ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι
ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΚΑΙ ΣΥΝΑΡΤΗΤΕΣ

§1. Κατηγορίες

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.1. Μία κατηγορία εἶναι μία τριάδα $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$, ὅπου

i) $\mathcal{C}$ εἶναι μία κλάση τά στοιχεῖα τῆς ὁποίας λέγονται ἀντικείμενα.

ii) $\mathcal{M}$ εἶναι μία ἕνωση τῆς μορφῆς

$$\mathcal{M} = \bigcup_{(A,B)\in \mathcal{C}\times\mathcal{C}} Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$$

ὅπου γιά κάθε $(A,B)\in \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ τό $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ εἶναι ἕνα σύνολο τά στοιχεῖα τοῦ ὁποίου λέγονται μορφισμοί μέ domain τό A καί codomain τό B, καί συμβολίζονται $f: A \longrightarrow B$.

iii) Ὁ $\circ$ εἶναι μία ἀπεικόνιση γιά κάθε τριάδα (A,B,C) ἀντικειμένων

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A,C)$$

καί λέγεται νόμος συνθέσεως. Ἡ εἰκόνα ἑνός (f,g) μέσω τοῦ $\circ$ συμβολίζεται $g\circ f$ ἤ gf.

Ἡ κατηγορία πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τά ἀξιώματα

A1) $(A_1, B_1) \neq (A_2, B_2) \Longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(A_1,B_1) \cap Hom_{\mathcal{C}}(A_2,B_2) = \emptyset$.

A2) Ἄν $f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$, $h: C \longrightarrow D$ τότε

$$h\circ(g\circ f) = (h\circ g)\circ f$$

A3) $\forall A \in \mathcal{C}$ $\exists 1_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ ὥστε $\forall f: A \longrightarrow B$ καί $\forall g: C \longrightarrow A$ ἰσχύει

$$f1_A = f \text{ και } 1_A g = g.$$

Τό A3) ἐξασφαλίζει ὅτι ὁ μορφισμός 1_A ὁρίζεται μονοσήμαντα. Τό 1_A λέγεται <u>ταυτοτικός μορφισμός τοῦ A</u>.

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.2. Μία κατηγορία $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$ λέγεται <u>μικρή</u> ὅταν ἡ κλάση $\mathcal{C}$ εἶναι σύνολο.

Παρακάτω θά γράφουμε "ἡ κατηγορία $\mathcal{C}$" ἀντί "ἡ κατηγορία $(\mathcal{C}, \mathcal{M}, \circ)$" ὅταν αὐτό δέν δημιουργεῖ σύγχυση.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1.3. i) <u>Ἡ κατηγορία $\mathcal{S}$</u> τῆς ὁποίας ἡ κλάση τῶν ἀντικειμένων εἶναι ἡ κλάση <u>τῶν συνόλων</u>, τά σύνολα $Hom_{\mathcal{S}}(A,B)$ εἶναι τά σύνολα τῶν ἀπεικονίσεων $f: A \longrightarrow B$ καί $\circ$ εἶναι ἡ συνήθης σύνθεση τῶν ἀπεικονίσεων.

ii) Ὅμοια ὁρίζεται <u>ἡ κατηγορία $\mathcal{T}$ τῶν τοπολογικῶν χώρων</u> μέ μορφισμούς τίς συνεχεῖς συναρτήσεις, καί $\circ$ τήν συνήθη σύνθεση.

iii) <u>Ἡ κατηγορία $\mathcal{S}_0$ τῶν σημειωμένων συνόλων</u> μέ ἀντικείμενα τά ζεύγη (A,a) ὅπου A σύνολο καί $a \in A$, καί μορφισμούς $f:(A,a) \longrightarrow (B,b)$ τίς ἀπεικονίσεις $f: A \longrightarrow B$ μέ $f(a)=b$.

iv) <u>Ἡ κατηγορία $\mathcal{G}$ τῶν ὁμάδων</u> μέ ἀντικείμενα τίς ὁμάδες καί μορφισμούς τούς ὁμομορφισμούς ὁμάδων.

