$
 $= 2(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$, άρα.

$$(A - 2I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \\ y = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z. \\ x = z \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 0. \end{cases}$$

Ένα μη τριδενικό διάνυσμα του $V(z)$ είναι της μορφής $(z, 0, z) = z(1, 0, 1)$, όπου $z \neq 0$

$$\text{Άρα } V(z) = \langle (1, 0, 1) \rangle = \langle e_1 + e_3 \rangle.$$

Αν ορίσουμε την f με τον ίδιο πίνακα ως προς την κανονική βάση του $\mathbb{C}^3$ και όχι του $\mathbb{R}^3$, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμότης f γίνεται

$$\chi_f(x) = (2-x)(x^2+1) = (2-x)(x-i)(x+i),$$

όπου i η φανταστική μονάδα.

Στο $\mathbb{C}$ ιδιοτιμές είναι τώρα οι $2, i, -i$.
Για το 2 τα πράγματα δεν αλλάζουν και

$$\bullet \quad V(2) = \langle e_1 + e_3 \rangle.$$

$$V(i) = \left\{ (A - iI_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 & 2 \\ 1 & -i & -1 \\ 0 & 1 & 2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -ix + 2z = 0 \\ x - iy - z = 0 \\ y + (2-i)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{ix} = 2z \\ ix = 2z \\ x - iy - z = 0 \\ y + (2-i)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2i^{-1}z = -2iz \\ -2iz - iy - z = 0 \\ y = (i-2)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2iz \\ iy = -z(2i+1) \\ y = (i-2)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2iz \\ y = (-i)(-z)(2i+1) = iz(2i+1) \\ y = (i-2)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2iz \\ y = (-2+i)z \\ y = (i-2)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2iz \\ y = (-2+i)z \end{cases}$$

$$\text{Άρα } (x, y, z) = (-2iz, (-2+i)z, z) = z(-2i, -2+i, 1) = z(-2ie_1 + (-2+i)e_2 + e_3)$$

$V(i) = \langle -2ie_1 + (-2+i)e_2 + e_3 \rangle$, και
 ένα ιδιοδιάνυσμα με ιδιοτιμή i είναι
 της μορφής $z(-2i, -2+i, 1)$, $z \neq 0$.

$$V(-i) = \left\{ \begin{pmatrix} i & 0 & 2 \\ 1 & i & -1 \\ 0 & 1 & 2+i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ix + 2z = 0 \\ x + iy - z = 0 \\ y + (2+i)z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -i^{-1}2z = 2iz \\ 2iz + iy - z = 0 \\ y = -(2+i)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2iz \\ iy = z(1-2i) \\ y = -(2+i)z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2iz \\ y = z(-i)(1-2i) \\ y = z(-i-2) = -(2+i)z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2iz \\ y = -(2+i)z \end{cases}$$

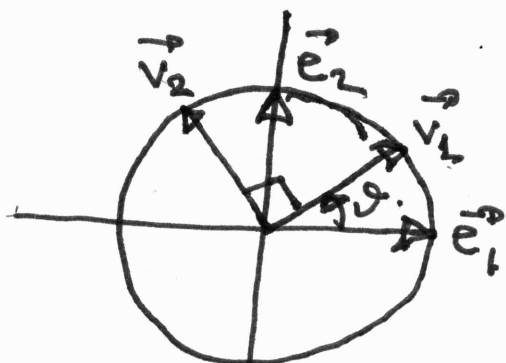
$$\text{Άρα } (x, y, z) = (2iz, -(2+i)z, z) = z(2i, -(2+i), 1)$$

$$\text{Επομένως } V(-i) = \langle (2i, -(2+i), 1) \rangle$$

Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $-i$ είναι της μορφής

$$z(2i, -(2+i), 1), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

2) Στροφή στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ κατά γωνία ϑ .



Τριγωνομετρικός κύκλος

$$\text{Έχουμε } f(\vec{e}_1) = \vec{v}_1 = \cos \vartheta \cdot \vec{e}_1 + \sin \vartheta \cdot \vec{e}_2$$

$$\text{και } f(\vec{e}_2) = \vec{v}_2 = \cos(\vartheta + \frac{\pi}{2}) \cdot \vec{e}_1 + \sin(\vartheta + \frac{\pi}{2}) \cdot \vec{e}_2 =$$

$$= \cos(\frac{\pi}{2} - (-\vartheta)) \vec{e}_1 + \sin(\frac{\pi}{2} - (-\vartheta)) \vec{e}_2 =$$

$$= \sin(-\vartheta) \vec{e}_1 + \cos(-\vartheta) \vec{e}_2 = -\sin \vartheta \vec{e}_1 + \cos \vartheta \vec{e}_2$$

Ο πίνακας της f ως προς τη βάση $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\text{είναι } A = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το

$$\chi_f(x) = \begin{vmatrix} \cos \vartheta - x & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta - x \end{vmatrix} =$$

$$= (\cos \vartheta - x)^2 + \sin^2 \vartheta = \cos^2 \vartheta - 2x \cos \vartheta + x^2 + \sin^2 \vartheta = x^2 - 2x \cos \vartheta + 1 \quad \text{ή διακρίνουσα}$$

$$\Delta = 4 \cos^2 \vartheta - 4 = 4(\cos^2 \vartheta - 1) = -4 \sin^2 \vartheta.$$

Άρα, αν $\sin \vartheta \neq 0 \Leftrightarrow \vartheta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ τότε η διακρίνουσα του $\chi_f(x)$ είναι αρνητική, επομένως η γραφή f κατά γωνία ϑ δεν έχει ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα.

Αν $\vartheta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, τότε $\sin \vartheta = 0$ και $\cos \vartheta = 1$.

Άρα $\chi_f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ με ιδιοτιμή 1 .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad \text{και κάθε μη μηδενικό}$$

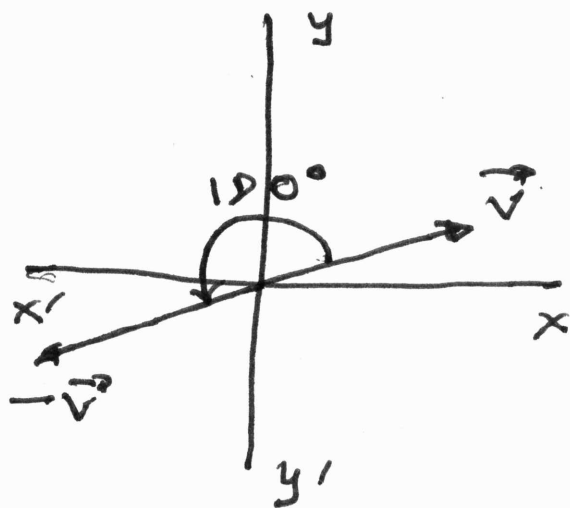
διάνυσμα είναι ιδιοδιάνυσμα. ($f = I_{\mathbb{R}^2}$)

Αν $\vartheta = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, τότε $\sin \vartheta = 0$ και $\cos \vartheta = -1$.

Άρα $\chi_f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$ με ιδιοτιμή -1 .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_2 \quad \text{και κάθε μη μηδενικό}$$

διάνυσμα είναι ιδιοδιάνυσμα της
στρόφης f με $f(v) = -v \quad \forall v \in \mathbb{R}^2$.



Στροφή
κατά 180°

Παράδειγμα: θεωρούμε τη βάση του $\mathbb{R}^4$

$$\hat{v} = (\underbrace{e_1 - e_3}_{v_1}, \underbrace{e_2 + e_4}_{v_2}, \underbrace{e_1 + e_3}_{v_3}, \underbrace{e_1 + e_4}_{v_4})$$

και την $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ με $f(v_1) = -\frac{3}{2}v_1 + \frac{3}{2}v_2 - \frac{3}{2}v_3 - v_4$
 $f(v_2) = 2v_1 - 3v_2 + v_3 + 3v_4$, $f(v_3) = \frac{3}{2}v_1 - \frac{5}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_3 + 4v_4$
 και $f(v_4) = 2v_1 - v_2 + v_3 + v_4$.

Να βρεθούν: α) Το $\chi_f(x)$, β) οι ιδιοτιμές και
τα ιδιοδιάνυσμα της f ως προς την κανονική
βάση $\hat{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ του $\mathbb{R}^4$.

Λύση: Ο πίνακας $A = (f: \hat{v}) = \begin{pmatrix} -3/2 & 2 & 3/2 & 2 \\ 3/2 & -3 & -5/2 & -1 \\ -3/2 & 1 & 1/2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\text{Es sei } P = (L_{\mathbb{R}^4}: \hat{v}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Daher } P^{-1} = (L_{\mathbb{R}^4}: \hat{e}, \hat{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Endomorphism } (f: \hat{e}) = (L_{\mathbb{R}^4}: \hat{v}, \hat{e}) (f: \hat{v}) (L_{\mathbb{R}^4}: \hat{e}, \hat{v}) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3/2 & 2 & 3/2 \\ 3/2 & -3 & -5/2 \\ -3/2 & 1 & 1/2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ -1/2 & -5/2 & -2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Also } \det(f) = \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 \\ -1/2 & -5/2 & -2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_f(x) = \det \begin{pmatrix} (1-x) & 3 & 5 & 3 \\ -1/2 & (-5/2-x) & -2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & (-1/2-x) & -1/2 \\ 1 & 1 & 1/2 & (-1-x) \end{pmatrix} =$$

$$= \dots \text{ not feasible!} = x^4 + 3x^3 + x^2 + 4 =$$

$$= x^4 + 2x^3 + x^3 + 2x^2 - x^2 + 4 =$$

$$= x^3(x+2) + x^2(x+2) - (x^2-4) =$$

$$= (x+2)(x^3 + x^2 - x + 2) =$$

$$\begin{aligned}
 &= (x+2)(x^3+2x^2-x^2-2x+x+2) = \\
 &= (x+2)(x^2(x+2) - x(x+2) + (x+2)) = \\
 &= (x+2)^2(x^2-x+1)
 \end{aligned}$$

Οι ρίζες του x^2-x+1 είναι μιγαδικές.
Αρα. (δίναν) ιδιοτιμή το -2 .

