

**ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

Μάθημα: Θεωρία συνόλων (ZFC)

Εξετ. Ιουνίου 22

Διδάσκουσα: Δ. Χριστοπούλου

Από τα ακόλουθα επτά θέματα απαντήστε στα **τρία**

Θέμα 1°

Αποδείξτε ότι:

- i. Για κάθε σύνολο a ισχύει $\cup P(a) = a$
- ii. Η κλάση όλων των συνόλων δεν είναι σύνολο
- iii. Έστω a μη αριθμήσιμο σύνολο και b σύνολο που εμπεριέχει το a .
Τότε το σύνολο b είναι μη αριθμήσιμο.

Θέμα 2°

Αποδείξτε ότι:

Το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών με τη διάταξη $\leq$ είναι καλά διατεταγμένο

($x \leq y$ αν και μόνο αν $x \in y \vee x = y$)

[Υπόδειξη: δείξτε ότι κάθε υποσύνολο a του $\mathbb{N}$ έχει ελάχιστο στοιχείο, με άλλα λόγια υπάρχει στοιχείο $x \in a$ τέτοιο ώστε $x \leq y$, για κάθε $y \in a$]

Θέμα 3°

Εάν a, b, c, d είναι σύνολα τέτοια ώστε $a \sim c$ και $b \sim d$ τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

εάν $a \cap b = \emptyset$ και $c \cap d = \emptyset$ τότε $a \cup b \sim c \cup d$ ($\sim$: σύμβολο ισοπληθικότητας)

Θέμα 4ο

- i. Τι είναι επαγωγικό σύνολο a (γράψτε τον ορισμό)
- ii. Δείξτε ότι υπάρχει επαγωγικό σύνολο ω το οποίο είναι υποσύνολο κάθε επαγωγικού συνόλου

Θέμα 5°

- i. Αποδείξτε ότι για κάθε σύνολο a ισχύει $|a| < |P(a)|$ (Θεώρημα Cantor)
- ii. Γράψτε την πρόταση που είναι γνωστή ως «Υπόθεση του Συνεχούς».

Θέμα 6°

- i. Ορίστε τι σημαίνει συνάρτηση επιλογής και διατυπώστε το Αξίωμα Επιλογής $\Rightarrow$

ii. Αποδείξτε ότι εάν ισχύει η *Αρχή της μέγιστης αλυσίδας* τότε ισχύει το *λήμμα του Zorn* (αφού δώσετε τις σχετικές διατυπώσεις)

Θέμα 7^ο

i. Δείξτε ότι για κάθε διατακτικό αριθμό α το σύνολο V_α είναι $\in$ -μεταβατικό

ii. Να δείξετε ποιο σύνολο είναι ο διατακτικός $\omega+1$. Γράψτε επίσης πώς ορίζεται ο διατακτικός ω_1