v) <u>Ἡ κατηγορία $\mathcal{A}b$ τῶν ἀβελιανῶν ὁμάδων</u> μέ ἀντικείμενα τίς ἀβελιανές ὁμάδες καί μορφισμούς τούς μορφισμούς τῶν ὁμάδων.

vi) <u>Ἡ κατηγορία $\mathcal{V}_F$ τῶν διανυσματικῶν χώρων ἐπί ἑνός σώματος F</u> μέ μορφισμούς τίς γραμμικές ἀπεικονίσεις.

vii) Ἡ κατηγορία $\mathcal{Tg}$ τῶν τοπολογικῶν ὁμάδων μέ μορφισμο- τούς συνεχεῖς ὁμομορφισμούς.

viii) Ἡ κατηγορία $\mathcal{R}$ τῶν δακτυλίων μέ μορφισμούς τούς μορ- φισμούς δακτυλίων.

ix) Ἡ κατηγορία $\mathcal{R}_1$ τῶν δακτυλίων μέ μονάδα, μέ μορφισμοί τούς μορφισμούς δακτυλίων πού διατηροῦν τήν μονάδα.

x) Ἡ κατηγορία $\mathcal{M}_R^l$ τῶν ἀριστερά R-προτύπων μέ μορφισμο- τίς R-γραμμικές ἀπεικονίσεις $(R \in \mathcal{R}_1)$.

xi) Ἡ κατηγορία $\mathcal{M}_R^r$ τῶν δεξιά R-προτύπων μέ μορφισμούς τίς R-γραμμικές ἀπεικονίσεις.

xii) Ἡ κατηγορία $\mathcal{Eq}$ τῶν (X,R), ὅπου X σύνολο, R σχέση ἰσο- δυναμίας στό X καί μορφισμοί οἱ ἀπεικονίσεις $f:(X,R) \longrightarrow (Y,$ πού εἶναι τέτοιοι ὥστε ἄν $(x,y) \in R$ τότε $(f(x),f(y)) \in R'$.

xiii) Ἡ κατηγορία $\mathcal{Ord}$ μέ ἀντικείμενα τά ζεύγη $(X,\leq)$ ὅπου X σύνολο καί $\leq$ μία σχέση διατάξεως στό X καί μορφισμοί $f:(X,\leq) \longrightarrow (Y,\prec)$ τίς ἀπεικονίσεις $f: X \longrightarrow Y$ πού διατηροῦ- τή διάταξη.

Σέ ὅλα τά παραπάνω παραδείγματα οἱ μορφισμοί εἶναι ἀ- πεικονίσεις καί ὁ νόμος συνθέσεως εἶναι ἡ σύνθεση ἀπεικονίσε- ων. Ὑπάρχουν ὅμως κατηγορίες πού οἱ μορφισμοί τους δέν εἶ- ναι ἀπεικονίσεις:

xiv) Ἄν $(G,*)$ εἶναι ὁμάδα, τότε $(\{G\}, G, *)$ εἶναι κα- τηγορία.

xv) Ἕνα σύνολο A μέ μία σχέση ἰσοδυναμίας $\sim$ εἶναι κα- τηγορία μέ ἀντικείμενα τά στοιχεῖα τοῦ A, καί

$$\mathrm{Hom}_A(a,b) = \begin{cases} \emptyset & \text{ἄν } a \not\sim b \\ \{(a,b)\} & \text{ἄν } a \sim b. \end{cases}$$

xvi) Ένα σύνολο A μέ μία σχέση διατάξεως $\leq$ είναι κατηγορί[α] μέ αντικείμενα τά στοιχεία τοῦ A καί

$$Hom_A(a,b) = \begin{cases} \emptyset & \text{ἄν } a>b \\ \{(a,b)\} & \text{ἄν } a\leq b \end{cases}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ 1.4. Έστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία. Μία κατηγορία $\mathcal{C}_0$ λέγεται <u>ὑποκατηγορία τῆς $\mathcal{C}$</u> ἄν

i) τά αντικείμενα τῆς $\mathcal{C}_0$ εἶναι αντικείμενα τῆς $\mathcal{C}$.

ii) $\forall (A,B) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 : Hom_{\mathcal{C}_0}(A,B) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$

iii) Ἡ σύνθεση δύο μορφισμῶν στήν $\mathcal{C}_0$ ἰσοῦται μέ τήν σύνθεσή τους στή $\mathcal{C}$.