Αν $B = (f: \hat{e})$, τότε

$$B + 2I_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 \\ -1/2 & -1/2 & -2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ L & L & 1/2 & L \end{pmatrix}$$

$$\text{Τώρα } (B + 2I_4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 3y + 5z + 3w \\ -1/2x - 1/2y - 2z - 1/2w \\ -1/2x - 1/2y - 3/2z - 1/2w \\ x + y + 1/2z + w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Κάνουμε γραμμοναδίες:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 \\ -1/2 & -1/2 & -2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & -3/2 & -1/2 \\ L & L & 1/2 & L \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_2 \rightarrow 2\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \rightarrow 2\Gamma_3 \\ \Gamma_4 \rightarrow 2\Gamma_4}} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 \\ -1 & -1 & -4 & -1 \\ -1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 3\Gamma_4 \\ \Gamma_4 \rightarrow \Gamma_4 + 2\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - \Gamma_2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -7 & 0 \\ -1 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L' = 4'} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\Gamma_4 \xrightarrow{\frac{1}{7}} \Gamma_4 \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\Gamma_2 \xrightarrow{\Gamma_2 + 4\Gamma_4} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow -\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } \begin{cases} x+y+w=0 \\ z=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y-w \\ z = 0. \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y-w \\ y \\ 0 \\ w \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + w \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Άρα } V(-2) = \langle (-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 0, 1) \rangle = \langle -e_1 + e_2, -e_1 + e_4 \rangle \text{ και}$$

$\dim V(-2) = 2$. Ένα ιδιοδιάνυσμα της f είναι μη μηδενικός ^{γραμμικός} συνδυασμός των $-e_1 + e_2$ και $-e_1 + e_4$.

①

Πίνακες με στοιχεία πολυώνυμα

Ένας $m \times n$ πίνακας $A(x) = (a_{ij}(x))$ του οποίου τα στοιχεία είναι πολυώνυμα είναι

για παράδειγμα ο $A(x) = \begin{pmatrix} 2x^3 - x^2 + x + 1 & x^3 + 2x \\ x^3 - 2x^2 & x^2 + x + 1 \end{pmatrix}$

Επιλέγουμε τη μεγαλύτερη τιμή του εκθέτη που εμφανίζεται το x . Εδώ είναι το 3.

Γράφουμε $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -x^2 + x + 1 & 2x \\ -2x^2 & x^2 + x + 1 \end{pmatrix}$

Στη συνέχεια επιλέγουμε την αμέσως μικρότερη τιμή του εκθέτη και παίρνουμε τον πίνακα με συντελεστές το x^2 .

Έχουμε $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} x+1 & 2x \\ 0 & x+1 \end{pmatrix}$
και προχωράμε κατ' αυτόν τον τρόπο.

Έτσι $A(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Είναι προφανές ότι κάθε πίνακας $m \times n$ με στοιχεία πολυώνυμα και μέγιστη εμφανιζόμενη τιμή του x να είναι $k \geq 0$ γράφεται

στη μορφή $B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + \dots + B_1 x + B_0$ όπου

(2)

B_i $n \times n$ πίνακες για κάθε $i = 0, 1, \dots, k$.

Γίνεται προφανές ότι η γραφή αυτή είναι μοναδιαία γιατί ο B_k έχει στοιχεία ~~από τους~~ ^{στα στοιχεία}

συντελεστές της μέγιστης δύναμης x^k που εμφανίζεται στα στοιχεία του $A(x)$,

ο B_{k-1} έχει στοιχεία τους συντελεστές του

x^{k-1} που εμφανίζεται στα στοιχεία του $A(x)$, κ.ο.κ. και τέλος ο B_0 έχει στοιχεία τους σταθερούς όρους του $A(x)$.

Αν λοιπόν $B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + \dots + B_1 x + B_0 =$

$$= 0_{n \times n} \iff B_0 = B_1 = \dots = B_k = 0_{n \times n}$$

Πολυωνυμικές παραστάσεις πίνακα - πολυωνυμικές παραστάσεις γραμμικής απεικόνισης $f: V \rightarrow V$

Έστω $g(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0 \in F[x]$.

Συμπρολίζουμε $f \in g(A)$, όπου A ένας $n \times n$

πίνακας του πίνακα

$$g(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n$$

Αν $f: V \rightarrow V$ είναι μια γραμμική απεικόνιση f^0 ^ή f , τότε ως γνωστόν γράφουμε

$f^2 = f \circ f: V \rightarrow V$, $f^3 = f \circ f \circ f$ και λοιπά. Επίσης γράφουμε $f^0 = I_V$ την ταυτότητα

(3)

ανεικόνιση του $L_V: V \rightarrow V / L_V(v) = v \ \forall v \in V$.

Τότε γράφουμε

$$g(f) = a_k f^k + a_{k-L} f^{k-L} + \dots + a_L f + a_0 I_V$$

Είναι προφανές ότι αν A είναι ο πίνακας της $f: V \rightarrow V$ ως προς μια βάση $\hat{V} = (v_1, \dots, v_n)$ του V , τότε ο πίνακας της $g(f) = \sum_{i=0}^k a_i f^i$

είναι ο

$$g(A) = a_k A^k + a_{k-L} A^{k-L} + \dots + a_L A + a_0 I_n,$$

(ως προς την ίδια βάση $\hat{V}$).

Πρόταση: Έστω A ένας $n \times n$ πίνακας και

$C(x) = B_k x^k + B_{k-L} x^{k-L} + \dots + B_1 x + B_0$
 ένας πίνακας με πολυώνυμο ο οποίος αντιμετατίθεται με τον $A \iff$ όλοι οι πίνακες $B_0, B_L, B_2, \dots, B_k \in F^{n \times n}$ αντιμετατίθενται με το A .

$$\text{Αν } (A - x I_n) C(x) = h(x) I_n, \text{ όπου } h(x)$$

πολυνόμο βαθμού $k+L$ (γιατί το $x I_n$ όταν πολλαπλασιαστεί με το $B_k x^k$ θα δώσει $-B_k x^{k+1}$)

$$\text{τότε } h(A) = 0.$$

Απόδειξη: Έστω $h(x) = \gamma_{k+1} x^{k+1} + \gamma_k x^k + \dots + \gamma_1 x + \gamma_0$

όπου $\gamma_i \in F \ \forall i = 0, 1, \dots, k+L$

(4)

Τότε έχουμε:

~~$$A \cdot C(x) = A(B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + \dots + B_1 x + B_0)$$~~

$$A \cdot C(x) = A(B_k x^k + B_{k-1} x^{k-1} + \dots + B_1 x + B_0) =$$

$$= AB_k x^k + AB_{k-1} x^{k-1} + \dots + AB_1 x + AB_0$$

και

$$-x I_n C(x) = -B_k x^{k+1} - B_{k-1} x^k - \dots - B_1 x^2 - B_0 x$$

Επομένως $(A - x I_n) C(x) =$

~~$$AB_k x^k + AB_{k-1} x^{k-1} + \dots + AB_1 x + AB_0 - B_k x^{k+1} - B_{k-1} x^k - \dots - B_1 x^2 - B_0 x$$~~

$$= -B_k x^{k+1} + (AB_k - B_{k-1}) x^k + (AB_{k-1} - B_{k-2}) x^{k-1} +$$

$$+ \dots + (AB_1 - B_0) x + AB_0 = h(x) I_n =$$

$$= (\gamma_{k+1} x^{k+1} + \gamma_k x^k + \dots + \gamma_1 x + \gamma_0) I_n =$$

$$= \gamma_{k+1} x^{k+1} I_n + \gamma_k x^k I_n + \dots + \gamma_1 x I_n + \gamma_0 I_n$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές των ίδιων δυνάμεων του x παίρνουμε:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -B_k = \gamma_{k+1} I_n & \text{επι } A^{k+1} \\ AB_k - B_{k-1} = \gamma_k I_n & \text{επι } A^k \\ AB_{k-1} - B_{k-2} = \gamma_{k-1} I_n & \text{επι } A^{k-1} \\ \dots & \dots \\ AB_1 - B_0 = \gamma_1 I_n & \text{επι } A \\ AB_0 = \gamma_0 I_n & \text{επι } A^0 = I_n \end{array} \right.$$

Πολλαπλασιάσουμε με συνάρτις του A , όπως στο προηγούμενο σχήμα και έχουμε:

$$- \cancel{A^k B_k} = \gamma_{k+1} A^{k+1}$$

$$\cancel{A^{k+1} B_k} - \cancel{A^k B_{k-1}} = \gamma_k A^k.$$

$$\cancel{A^k B_{k-1}} - \cancel{A^{k-1} B_{k-2}} = \gamma_{k-1} A^{k-1}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\cancel{A^3 B_2} - \cancel{A^2 B_1} = \gamma_2 A^2.$$

$$\cancel{A^2 B_1} - \cancel{A B_0} = \gamma_1 A.$$

$$\cancel{A B_0} = \gamma_0 I_n.$$

Αν προσδεύσουμε κατά μέλη, το πρώτο μέλος δίνει τον μηδενικό πίνακα $0_{n \times n}$ και το δεύτερο μέλος δίνει τον πίνακα

$$\gamma_{k+1} A^{k+1} + \gamma_k A^k + \gamma_{k-1} A^{k-1} + \dots + \gamma_1 A + \gamma_0 I_n =$$

$$= h(A). \text{ Επομένως } h(A) = 0_{n \times n}.$$

Μπορούμε να κάνουμε την ίδια ανάλυση για απεικονίσεις $f: V \rightarrow V$ (γραμμικές), παρατηρώντας ότι αντί για τους πίνακες $B_0, B_1, \dots, B_k$ να θεωρήσουμε γραμμικές απεικονίσεις $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_k \in \text{End}(V)$ που αντιπροσωπεύονται με την f . Αυτό όμως δεν χρειάζεται

γιατί αν $A = (f| \hat{v})$, $\hat{v} = (v_1, \dots, v_n)$ βάση του V , τότε

(6)

ο $h(A) = 0_{n \times n}$ είναι ο πίνακας της γραμμικής απεικόνισης

$h(f) = \gamma_{k+1} f^{k+1} + \gamma_k f^k + \dots + \gamma_1 f + \gamma_0 I_V$ και κατά συνέπεια $h(f) = 0: V \rightarrow V$ ($v \mapsto \vec{0}$)

Πρόταση: (Θεώρημα Cayley-Hamilton).

Έστω $f: V \rightarrow V$ (ισομορφισμός $A = (f: \hat{V}) \in F^{n \times n}$)

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\chi_f(x) = \chi_A(x) = \det(A - xI).$$

Τότε $\chi_f(f) = 0: V \rightarrow V$ (μεινερική απεικόνιση)

$$\text{και } \chi_f(A) = \chi_A(A) = 0_{n \times n}.$$

Απόδειξη: Προκύπτει από την προηγούμενη

πρόταση γιατί $(A - xI_n) \operatorname{adj}(A - xI_n) =$

$$= \det(A - xI_n) I_n = \chi_A(x) I_n.$$

(Στη θέση του $C(x)$ βάλαμε τον $\operatorname{adj}(A - xI_n)$ που αντιστρέφεται με τον A και το $h(x)$ εδώ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A (ή της f)).

Παρατήρηση: Τα στοιχεία του $\operatorname{adj}(A - xI_n)$

έχουν βαθμό κ το πολύ $n-1$.

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι ελαττωτές ορίζονται $\det(A_{ji} - xI_n) =$

(7)

$= \det(A_{ji} - xI_{n-L})$ είναι βαθμού (ως προς x) το πολύ $n-L$.



Αν $i \neq j$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1L} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22}-x & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \boxed{a_{ii}-x} & & \vdots \\ \vdots & a_{ij} & \dots & \boxed{a_{ji}-x} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{Ln} & \dots & \dots & \dots & \boxed{a_{nn}-x} \end{pmatrix}$$

↑
βαθμός $n-2$

για $i \neq j$ και
και για $i=j$
 $\det.(A_{ii} - xI_{n-L}) =$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1L} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{22}-x & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{ij} & \dots & \boxed{a_{ii}-x} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & a_{Ln} & \dots & \dots & \dots & \boxed{a_{nn}-x} \end{pmatrix}$$

βαθμός $n-1$

Το θεώρημα Cayley - Hamilton μας λέει ότι ένας ενδομορφισμός $f: V \rightarrow V$ (αντίστοιχα ένας πίνακας $n \times n$ A) μηδενίζει το χαρακτηριστικό του (του)

πολυώνυμο $\chi_f(f) = 0$ ($\chi_A(A) = 0$)

Ερώτημα: Το $\chi_f(x)$ είναι πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού που μηδενίζει την f ή το ελάχιστο τον πίνακα της A ;

Αντιπαράδειγμα:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(x) = (x-2)^2(1-x) = -(x-2)^2(x-1)$$

Αλλά αν $m(x) = (x-2)(x-1)$, τότε

$$\begin{aligned} m(A) &= (A-2I)(A-I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{3 \times 3} \end{aligned}$$

Πρόταση: Έστω $A \in F^{n \times n}$. Τότε υπάρχει

μοναδικό μονικό πολυώνυμο ελαχίστου βαθμού που μηδενίζει τον A .

(9)

Το μονικό αυτό πολυώνυμο λέγεται
ελάχιστο πολυώνυμο του A (ή της απεικόνισης
 $f: V \rightarrow V$). και συμβολίζεται με $m_A(x)$ (ή $m_f(x)$)

~~Απόδειξη:~~ Το $m_A(x)$ διαφέρει κατά πολυώνυμο
που μηδενίζει τον A (ή την f) και κατά
συνέπεια, ~~το~~ ελάχιστο είναι μονικό είναι
μοναδικό.

Απόδειξη: Έστω $m(x)$ και $h(x)$ (ή h σταθερά)
~~πολυώνυμα~~ που μηδενίζουν τον A , ~~σταθερά~~
~~πολυώνυμο~~ με $m(x)$ μονικό ελάχιστου βαθμού.

Διαφορέμε το $h(x)$ με $m(x)$ και παίρνουμε

$$h(x) = m(x)\pi(x) + v(x),$$

όπου $v(x) = 0$ ή $\deg v(x) < \deg m(x)$.

Αν $v(x) \neq 0$, τότε $0 = h(A) = \underbrace{m(A)}_0 \pi(A) + v(A) =$
 $= v(A)$. Άρα το $v(A)$ είναι 0 ή ~~σταθερά~~
μηδενικό πολυώνυμο με ~~σταθερά~~ $v(A) = 0$ και

$\deg v(x) < \deg m(x)$. Αυτό είναι άτοπο

λόγω της ελαχιστικότητας του $m(x)$. Άρα $v(x) = 0$ και συνεπώς

$$m(x) \mid h(x).$$

Στην ειδική περίπτωση που $\deg m(x) =$
 $= \deg h(x)$ και $m(x) \mid h(x)$ μονικά ελάχ. βαθ.
θα είχε με $m(x) \mid h(x)$ και $h(x) \mid m(x)$.

Άρα $m(x) = \chi(x)$

Άρα το μονικό πολυώνυμο ελάχιστου βαθμού που μηδενίζει τον A είναι μοναδικό και διαιρεί κάθε άλλο πολυώνυμο που μηδενίζει τον A . #.

Ειδικότερα $m_A(x) \mid \chi_A(x)$ (ισοδύναμα $m_f(x) \mid \chi_f(x)$).

Άρα κάθε ανάγωγος παράγοντας $p(x)$ του $m_A(x)$ διαιρεί και το $\chi_A(x)$.

Ισχύει όμως και το αντίστροφο!

Πρόταση: Κάθε ανάγωγος παράγοντας του $\chi_A(x)$

διαιρεί το $m_A(x)$, άρα το $\chi_A(x)$ και το

$m_A(x)$ έχουν τους ίδιους ανάγωγους παράγοντες (υψωμένους σε διαφορετική εν γένει δύναμη

Απόδειξη: Έστω $m_A(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$.

Παρατηρούμε ότι $A^k - x^k I_n = A^k - (xI_n)^k =$

$$= (A - xI_n)(A^{k-1} + A^{k-2}x + A^{k-3}x^2 + \dots + x^{k-1}I_n)$$

Γενικά $a_k \cancel{A^k} \cdot A$

$$a_i A^i - a_i x^i I_n = a_i (A^i - (xI_n)^i) =$$

$$= a_i (A - xI_n)(A^{i-1} + A^{i-2}x + \dots + x^{i-1}I_n)$$

(11)

Επομένως

$$A^k - x^k I_n = (A - x I_n) C_k(x)$$

$$a_{k-1} A^{k-1} - a_{k-1} x^{k-1} I_n = (A - x I_n) a_{k-1} C_{k-1}(x)$$

$$a_{k-2} A^{k-2} - a_{k-2} x^{k-2} I_n = (A - x I_n) a_{k-2} C_{k-2}(x)$$

⋮

$$a_1 A - a_1 x I_n = (A - x I_n) a_1$$

$$a_0 A^0 - a_0 I = 0$$

$$\text{Επομένως } (A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_0 I_n) \rightarrow$$

$$- (x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_0) I_n$$

$$= (A - x I_n) (C_k(x) + a_{k-1} C_{k-1}(x) + \dots + a_1 I_n) = (A - x I_n) C(x)$$

$$\text{Add } A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0 I_n =$$

$$= m_A(A) = 0 \text{ for } (x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0) =$$

$$= m_A(x)$$

$$\text{Επομένως } 0 = m_A(x) I_n = (A - x I_n) C(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -m_A(x) I_n = (A - x I_n) C(x)$$

Παίρνουμε επί ποτε:

$$|-m_A(x) I_n| = |A - x I_n| |C(x)| \Leftrightarrow$$

$$\infty (-1)^n m_A(x)^n = \chi_A(x) |C(x)|$$

12

Αρα κάθε ανάγωγο παράγοντας $p(x)$
του $\chi_A(x)$ διαιρεί το $m_A(x)^n$ και

επειδή είναι ανάγωγος, $p(x) \mid m_A(x)$

Αρα τα $m_A(x)$ και $\chi_A(x)$ έχουν τους

ίδιους ανάγωγους παράγοντες. $\#$.

Άσκηση: Έστω r η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο της $f: V \rightarrow V$, όπου $\dim V = n$.

Δείξτε ότι $\dim V(\lambda) = \dim \ker(f - \lambda I_V) \leq r$.

Απόδειξη: Έστω $L \leq k \leq r$ η διάσταση του $V(\lambda)$. Θα δείξουμε ότι $k \leq r$.