Μία ὑποκατηγορία $\mathcal{C}_0$ μιᾶς κατηγορίας $\mathcal{C}$ λέγεται <u>πλήρης</u> ἄν $\forall (A,B) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 : Hom_{\mathcal{C}_0}(A,B) = Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 1.5. i) Ἡ $\mathcal{Ab}$ εἶναι πλήρης ὑποκατηγορία τῆς $\mathcal{G}$.

ii) $\mathcal{R}_1$ εἶναι ὑποκατηγορία τῆς $\mathcal{R}$ ἡ ὁποία <u>δέν</u> εἶναι πλήρης γιατί ἄν $A, B \in \mathcal{R}_1$ τότε ὑπάρχουν μορφισμοί δακτυλίων, δηλ. στοιχεῖα τοῦ $Hom_{\mathcal{R}}(A,B)$ πού δέν διατηροῦν τήν μονάδα, ἄρα δέν ἀνήκουν στό $Hom_{\mathcal{R}_1}(A,B)$.

iv) $\mathcal{S}_0$ <u>δέν</u> εἶναι ὑποκατηγορία τῆς $\mathcal{S}$, γιατί $\mathcal{S}_0$ ἔχει περισσότερα αντικείμενα.

v) Όμοια $\mathcal{Tg}$ <u>δέν</u> εἶναι ὑποκατηγορία τῆς $\mathcal{G}$ οὔτε τῆς $\mathcal{T}$.

vi $\mathcal{S}$ υποκ της $\mathcal{T}$;

§2. Ἰδιότητες τῶν μορφισμῶν

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.1. Ἕνας μορφισμός $r: A \longrightarrow B$ λέγεται <u>retraction</u> ἂν ὑπάρχει $s: B \longrightarrow A$ ὥστε $rs = 1_B$. Ἕνας μορφισμός $s: A \longrightarrow B$ λέγεται <u>coretraction</u> ἢ <u>section</u> ἂν ὑπάρχει $r: B \longrightarrow A$ ὥστε $rs = 1_A$. Ἕνας μορφισμός θ ποὺ εἶναι καὶ retraction καὶ coretraction λέγεται <u>ἰσομορφισμός</u>.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 2.2. Ἂν $\theta: A \longrightarrow B$ καὶ $\pi: B \longrightarrow C$ εἶναι coretractions τότε $\pi\theta: A \longrightarrow C$ εἶναι coretraction. Ἀντίστροφα ἂν $\pi\theta$ εἶναι coretraction τότε θ εἶναι coretraction.
Ἂν $\theta: A \longrightarrow B$ εἶναι retraction καὶ $\pi: B \longrightarrow C$ εἶναι retraction τότε $\pi\theta$ εἶναι retraction. Ἀντίστροφα ἂν $\pi\theta$ εἶναι retraction, τότε π retraction.
Ἂν θ εἶναι ἰσομορφισμός καὶ $\theta'\theta = 1_A$, $\theta\theta'' = 1_B$ τότε

$$\theta' = \theta' 1_B = \theta'(\theta\theta'') = (\theta'\theta)\theta'' = 1_A \theta'' = \theta''$$