Έστω $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ μια βάση του $V(\lambda)$.

Αυτή επεκτείνεται σε μια βάση $\hat{V} = (v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ του V .

Επειδή $f(v_i) = \lambda v_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$, ο πίνακας $A = (f: \hat{V})$ είναι της μορφής

$$A = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{matrix} & B \\ \hline 0 & \Gamma \end{array} \right)$$

$k \times k$

Επομένως $\chi_f(x) = \chi_A(x) =$

$$= \det \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} \lambda - x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - x \end{matrix} & B \\ \hline 0 & \Gamma - xI_{n-k} \end{array} \right) =$$

$k \times k$

$$= \det \left(\begin{matrix} \lambda - x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda - x \end{matrix} \right)_{k \times k} \cdot \det(\Gamma - xI_{n-k}) =$$

$$= (1-x)^k \chi_f(x)$$

Υπαρ το $(1-x)^k \mid \chi_A(x)$ και επομένως

η πολλαπλότητα του 1 στο $\chi_A(x)$ είναι τουλάχιστον k , δηλαδή $k \leq r$.

Διαγωνίσιμοι πίνακες (απεικονίσεις)

Ένας πίνακας $A \in F^{n \times n}$ λέγεται διαγωνίσιμος αν είναι όμοιος με έναν διαγώνιο πίνακα, δηλαδή έναν πίνακα της μορφής

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Μια απεικόνιση $f: V \rightarrow V$. ($n = \dim V$) λέγεται διαγωνίσιμη αν ο πίνακας της ως προς κάποια βάση του V είναι διαγωνίσιμος.

Παρατήρηση: Αν $A = (f: \hat{v})$ είναι διαγωνίσιμος, τότε $A = PBP^{-1}$, όπου.

P αντιστρέψιμος και B διαγώνιος. Εφόσον ο P (και ο P^{-1}) είναι αντιστρέψιμος τότε

$$P = (L_V: \hat{u}, \hat{v}),$$

δηλαδή ο P είναι πίνακας αλλαγής βάσης και $P^{-1} = (L_V: \hat{v}, \hat{u})$,

όπου $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ νέα βάση του V .

Τότε $(f: \hat{u}) = (L_V: \hat{v}, \hat{u}) (f: \hat{v}) (L_V: \hat{u}, \hat{v}) =$
 $= P^{-1} \cdot A \cdot P = P^{-1} (P \cdot B \cdot P^{-1}) P = B$ διαγώνια
δηλαδή υπάρχει βάση $\hat{u}$ ως προς την
οποία ο $(f: \hat{u})$ είναι διαγώνιος της
μορφής

$$(f: \hat{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (1)$$

Άρα η βάση $\hat{u} = (u_1, \dots, u_n)$ αποτελείται
από ιδιοδιανύσματα της f .

Αντιστρόφως, αν υπάρχει βάση
 $\hat{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ που αποτελείται

από ιδιοδιανύσματα της f , τότε
 $f(u_i) = \lambda_i u_i$ και συνεπώς

ο πίνακας $(f: \hat{u})$ έχει την διαγώνια
μορφή (1).

Αν $\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}, \dots, \lambda_{p_t}$ είναι οι διακεκριμένοι
ιδιοτιμές της f , τότε μπορούμε να

αναδιατάξουμε τη βάση $\hat{u} = (u_{p_1}, u_{p_2}, \dots, u_{p_t})$

και να πάρουμε μια νέα βάση

$$\hat{u}' = (\underbrace{u'_1, \dots, u'_{r_1}}_{\substack{\text{ιδιοτιμή } \lambda_{r_1}}}, \underbrace{u'_{r_1+1}, \dots, u'_{r_1+r_2}}_{\substack{\text{ιδιοτιμή } \lambda_{r_2}}}, \dots, \underbrace{u'_{r_1+\dots+r_{t-1}+1}, \dots, u'_n}_{\substack{\text{ιδιοτιμή } \lambda_{r_t}}})$$

και ο πίνακας της f ως προς την $\hat{u}'$ θα έχει τη μορφή

$$\begin{pmatrix} \lambda_{r_1} I_{r_1} & & 0 \\ & \lambda_{r_2} I_{r_2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \lambda_{r_t} I_{r_t} \end{pmatrix}$$

δηλαδή ομαδοποιούμε τις ίδιες ιδιοτιμές.

(r_i είναι η πολλαπλότητα της ιδιοτιμής λ_{r_i} στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο).

$$\text{Βρε } \chi_f(x) = (\lambda_{r_1} - x)^{r_1} (\lambda_{r_2} - x)^{r_2} \dots (\lambda_{r_t} - x)^{r_t}.$$

(Τα $r_1, r_2, \dots, r_t$ είναι διαφορετικοί δείκτες από το σύνολο $\{1, 2, \dots, n\}$).

Κριτήριο 1: (Διαγωνισιμότητα)

(Εδώ, αντί να γράφουμε $\lambda_{r_1}, \lambda_{r_2}, \dots, \lambda_{r_t}$ για τις διακεκριμένες ιδιοτιμές της f , θα γράφουμε $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$)

Η λ_1 έχει πολλαπλότητα r_1 , η λ_2 έχει πολ/τα r_2 κ.ο.κ.

Αν δοθούν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές του πίνακα A (ή του f), τότε ο A (ή f) είναι διαγωνίσιμος (διαγωνίσιμη) αν και μόνο αν

$$V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_t).$$

Απόδειξη: Επαναλαμβάνουμε την απόδειξη ότι το άθροισμα $V(\lambda_1) + \dots + V(\lambda_t)$ είναι ευθύ, όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ διακεκριμένες ιδιοτιμές της f . Όσοι το έχουν καταλάβει προχωρούν στην κύρια απόδειξη.

Έστω $w_1 \in V(\lambda_1), w_2 \in V(\lambda_2), \dots, w_t \in V(\lambda_t)$.

με $w_1 + w_2 + \dots + w_t = 0$. Πρέπει να δείξουμε ότι $w_1 = w_2 = \dots = w_t = 0$.

Επαγωγή ως προς t . Για $t=1$ δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε.

Έστω ότι το άθροισμα είναι ευθύ για $t \geq 1$ διακεκριμένες ιδιοτιμές.

Υποθέτουμε ότι έχουμε $t+1$ διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t, \lambda_{t+1}$ και

$w_1 \in V(\lambda_1), \dots, w_t \in V(\lambda_t), w_{t+1} \in V(\lambda_{t+1})$. Η

$$w_1 + w_2 + \dots + w_t + w_{t+1} = 0. \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την f και παίρνουμε:

$$f(w_1) + f(w_2) + \dots + f(w_t) + f(w_{t+1}) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_t w_t + \lambda_{t+1} w_{t+1} = 0 \quad (2)$$

Αν την (1) την πολλαπλασιάσουμε με λ_{t+1}
θα πάρουμε

$$\lambda_{t+1} w_L + \lambda_{t+1} w_2 + \dots + \lambda_{t+1} w_t + \lambda_{t+1} w_{t+1} = 0 \quad (3)$$

Αφαιρούμε τις σχέσεις (2) και (3) και παίρνουμε

$$(\lambda_L - \lambda_{t+1}) w_L + \dots + (\lambda_t - \lambda_{t+1}) w_t = 0 \quad (4)$$

(έφυγε το w_{t+1}).

Αλλά $(\lambda_i - \lambda_{t+1}) w_i \in V(\lambda_i)$ $\forall i = L, 2, \dots, t$.
Από επαγωγή

$$(\lambda_i - \lambda_{t+1}) w_i = 0 \quad \forall i = L, \dots, t \text{ και επειδή}$$

$\lambda_i - \lambda_{t+1} \neq 0 \quad \forall i = L, \dots, t$ παίρνουμε

$w_1 = w_2 = \dots = w_t = 0$. Τότε από τη σχέση
(1) παίρνουμε ότι και $w_{t+1} = 0$.

Κύρια απόδειξη: Αν u και f είναι

διαγωνισίμη, τότε ο πίνακας της f ως προς
τη βάση u' είναι

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & & 0 \\ & \lambda_2 I_{r_2} & \\ 0 & & \ddots & \lambda_t I_{r_t} \end{pmatrix}$$

όπου έχουμε λ_1 αντί λ_{r_1} , λ_2 αντί λ_{r_2} κ.ο.κ
για τις διακεκριμένες ιδιοτιμές.

Αν $V_L = \langle u'_L, \dots, u'_{r_L} \rangle$. Τότε από τη
μορφή του πίνακα B έχουμε $f(u'_i) = \lambda_L u'_i$,
για κάθε $i = L, \dots, r_L$. Άρα $V_L \subseteq V(\lambda_L)$.
Για τον ίδιο λόγο, αν $V_2 = \langle u'_{r_L+1}, \dots, u'_{r_L+r_2} \rangle$

τότε $f(u_i') = \lambda_i u_i' \quad \forall i = r_L + 1, \dots, r_L + r_2$, άρα
 $V_2 \subseteq V(\lambda_2)$.

Γενικά αν $V_j = \langle u_{r_L + \dots + r_{j-1} + 1}', u_{r_L + \dots + r_{j-1} + 2}', \dots, u_{r_L + r_2 + \dots + r_j}' \rangle$,

τότε $f(u_i') = \lambda_j u_i'$ για κάθε

$i = r_L + \dots + r_{j-1} + 1, r_L + \dots + r_{j-1} + 2, \dots, r_L + r_2 + \dots + r_j$.

Άρα $V_j \subseteq V(\lambda_j)$. Επίσης ο V_j παράγεται από
 r_j στοιχεία της βάσης $\hat{u}'$ και συνεπώς

$\dim V_j = r_j$, άρα $\dim V_j = r_j \leq \dim V(\lambda_j)$.