Ὁ μορφισμός $\theta' = \theta''$ λέγεται <u>ἀντίστροφος τοῦ θ</u> καὶ συμβολίζεται μὲ θ^{-1}.
Ἂν ὑπάρχει ἰσομορφισμός $\theta: A \longrightarrow B$ λέμε ὅτι τὸ A εἶναι <u>ἰσόμορφο</u> μὲ τὸ B, καὶ γράφουμε $A \simeq B$. Ἡ σχέση $\simeq$ εἶναι σχέση ἰσοδυναμίας στὴν κλάση τῶν ἀντικειμένων.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.3. Ἔστω $A \in \mathcal{C}$. Κάθε $f: A \longrightarrow A$ δηλ. κάθε στοιχεῖο τοῦ συνόλου $Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ λέγεται <u>ἐνδομορφισμός τοῦ A</u>. Χρησιμοποιοῦμε καὶ τὰ σύμβολα $End(A)$ ἢ $End_{\mathcal{C}}(A)$ ἀντὶ $Hom_{\mathcal{C}}(A, A)$. Τὸ σύνολο $End(A)$ εἶναι ἡμιομάδα.

"Ενας ἐνδομορφισμός ποὺ εἶναι ἰσομορφισμός λέγεται αὐτο-μορφισμός. Τό σύνολο τῶν αὐτομορφισμῶν τοῦ A συμβολίζεται μέ $Aut_{\mathcal{C}}(A)$ ἤ $Aut(A)$ καί εἶναι ὁμάδα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.4. "Ενας μορφισμός $f: A \longrightarrow B$ λέγεται μονομορφισμός ἄν

$$fa = fb \Rightarrow a = b \quad \forall\, a, b \text{ μέ codomain } A.$$

"Ενας μορφισμός $f: A \longrightarrow B$ λέγεται ἐπιμορφισμός ἄν

$$af = bf \Rightarrow a = b \quad \forall\, a, b \text{ μέ domain } B.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 2.5. i) "Αν f μονομορφισμός στήν $\mathcal{C}$ τότε εἶναι μονομορφισμός σέ κάθε ὑποκατηγορία. Τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει. Ὁμοίως ἄν f ἐπιμορφισμός.

ii) Κάθε coretraction εἶναι μονομορφισμός. Τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει. Κάθε retraction εἶναι ἐπιμορφισμός. Τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει.

iii) "Αν f, g μονομορφισμοί καί ὁρίζεται $g \circ f$ τότε ὁ $g \circ f$ εἶναι μονομορφισμός. "Αν $g \circ f$ εἶναι μονομορφισμός τότε f μονομορφισμός. Ὁμοίως ἄν f, g ἐπιμορφισμοί καί ὁρίζεται ὁ $g \circ f$ τότε ὁ $g \circ f$ εἶναι ἐπιμορφισμός. "Αν $g \circ f$ εἶναι ἐπιμορφισμός τότε g ἐπιμορφισμός.

iv) Κάθε ἰσομορφισμός εἶναι καί μονομορφισμός καί ἐπιμορφισμός. Τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει. "Αν στήν κατηγορία $\mathcal{C}$ κάθε μορφισμός ποὺ εἶναι καί μονομορφισμός καί ἐπιμορφισμός εἶναι ἰσομορφισμός, ἡ κατηγορία $\mathcal{C}$ λέγεται ἰσορροπημένη.

v) "Αν $a: A \longrightarrow B$ εἶναι coretraction καί ἐπιμορφισμός ἤ εἶναι retraction καί μονομορφισμός τότε εἶναι ἰσομορφισμός.

ΟΡΙΣΜΟΣ 2.6. Ἔστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία. Ἕνα $A \in \mathcal{C}$ λέγεται <u>ἀρχικό</u> ἄν $\forall X \in \mathcal{C}$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$ εἶναι μονοσύνολο. Ἕνα $T \in \mathcal{C}$ λέγεται <u>τελικό</u> ἄν $\forall X \in \mathcal{C}$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, T)$ εἶναι μονοσύνολο. Ἄν ἕνα ἀντικείμενο εἶναι καί ἀρχικό καί τελικό λέγεται <u>μηδενικό</u> καί συμβολίζεται μέ 0.

Ἄν σέ μία κατηγορία $\mathcal{C}$ ὑπάρχει μηδενικό ἀντικείμενο, τότε $\forall (X, Y) \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ ὑπάρχει ἕνας μοναδικός μορφισμός

$$0_{XY} : X \longrightarrow Y$$

πού εἶναι σύνθεση τῶν μορφισμῶν $X \longrightarrow 0$ καί $0 \longrightarrow Y$. Ὁ 0_{XY} λέγεται <u>μηδενικός μορφισμός ἀπό τό X στό Y.</u> Ἄν δέν δημιουργεῖται σύγχυση θά συμβολίζεται ἁπλᾶ μέ 0.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 2.7. i) Ὅλα τά ἀρχικά ἀντικείμενα εἶναι μεταξύ τους ἰσόμορφα. Ὅλα τά τελικά ἀντικείμενα εἶναι μεταξύ τους ἰσόμορφα. Ἄρα καί ὅλα τά μηδενικά ἀντικείμενα εἶναι μεταξύ τους ἰσόμορφα.

ii) Ἄν σέ μια κατηγορία ὑπάρχει μηδενικό ἀντικείμενο, τότε γιά κάθε $f : X \longrightarrow Y$ καί κάθε $g : Y \longrightarrow Z$ ἔχουμε:

$$0_{YW} \circ f = 0_{XW} \quad \text{καί} \quad g \circ 0_{XY} = 0_{XZ}$$

iii) Ἕνα ἀντικείμενο A τῆς κατηγορίας $\mathcal{C}$ εἶναι μηδενικό ἀντικείμενο ἐάν καί μόνον ἐάν $1_A = 0_{AA}$.

§3. Δυϊσμός

ΟΡΙΣΜΟΣ 3.1. Ἔστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία. Ὀνομάζουμε <u>δυϊκή κατηγορία τῆς $\mathcal{C}$</u> καί συμβολίζουμε μέ $\mathcal{C}^{opp}$ τήν κατηγορία πού κατασκευάζεται μέ τόν ἀκόλουθο τρόπο:

i) Τά ἀντικείμενα τῆς $\mathcal{C}^{opp}$ ταυτίζονται μέ τά ἀντικείμενα τῆς $\mathcal{C}$.

ii) $\forall\ (A,B) \in \mathcal{C}\times\mathcal{C} = \mathcal{C}^{opp}\times\mathcal{C}^{opp}$ ὁρίζουμε:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{opp}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$$

iii) Ὁ νόμος τῆς συνθέσεως στήν $\mathcal{C}^{opp}$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: ἄν $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{opp}}(A,B)$ καί $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{opp}}(B,C) \Rightarrow$

$u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ καί $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C,B)$. Θέτουμε

$$(v \circ u)_{\mathcal{C}^{opp}} = (u \circ v)_{\mathcal{C}}.$$

Διαπιστώνει κανείς εὔκολα πώς ἡ $\mathcal{C}^{opp}$ εἶναι κατηγορία, οἱ ταυτοτικοί μορφισμοί τῆς $\mathcal{C}^{opp}$ ταυτίζονται μέ τούς ταυτοτικούς τῆς $\mathcal{C}$ καί 0 εἶναι μηδενικό ἀντικείμενο τῆς $\mathcal{C}$ ἐάν καί μόνον ἐάν εἶναι μηδενικό τῆς $\mathcal{C}^{opp}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 3.2. Ἔστω μία πρόταση P πού ἔχει ἔννοια γιά κάθε κατηγορία. Ἡ πρόταση P γιά τήν $\mathcal{C}^{opp}$ ἀντιστοιχεῖ σέ μία πρόταση P^{opp} γιά τήν $\mathcal{C}$. Τό παραπάνω μᾶς ὁδηγεῖ στήν ἀρχή τοῦ δυϊσμοῦ: ἄν P ἰσχύει σέ ὅλες τίς κατηγορίες πού ἱκανοποιοῦν τά ἀξιώματα $A, B, \ldots, M$ τότε P^{opp} ἰσχύει σέ ὅλες τίς κατηγορίες πού ἱκανοποιοῦν τά ἀξιώματα $A^{opp}, B^{opp}, \ldots, M^{opp}$. Εἰδικώτερα ἄν P ἰσχύει σέ ὅλες τίς κατηγορίες, τότε P^{opp} ἰσχύει σέ ὅλες τίς κατηγορίες.