Επομένως, αφού το άθροισμα $V(\lambda_L) + \dots + V(\lambda_t)$
είναι ευθύ και το άθροισμα $V_L + \dots + V_t$ είναι
ευθύ, γιατί $V_j \subseteq V(\lambda_j) \quad \forall j = L, \dots, t$.

Επομένως $n \geq \dim(V(\lambda_L) \oplus \dots \oplus V(\lambda_t)) =$

$= \dim V(\lambda_L) + \dim V(\lambda_2) + \dots + \dim V(\lambda_t) \geq$
 $\geq r_L + r_2 + \dots + r_t = n$ και συνεπώς

$\dim V_j = \dim V(\lambda_j) \iff V_j = V(\lambda_j)$
 $V_j \subseteq V(\lambda_j)$

για κάθε $j = L, \dots, t$.

Άρα $V = V(\lambda_L) \oplus \dots \oplus V(\lambda_t)$.

Αντιστρόφως, έστω $\lambda_L, \dots, \lambda_t$ οι διακριτές
ιδιοτιμές της f και $r_j = \dim V(\lambda_j) \quad \forall j = L, \dots, t$.

και $V = V(\lambda_L) \oplus \dots \oplus V(\lambda_t)$ και

$(u_L', \dots, u_{r_L}') \subset V(\lambda_L)$,

$(u_{r_L+1}', \dots, u_{r_L+r_2}') \subset V(\lambda_2)$.

$\vdots$

$(u_{r_L+\dots+r_{t-1}+1}', \dots, u_n') \subset V(\lambda_t)$.

Τότε η f δρά επί του $V(\lambda_L)$ με πολλαπλασιασμό επί λ_L , επί του $V(\lambda_2)$ με πολλαπλασιασμό επί λ_2 , κ.ο.κ.

και επί του $V(\lambda_t)$ με πολλαπλασιασμό επί λ_t .

Αν ενώσουμε τις προηγούμενες βάσεις κατά σειρά, θα πάρουμε μία βάση του $V = V(\lambda_L) \oplus \dots \oplus V(\lambda_t)$

$$\hat{u}' = (\underbrace{u'_1, \dots, u'_{r_L}}_{V(\lambda_L)}, \underbrace{u'_{r_L+1}, \dots, u'_{r_L+r_2}}_{V(\lambda_2)}, \dots, \underbrace{u'_{r_L+\dots+r_{t-1}+1}, \dots, u'_t}_{V(\lambda_t)})$$

ως προς την οποία ο πίνακας της f θα είναι ο

$$\begin{pmatrix} \lambda_L I_{r_L} & & & \\ & \lambda_2 I_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_t I_{r_t} \end{pmatrix},$$

δηλαδή η f διαγωνίζεται. $\neq$

Από την προηγούμενη ενόδειξη προκύπτει ότι αν η f είναι διαγωνίσιμη με διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_L, \lambda_2, \dots, \lambda_t$, τότε το χαρακτηριστικό της πολωνύμοιο είναι

$$\chi_f(x) = (\lambda_L - x)^{r_L} (\lambda_2 - x)^{r_2} \dots (\lambda_t - x)^{r_t},$$

όπου $r_i = \dim V(\lambda_i) \forall i = 1, \dots, t$ και αντίστροφα

αν $\chi_f(x) = (\lambda_L - x)^{r_L} (\lambda_2 - x)^{r_2} \dots (\lambda_t - x)^{r_t}$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_t$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της f και $r_i = \dim V(\lambda_i) \forall i = 1, \dots, t$, τότε η f είναι διαγωνίσιμη.

Κριτήριο 2: (Ελάχιστου πολυώνυμου).

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ είναι οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της f , τότε η f είναι διαγωνίσιμη αν και μόνο αν το ελάχιστο πολυώνυμό της $m_f(x)$ είναι το

$$m_f(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_t).$$

Απόδειξη: Προφανώς το $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_t)$ διαφέρει το $m_f(x)$. (*)

Η f είναι διαγωνίσιμη αν και μόνο αν

$$V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_t).$$

Έστω $w_i \in V(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, t$.

Αν η f είναι διαγωνίσιμη, τότε

$$(f - \lambda_1 L_V)(f - \lambda_2 L_V) \cdots (f - \lambda_t L_V)(w_i) =$$

$$\stackrel{a}{=} (f - \lambda_1 L_V) \cdots (f - \lambda_{i-1} L_V)(f - \lambda_{i+1} L_V) \cdots$$

$$\text{αυτοπαρατίθενται} \cdots (f - \lambda_t L_V)(w_i) =$$

$$= (f - \lambda_1 L_V) \cdots (f - \lambda_{i-1} L_V)(f - \lambda_{i+1} L_V) \cdots (f - \lambda_t L_V)$$

$$(f(w_i) - \lambda_i w_i) =$$

$$= (f - \lambda_1 L_V) \cdots (f - \lambda_{i-1} L_V)(f - \lambda_{i+1} L_V) \cdots (f - \lambda_t L_V)$$

$$(\lambda_i w_i - \lambda_i w_i) = (f - \lambda_1 L_V) \cdots (f - \lambda_{i-1} L_V)(f - \lambda_{i+1} L_V) \cdots$$

$$\cdots (f - \lambda_t L_V)(0) = 0.$$

Άρα η $(f - \lambda_1 L_V)(f - \lambda_2 L_V) \cdots (f - \lambda_t L_V)$

μηδενίζει κάθε $w_i \in V(\lambda_i) \forall i = 1, \dots, t$,

άρα μηδενίζει όλον τον $V = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_t)$

Άρα η f μηδενίζει το $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_t)$.

$m_f(x) \mid (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_t)$. Από το (*) προκύπτει
ότι $m_f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_t)$.

Αντιθέτως, αν $m_f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_t)$
τότε έχουμε

$$g_1(x) = (x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_t)$$

$$g_2(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_3)\dots(x-\lambda_t)$$

$\vdots$

$$g_t(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_{t-1})$$

Ουδαδί γενικά $g_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^t (x-\lambda_i)$

Τότε $(g_1(x), g_2(x), \dots, g_t(x)) = L$ γιατί
αν υπήρχε ανάγωγος παράγοντας $x-\lambda_j$ που
διαίρει τον μέγιστο κοινό διαιρέτη των
 $g_1(x), \dots, g_t(x)$, τότε θα διαιρούσε και το $g_j(x) =$
 $(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_{j-1})(x-\lambda_{j+1})\dots(x-\lambda_t)$, πράγμα
αδύνατον γιατί $x-\lambda_j \nmid x-\lambda_i$, για $i \neq j$.

Επειδή τώρα ο μ.κ.δ. $(g_1(x), \dots, g_t(x)) = L$,
υπάρχουν πολυώνυμα $h_1(x), \dots, h_t(x) \in F[x]$
μτ $h_1(x)g_1(x) + h_2(x)g_2(x) + \dots + h_t(x)g_t(x) = L$.

και άρα $h_1(f)g_1(f) + h_2(f)g_2(f) + \dots + h_t(f)g_t(f) =$
 $= L_V$.

Άρα $\forall v \in V$ έχουμε:

$$h_1(f)g_1(f)(v) + h_2(f)g_2(f)(v) + \dots + h_t(f)g_t(f)(v) =$$

 $= v$.

Αλλά, εφόσον $m_f(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_t)$,
τότε $0 = m_f(f) = (f-\lambda_1 L_V)(f-\lambda_2 L_V)\dots(f-\lambda_t L_V)$

Παρατηρούμε ότι $q_j(x)(x-\lambda_j) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^t (x-\lambda_i) \cdot (x-\lambda_j) = m_f(x)$

Αρα $q_j(f)(f-\lambda_j L_V) = m_f(f) = 0$.

Συνεπώς $(f-\lambda_j L_V)(h_j(f) q_j(f)(v)) =$

$= h_j(f) \underbrace{q_j(f)(f-\lambda_j L_V)(v)}_{m_f(f)} = h_j(f) \underbrace{m_f(f)(v)}_0 =$

$= h_j(f)(0) = 0$. Επομένως $h_j(f) q_j(f)(v) \in V(\lambda_j)$

$\forall j=1, \dots, t$.

Αρα $\forall v \in V$ έχουμε

$v = \underbrace{h_1(f) q_1(f)(v)}_{\in V(\lambda_1)} + \underbrace{h_2(f) q_2(f)(v)}_{\in V(\lambda_2)} + \dots +$

$+ \underbrace{h_t(f) q_t(f)(v)}_{\in V(\lambda_t)} \in V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_t)$

Αρα $V = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_t)$ και f είναι διαγωνιστική. $\#$.

Ασκύσεις

1) Να εξεταστεί αν οι παρακάτω πίνακες είναι διαγωνιστικοί. Αν ναι, να βρεθεί ο αντίστροφός τους P , τέτοιος ώστε $PAP^{-1} = B$ διαγωνιστός

α) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Χαρακτ. πολ:

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 3-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} = (x-3)(x-2) - 1 =$$

$$= x^2 - 5x + 6 - 1 = x^2 - 5x + 5 \text{ με ρίζες (ιδιοτιμές)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Οι ιδιοτιμές είναι διαφορετικές, άρα ο A είναι διαγωνιστικός.

$$\underline{V\left(\frac{1}{2}(5+\sqrt{5})\right)}: A - \frac{1}{2}(5+\sqrt{5})I_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 - \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & 2 - \frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{\text{Γραμμικοποίηση}} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\Gamma_1}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Άρα } A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} y \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right): \begin{pmatrix} 3 - \frac{5-\sqrt{5}}{2} & L \\ L & 2 - \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & L \\ L & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \leftrightarrow \Gamma_2} \begin{pmatrix} L & -\frac{L+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & L \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{L+\sqrt{5}}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Apa. } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} y. \text{ kor.}$$

$$V\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) = \left\langle \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle. \text{ Basis } \hat{u} = \left(\begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\left(L_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} : \begin{matrix} \hat{u} \\ \uparrow \\ \text{basis} \\ \text{p.d.s.} \end{matrix}, \hat{e} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ L & L \end{pmatrix} = P^{-1}.$$

$$\text{Apa } P = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} =$$

$$= \left(L_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} : \hat{e}, \hat{u} \right)$$

$$\text{Tapi } PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{5+\sqrt{5}}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ L & L \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = (x-2)(x+5) - 8 =$
 $= x^2 + 3x - 10 - 8 = x^2 + 3x - 18 = (x-2)(x+5)$
 με διακριτές ρίζες 2 και -5.
 Άρα διαγωνίσιμος

$V(-2)$: ~~$A + I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$~~

~~$(A + I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ για να βρούμε τα γινόμενα~~

~~$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow \frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow r_2 - 3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \rightarrow \frac{1}{10}r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 + 2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$~~

6) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$. $\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} 2-x & 4 \\ 2 & -5-x \end{pmatrix} =$
 $= (x-2)(x+5) - 8 = x^2 + 3x - 10 - 8 = x^2 + 3x - 18$
 με διακριτές ρίζες $\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{-3 \pm 9}{2} =$

$\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Άρα διαγωνίσιμος

$A + 6I_2 = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \rightarrow r_1 - 4r_2} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Άρα $(A + 6I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + y = 0 \Leftrightarrow y = -2x$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ και $V(-6) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rangle$

$$A - 3I = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 2\Gamma_1} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Αρα } -x + 4y = 0 \Leftrightarrow x = 4y. \text{ Επομένως}$$

$$(A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 4y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore V(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

$$\hat{u} = (u_1, u_2), \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = e_1 - 2e_2, \quad u_2 = 4e_1 + e_2$$

$$P^{-1} = (L_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} : \hat{u}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Αρα } \begin{cases} e_1 - 2e_2 = u_1 \\ 4e_1 + e_2 = u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9e_1 = u_1 + 2u_2 \\ 9e_2 = -4u_1 + u_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e_1 = \frac{1}{9}u_1 + \frac{2}{9}u_2 \\ e_2 = -\frac{4}{9}u_1 + \frac{1}{9}u_2 \end{cases}$$

$$\text{Επομένως } P = (L_{\mathbb{R}^{3 \times 1}} : \hat{e}, \hat{u}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{Τότε } PAP^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\gamma) A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \quad \chi_A(x) = -x^3 - 6x^2 + 27x =$$

$$= -x(x-3)(x+9), \text{ ιδιοτιμές } 0, 3, -9$$

αρα διαχωρισμός.

$$V(0) = j: \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + 2\Gamma_1 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 - 2\Gamma_1}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 6 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{3}\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 2\Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{'Apa } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z. \\ y = 2z. \end{cases}$$

$$V(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ z \end{pmatrix} \right\rangle$$

↑
 u_1

$$V(3) = j: \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 + \Gamma_1} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\Gamma_1 \rightarrow -\frac{1}{2}\Gamma_1 \\ \Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{9}\Gamma_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ 'Apa } (A - 3I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \therefore V(3) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

↑
 u_2

$$V(-9) = ; \quad A + 9I = \begin{pmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_2}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -2 & 2 \\ -2 & 10 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \frac{1}{2}\Gamma_1} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 + 5\Gamma_2 \\ \Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 2\Gamma_2 \end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 24 & 6 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 12 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - 2\Gamma_3 \\ \Gamma_3 \rightarrow \frac{1}{3}\Gamma_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_1 \rightarrow \Gamma_1 - \Gamma_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{En noté vus } \begin{cases} -x + y = 0 \\ 4y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -4y \end{cases}$$

$$\text{Apa. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ -4y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad V(-9) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \right\rangle$$

↑
u₃

$$P^{-1} = (L_{\mathbb{R}^3 \times 1}: \hat{u}; \hat{e}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$P = (L_{\mathbb{R}^3 \times 1}: \hat{e}, \hat{u}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 & 1/9 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/18 & 1/18 & -2/9 \end{pmatrix}$$

$$PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 2/9 & 1/9 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/18 & 1/18 & -2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \chi_A(x) = -x^3 + 12x - 16 =$$

$$= -(x-2)^2(x+4). \text{ Ιδιότητες: } 2 \text{ (διττός)} \text{ και } -4$$

Ο πίνακας θα είναι διαγωνίσιμος αν και μόνο αν $\dim V(2) = 2$.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 8 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\Gamma_2 \rightarrow -\frac{1}{2}\Gamma_2]{\Gamma_3 \rightarrow \Gamma_3 + 5\Gamma_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = 0 \\ y - 4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = 4z \end{cases}$$

$$\text{Άρα } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V(2) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \text{ και}$$

$\dim V(2) = 1 \neq 2$. Άρα ο A δεν είναι διαγωνίσιμος.

Άλλη μέθοδος: Αν ο A ήταν διαγωνίσιμος, τότε $m_A(x) = (x-2)(x+4)$ και

$$0_{3 \times 3} = m_A(A) = (A - 2I)(A + 4I) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 8 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 8 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 2 & 2 \\ -40 & 8 & 8 \\ -10 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \text{ άρρητο.}$$

2) Αν ο $A \in F^{n \times n}$ είναι μηδενοδύναμος ($A^k = 0$, για κάποιο θετικό ακέραιο k), να βρείτε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο και τη μορφή του ελακτίστου πολυωνύμου.

Λύση: Ο A μηδενίζει το $x^k := f(x)$.

Κάθε ανάγωγος παράγοντας του $f(x)$ είναι και παράγοντας του $\chi_A(x)$. Άρα μοναδικός ανάγωγος παράγοντας το x .

Συνεπώς $\chi_A(x) = (-1)^n x^n$. Το $m_A(x)$ είναι

Τις προπ. $w_A(x) = x^p$, $1 \leq p \leq n$.

3) Ο, αριθμοί Fibonacci:

$$f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 1 + 1 = 2, f_4 = 2 + 1 = 3, f_5 = 2 + 3 = 5,$$

και γενικά $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

Να βρεθεί ο γενικός τύπος για το f_n .

Λύση:

Έστω $P_n = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$

Έχουμε τις σχέσεις $\begin{cases} f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \\ f_{n+1} = f_{n+1} \end{cases}$

Αρα $\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P_{n+1} = A P_n$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x(x-1) - 1 = x^2 - x - 1$

Τις ρίζες $p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ και $p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

$V(p_1)$: Παρατηρούμε ότι $p_1 + p_2 = 1$ και $p_1 p_2 = -1$

Αρα $\begin{pmatrix} 1-p_1 & 1 \\ 1 & -p_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2 & 1 \\ 1 & -p_1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \leftrightarrow \Gamma_1}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -p_1 \\ p_2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2 - p_2 \Gamma_1} \begin{pmatrix} 1 & -p_1 \\ 0 & 1+p_1 p_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -p_1 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -p_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Αρα $x - p_1 y = 0$

$\Leftrightarrow x = p_1 y$. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \end{pmatrix}$, και $V(p_1) =$

$= \left\langle \begin{pmatrix} p_1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Ομοίως $V(p_2) = \left\langle \begin{pmatrix} p_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$$(L_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} : \hat{u}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ L & L \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ u_L & u_L \end{matrix}$$

$$(L_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} : \hat{e}, \hat{u}) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ L & L \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{p_L - p_2} \begin{pmatrix} L & -p_2 \\ -1 & p_L \end{pmatrix}$$

$$p_L - p_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$$

$$P = (L_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} : \hat{e}, \hat{u}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -p_2 \\ -1 & p_L \end{pmatrix} \text{ kon}$$

$$P^{-1} = (L_{\mathbb{R}^{2 \times 1}} : \hat{u}, \hat{e}) = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ L & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} P \Rightarrow A^k = P^{-1} \begin{pmatrix} p_1^k & 0 \\ 0 & p_2^k \end{pmatrix} P.$$

$$\forall p_a \quad p_n = A p_{n-1} = A^2 p_{n-2} = A^{n-1} p_L = A^{n-1} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_L \end{pmatrix} =$$

$$= P^{-1} \begin{pmatrix} p_1^{n-1} & 0 \\ 0 & p_2^{n-1} \end{pmatrix} P \begin{pmatrix} 1 \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ 1 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^{n-1} & 0 \\ 0 & p_2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ L \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -p_2 \\ -1 & p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ L \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} p_1^n & p_2^n \\ p_1^{n-1} & p_2^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -p_2 \\ -1 & p_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ L \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} p_1^n - p_2^n & -p_1^n p_2 + p_2^n p_1 \\ p_1^{n-1} - p_2^{n-1} & -p_1^{n-1} p_2 + p_2^{n-1} p_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ L \end{pmatrix} \quad p_1 p_2 = -1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} p_1^n - p_2^n & p_L^{n-1} - p_2^{n-1} \\ p_1^{n-1} - p_2^{n-1} & p_L^{n-2} - p_2^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ L \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} p_1^n - p_2^n + p_L^{n-1} - p_2^{n-1} \\ p_L^{n-1} - p_2^{n-1} + p_1^{n-2} - p_2^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$p_1^n - p_2^n + p_1^{n-1} - p_2^{n-1} = p_1^{n-1} (p_L + 1) + p_2^{n-1} (p_2 + 1) =$$

$$= p_1^{n-1} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \right) + p_2^{n-1} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 \right) =$$

$$= p_1^{n-1} \frac{3+\sqrt{5}}{2} - p_2^{n-1} \frac{3-\sqrt{5}}{2} =$$

$$= p_1^{n-1} \frac{6+2\sqrt{5}}{4} - p_2^{n-1} \frac{6-2\sqrt{5}}{4} =$$

$$= p_1^{n-1} \frac{1^2 + (\sqrt{5})^2 + 2\sqrt{5}}{4} - p_2^{n-1} \frac{1^2 + (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5}}{4} =$$

$$= p_1^{n-1} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - p_2^{n-1} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = p_1^{n-1} p_1^2 - p_2^{n-1} p_2^2 =$$

$$= p_1^{n+1} - p_2^{n+1} \quad \text{① proved}$$

$$p_1^{n+1} - p_2^{n+1} + p_1^{n-1} - p_2^{n-1} = p_1^n - p_2^n$$

$$\text{Hence } p_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} p_1^{n+1} - p_2^{n+1} \\ p_1^n - p_2^n \end{pmatrix} \quad \text{②}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} p_1^{n+1} - p_2^{n+1} \\ p_1^n - p_2^n \end{pmatrix} \Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (p_1^n - p_2^n) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right].$$

Ασκηση Να βρείτε τη n -οτή δύναμη και μια τετραγωνική ρίζα του πίνακα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

Λύση: $\chi_A(x) = \det \begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & 3-x \end{pmatrix} = x^2 - 3x + 2 =$
 $= (x-1)(x-2)$. Άρα ο A είναι διαγωνίσιμος

$$V(1): \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - 2y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -2y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 u_1

$$V(2): \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ \cancel{2x} + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = -y \cdot \text{Άρα } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$
 u_2

$$P = (L_{\mathbb{R}^{2 \times 1}}: \hat{e}_1, \hat{e}_2) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{και } P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (L_{\mathbb{R}^{2 \times 1}}: \hat{e}, \hat{a})$$

$$\text{Άρα } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ και}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2^n & 2-2^{n+1} \\ -1+2^n & -1+2^{n+1} \end{pmatrix}, \text{ για κάθε } n=1, 2, \dots$$

Μια τετραγωνική ρίζα προκύπτει αν λάβουμε τις τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών 1 και 2, δηλαδή ± 1 και $\pm \sqrt{2}$

Παίρνουμε τις L και $\sqrt{2}$.

Μια τετραγωνική ρίζα του A είναι ο πίνακας

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-L & 2\sqrt{2}-L \end{pmatrix}$$

$$\text{Πράγματι, } B^2 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & 2-2\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-L & 2\sqrt{2}-L \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Θεώρημα: Αν $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ και A διαγωνίσιμος, να δείξετε ότι ο A έχει κυβική ρίζα $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$, δηλαδή $B^3 = A$.

Απόδειξη: $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$, όπου $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$

αντιστρέφιος και $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ οι ιδιοτιμές του A .

Κάθε πραγματικός αριθμός έχει μοναδική πραγματική κυβική ρίζα.

Αν $\lambda = 0$, τότε $0^3 = 0$.

Αν $\lambda > 0$, τότε $(\sqrt[3]{\lambda})^3 = \lambda$.

Αν $\lambda < 0$, τότε $(-\sqrt[3]{|\lambda|})^3 = -|\lambda| = \lambda$.

Άρα για κάθε λ_i , υπάρχει μοναδικό $\mu_i \in \mathbb{R}$ με $\mu_i^3 = \lambda_i$, $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

$$\text{Επομένως } A = P \begin{pmatrix} \mu_1^3 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n^3 \end{pmatrix} P^{-1} =$$

$$= P \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}^3 P^{-1} = \left(P \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1} \right)^3 =$$
$$= B^3, \text{ όπου } B = P \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Θέση 64: Έστω $f \in \text{End}(V)$ και $r(f) = \dim \text{Im} f = 1$

Να δείξετε ότι η f δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα μηδενοδύναμη και διαγωνιστική.
Απόδειξη:

Αν η f ήταν μηδενοδύναμη, τότε $f^k = 0$ για κάποιον θετικό ακέραιο k .
Αρα το ελάχιστο πολυώνυμο της διαίρει το x^k και αν η f ήταν διαγωνιστική $m_f(x) = x$.
Αρα $f = m_f(f) = 0$, Αλλά $f \neq 0$, γιατί $\dim \text{Im} f = 1 > 0$.

Άσκηση 65: Ένας πίνακας $A \in F^{n \times n}$ λέγεται αυτοδύναμος, αν $A^2 = A$. Αρα $A^k = A$ για κάθε θετικό ακέραιο k .

Έστω $A = \begin{pmatrix} 1/n & 1/n & \dots & 1/n \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$ ο $n \times n$ πίνακας

Είναι ο A αυτοδύναμος; Είναι διαγωνιστικός;
Λύση: Το (i,j) στοιχείο του A^2 ισούται:

$$\mu_t \sum_{s=1}^n \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2}}_{n \text{ φορές}} = \frac{1}{n^2} \cdot n = \frac{1}{n}$$

και άρα $A^2 = A$.

Ένας αυτοδύναμος πίνακας μηδενίζεται το πολυώνυμο $x^2 - x = x(x-1)$ και άρα $m_A(x) = x$ ή $m_A(x) = x-1$ ή $m_A(x) =$

$= x(x-1)$. Σε κάθε περίπτωση είναι διαγωνιστικός. Αν $(a_{ij}) = (1/n)$, τότε $m_A(x) = x-1$ ~~και~~ $n=1$.

Γνωρίζουμε $\frac{1}{n} \neq 0$. για κάθε $n > 0$, $m_A(x) \neq x$.

Αν $n > 1$, τότε $m_A(x) = x(x-1)$.

Άσκηση: Έστω $f \in \text{End}(V)$ και $W \subseteq V$ με $f(W) \subseteq W$. Τότε ο W λέγεται αναλλοίωτος ως προς την f .

Αν W αναλλοίωτος ως προς την f , τότε προφανώς ο περιορισμός $g = f|_W \in \text{End}(W)$.

Δείξτε ότι αν η f είναι διαγωνίσιμη και W f -αναλλοίωτος τότε και η $g = f|_W$ είναι διαγωνίσιμη.

Απόδειξη: Αν η f είναι διαγωνίσιμη, τότε

$m_f(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ οι διακεκριμένες ιδιοτιμές της f . ($\lambda_i \neq \lambda_j$ για $i \neq j$). Εφόσον $m_f(f) = 0$, τότε και $m_g(g) = m_f(f|_W) = 0$. Άρα $m_g(x) | m_f(x)$ και επειδή

το $m_f(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων διακεκριμένων παραγόντων και το $m_g(x)$ είναι γινόμενο πρωτοβάθμιων διακεκριμένων παραγόντων.

Άρα και η $g = f|_W$ είναι διαγωνίσιμη.

Άσκηση: Αν ο πίνακας ~~A~~ $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ δεν έχει άλλες ιδιοτιμές εκτός από τη μηδενική, τότε είναι μηδενοδύναμος.

Απόδειξη: Στο $\mathbb{C}$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x)$ αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων. Η μόνη ρίζα του $\chi_A(x)$ είναι το 0, οπότε $\chi_A(x) = (-1)^n x^n$. Επομένως

$$0 = \chi_A(A) = (-1)^n A^n \Leftrightarrow A^n = 0.$$

Άσκηση: Διευφάν ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ \beta & \gamma & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Να βρεθεί κανείς και αναγκαία συνθήκη ώστε ο A να είναι διαγωνίσιμος.

Λύση: [διοτιπτό το 3 (δινά) και το -2.

Για να είναι διαγωνίσιμος ο A θα πρέπει

$$m_A(x) = (x-3)(x+2), \text{ δηλαδή}$$

$$(A-3I)(A+2I) = 0.$$

$$A-3I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & -5 \end{pmatrix}, \quad A+2I = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ a & 5 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Επομένως } (A-3I)(A+2I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ a & 5 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5a & 0 & 0 \\ 5\beta + a\gamma - 5\beta & 5\gamma - 5\gamma & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5a & 0 & 0 \\ a\gamma & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Άρα πρέπει και απκεί $a=0$.

Κάθε πίνακας $A \in F^{n \times n}$ ορίζει μια
 απεικόνιση $\gamma_A: F^{n \times 1} \rightarrow F^{n \times 1}$ ($F^{n \times 1} \cong F^n$ μέσω
 αντιστοίχησης) με $\gamma_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\text{Αν } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

η κανονική βάση των $F^{n \times 1}$ (γράφουμε κάθε ένα
 τα διανύσματα), τότε $Ae_j = A^{(j)}$ η j -στήλη
 του A . Πράγματι, αν $A = (a_{ij})$, τότε:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$\nwarrow e_j$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot a_{11} + 0 \cdot a_{12} + \dots + 1 \cdot a_{1j} + \dots + 0 \cdot a_{1n} \\ 0 \cdot a_{21} + 0 \cdot a_{22} + \dots + 1 \cdot a_{2j} + \dots + 0 \cdot a_{2n} \\ \vdots \\ 0 \cdot a_{n1} + 0 \cdot a_{n2} + \dots + 1 \cdot a_{nj} + \dots + 0 \cdot a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = A^{(j)}$$

Άσκηση: Έστω $A, B \in F^{n \times n}$ με $AB = BA$ και
 οι $n \times n$ πίνακες A και B είναι διαγωνίσιμοι.
 Τότε διαγωνοποιούνται ταυτόχρονα, συνεπώς
 υπάρχει αντιστρέψιμος $Q \in F^{n \times n}$ με
 $Q A Q^{-1} = D$ διαγώνιος και $Q B Q^{-1} = D'$ διαγώνιος

Απόδειξη: Ο A διαγωνοποιείται. Άρα

$$F^{n \times 1} = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \dots \oplus V(\lambda_k), \text{ όπου}$$

$V(\lambda_i)$ ο ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i , όπου $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ οι διαφορετικές ιδιοτιμές του A ή ισοδύναμα της απεικόνισης γ_A .

Έστω $v \in V(\lambda_i)$ για κάποιον i .

Τότε

$$\gamma_A \gamma_B(v) = \gamma_B \gamma_A(v) = \gamma_B(\lambda_i v) =$$
$$AB=BA$$

$$= \lambda_i \gamma_B(v), \text{ δηλαδή } \gamma_A(\gamma_B(v)) = \lambda_i \gamma_B(v)$$

Άρα $\gamma_B(v) \in V(\lambda_i)$ και κατά συνέπεια

$$\gamma_B(V(\lambda_i)) \subseteq V(\lambda_i)$$

Επομένως η γ_B δρα επί του $V(\lambda_i)$, δηλαδή ο $V(\lambda_i)$ είναι γ_B -αναλλοίωτος.

Από προηγούμενη άσκηση, έφθασαν ο B διαγωνοποιείται, άρα και η γ_B διαγωνοποιείται, τότε ο περιορισμός $\gamma_i = \gamma_B|_{V(\lambda_i)} : V(\lambda_i) \rightarrow V(\lambda_i)$ διαγωνοποιείται.

Άρα υπάρχει βάση $\hat{u}_i$ του $V(\lambda_i)$ με $(\gamma_i : \hat{u}_i) = D_i$ διαγώνιος.

"Μαζεύουμε" όλα τα διανύσματα των βάσεων $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_k$ κατά την ίδια σειρά και φτιάχνουμε μια βάση $\hat{u} = (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_k)$ του $V = F^{n \times 1}$.

Επειδή $(\gamma_B|_{V(\lambda_i)} : \hat{u}_i) = D_i$ διαγώνιος

έπεται ότι $(\gamma_B : \hat{u}) = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & D_2 & \\ 0 & \dots & D_k \end{pmatrix}$ διαγώνιος

Επειδή ο A , άρα και η γ_A δρα επί του $V(\lambda_i)$ με πολλαπλασιασμό επί λ_i , όλα τα στοιχεία της βάσης $\hat{u}_i$ του $V(\lambda_i)$ πολλαπλασιάζονται με λ_i . Άρα $(\gamma_A|_{V(\lambda_i)} : \hat{u}_i) = \lambda_i I_{r_i}$, όπου $r_i = \dim V(\lambda_i)$.

Συνεπώς $(\gamma_A : \hat{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & & 0 \\ & \lambda_2 I_{r_2} & \\ 0 & \dots & \lambda_k I_{r_k} \end{pmatrix}$

Αν $Q = (L_{F^{n \times 1}} : \hat{e}, \hat{u})$, τότε

$Q^{-1} = (L_{F^{n \times 1}} : \hat{u}, \hat{e})$, όπου $\hat{e} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ η συνήθης βάση του $F^{n \times 1}$.

Άρα $Q A Q^{-1} = (L_{F^{n \times 1}} : \hat{e}, \hat{u}) (\gamma_A : \hat{e}) (L_{F^{n \times 1}} : \hat{u}, \hat{e}) = (\gamma_A : \hat{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} & & 0 \\ & \lambda_2 I_{r_2} & \\ 0 & \dots & \lambda_k I_{r_k} \end{pmatrix}$ και

$Q B Q^{-1} = (L_{F^{n \times 1}} : \hat{e}, \hat{u}) (\gamma_B : \hat{e}) (L_{F^{n \times 1}} : \hat{u}, \hat{e}) = (\gamma_B : \hat{u}) = \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & D_2 & \\ 0 & \dots & D_k \end{pmatrix}$ διαγώνιος

Άσκηση: Έστω $A \in F^{t \times n}$ και $B \in F^{n \times t}$.

Τότε προφανώς $AB \in F^{t \times t}$ και $BA \in F^{n \times n}$.

Δείξτε ότι $(-L)^t x^t \chi_{AB}(x) = (-L)^n x^n \chi_{BA}(x)$

Απόδειξη: $\begin{pmatrix} AB - x I_t & -A \\ 0 & -x I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_t & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} =$
 $\underbrace{\quad}_{(t+n) \times (t+n)} \quad \underbrace{\quad}_{(t+n) \times (t+n)}$

$$= \begin{pmatrix} AB - xI_p - AB & -AI_v \\ -xI_v B & -xI_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xI_p & -A \\ -xB & -xI_v \end{pmatrix}$$

$$\text{και } \underbrace{\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_v \end{pmatrix}}_{(p+v) \times (p+v)} \underbrace{\begin{pmatrix} -xI_p & -A \\ 0 & BA - xI_v \end{pmatrix}}_{(p+v) \times (p+v)} =$$

$$= \begin{pmatrix} xI_p & -I_p A \\ -xB I_p & -BA + BA - xI_v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} xI_p & -A \\ -xB & BA - xI_v \end{pmatrix}$$

$$\text{Επομένως } \begin{pmatrix} AB - xI_p & -A \\ 0 & -xI_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -xI_p & -A \\ 0 & BA - xI_v \end{pmatrix}$$

Παίρνουμε ορίσους: Προφανώς $\det \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ B & I_v \end{pmatrix} = 1$

$$\text{Άρα } \det \begin{pmatrix} AB - xI_p & -A \\ 0 & -xI_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -xI_p & -A \\ 0 & BA - xI_v \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \det(AB - xI_p) \det(-xI_v) = \det(-xI_p) \det(BA - xI_v) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \chi_{AB}(x) (-x)^v = (-x)^p \chi_{BA}(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-L)^v x^v \chi_{AB}(x) = (-L)^p x^p \chi_{BA}(x)$$

$A, v = p$, επειδή $A, B \in F^{m \times n}$, τότε

$$\cancel{(-L)^p x^p} \chi_{AB}(x) = \cancel{(-L)^p x^p} \chi_{BA}(x)$$

$$\Leftrightarrow \chi_{AB}(x) = \chi_{BA}(x)$$

Άσκηση: Έστω $f: V \rightarrow V$ γραμμική και

$n = \dim V$. Αν $A \cong (f: \hat{v})$, $\hat{v} = (v_1, \dots, v_n)$

βάση του V και λ ιδιοτιμή της f , δείξτε

ότι $\dim V(\lambda) = n - r(A - \lambda I_n)$, όπου

$r(A - \lambda I_n)$ η τάξη (γραμμών ή στήλών, το ίδιο είναι) του $A - \lambda I_n$.

Απόδειξη: $\dim V = \dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f$,

για κάθε $f: V \rightarrow V$. Αν αντί f γράψουμε

$f - \lambda I_V$ τότε

$n = \dim V = \dim \ker (f - \lambda I_V) + \dim \operatorname{Im} (f - \lambda I_V)$

Αλλά $\ker (f - \lambda I_V) = V(\lambda)$, οπότε

$\dim V(\lambda) = n - \dim \operatorname{Im} (f - \lambda I_V)$.

Ο πίνακας της $f - \lambda I_V$ είναι ο $A - \lambda I_n$,

και $\dim \operatorname{Im} (f - \lambda I_V) = r(A - \lambda I_n)$

Άρα, $\dim V(\lambda) = n - r(A - \lambda I_n)$

Άσκηση: Έστω $f: V \rightarrow V$ και κάθε μη μηδενικό

διάνυσμα του V είναι ιδιοδιάνυσμα της f .

Δείξτε ότι η f έχει μοναδική ιδιοτιμή $\lambda \in F$
και $f = \lambda I_V$.

Απόδειξη: Έστω $v_1, v_2 \in V \setminus \{0\}$ με $f(v_1) = \lambda_1 v_1$
και $f(v_2) = \lambda_2 v_2$. Υποθέτουμε ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Τα v_1, v_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, γιατί
αν $v_1 = \rho v_2$, ($\rho \in F$), τότε $f(v_1) = \lambda_1 v_1$ και
 $f(v_1) = f(\rho v_2) = \rho f(v_2) = \rho \lambda_2 v_2 = \lambda_2 v_1$.

Άρα $\lambda_1 v_1 = \lambda_2 v_1 \Leftrightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) v_1 = 0 \xLeftrightarrow[\lambda_1 \neq \lambda_2] v_1 = 0$, άρα

Ιδιαίτερώς $v_1 + v_2 \neq 0$. Άρα το $v_1 + v_2$ είναι
ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή
 $\mu \in F$.

Άρα $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ και
 $f(v_1 + v_2) = \mu(v_1 + v_2) = \mu v_1 + \mu v_2$.

Συνεπώς $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \mu v_1 + \mu v_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda_1 - \mu) v_1 + (\lambda_2 - \mu) v_2 = 0$ και v_1, v_2 γραμ. ανεξ.

Άρα $\lambda_1 - \mu = \lambda_2 - \mu = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \mu$, άρα
για υποθέσαμε ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Άρα υπάρχει μία μόνο ιδιοτιμή λ για την
 f και επειδή κάθε $v \in V \setminus \{0\}$ είναι ιδιοδιάνυσμα
 $f(v) = \lambda v$. Προφανώς $f(0) = 0 = \lambda \cdot 0$.

Άρα $f = \lambda I_V$.