§4. Πυρῆνες καὶ συμπυρῆνες

1

ΟΡΙΣΜΟΣ 4.1. Ἔστω ὅτι στὴν κατηγορία $\mathcal{C}$ ὑπάρχει μηδενικὸ ἀντικείμενο, κι ἔστω ἕνας μορφισμός $f: A \longrightarrow B$. Ὀνομάζουμε
οὐ <u>πυρῆνα ~~τῆς~~ f</u> τὸ ζεῦγος (K,μ) ὅπου $\mu: K \longrightarrow A$ ἂν ἱκανοποιοῦνται οἱ συνθῆκες:

i) $f\mu = 0$

ii) ἂν $f\mu' = 0 \Rightarrow \exists!\ \omega: K' \longrightarrow K$ μὲ $\mu' = \mu\omega$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ K' \arrow[u, dashed, "\omega"] \arrow[ur, "\mu'"'] & & \end{tikzcd}$$

Δυϊκὴ ἔννοια τοῦ πυρῆνα εἶναι ὁ <u>συμπυρῆνας</u> δηλ. ἕνα ζεῦγος (ε,Λ) μὲ $\varepsilon: B \longrightarrow \Lambda$ ποὺ ἱκανοποιεῖ τὶς συνθῆκες:

i) $\varepsilon f = 0$

ii) ἂν $\varepsilon' f = 0 \Rightarrow \exists!\ \omega: \Lambda \longrightarrow \Lambda'$ μὲ $\varepsilon' = \omega\varepsilon$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[dr, "\varepsilon'"'] & \Lambda \arrow[d, dashed, "\omega"] \\ & & \Lambda' \end{tikzcd}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 4.2. i) Ἡ ὕπαρξη μηδενικοῦ ἀντικειμένου δὲν ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρξη πυρήνων καὶ συμπυρήνων.

ii) Ἂν ὑπάρχει ὁ πυρῆνας ἑνὸς μορφισμοῦ, εἶναι οὐσιωδῶς ἕνας δηλ. ἂν (K,μ) καὶ (K',μ') εἶναι πυρῆνες τοῦ $f: A \longrightarrow B$, τότε $\exists!\ \omega: K' \longrightarrow K$ μὲ $\mu' = \mu\omega$ καὶ $\exists!\ \omega': K \longrightarrow K'$ μὲ $\mu = \mu'\omega'$, ὁπότε $\mu = \mu\omega\omega'$ κι ἐπειδὴ $\mu = \mu \cdot 1_K \Rightarrow \omega\omega' = 1_K$. Ὅμοια $\omega'\omega = 1_{K'}$.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, shift left, "\omega'"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ K' \arrow[u, shift left, "\omega"] \arrow[ur, "\mu'"'] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mu"] & A \arrow[r, "f"] & B \\ K \arrow[u, shift left, "1_K"] \arrow[u, shift right, "\omega\omega'"'] \arrow[ur, "\mu"'] & & \end{tikzcd}$$

Ὅμοια ὁ συμπυρήνας ἑνός μορφισμοῦ ἄν ὑπάρχει εἶναι οὐσιωδῶς ἕνας.

iii) Ἄν (K,μ) εἶναι πυρήνας ἑνός $f: A \longrightarrow B$ τότε μ μονομορφισμός. Ὅμοια ἄν (ε, Λ) εἶναι συμπυρήνας τότε ε ἐπιμορφισμ[ός]. Τά ἀντίστροφα ἐν γένει δέν ἰσχύουν. Ἄν σέ μία κατηγορία $\mathcal{C}$ κάθε μονομορφισμός εἶναι πυρήνας τότε ἡ κατηγορία λέγεται <u>normal</u>. Ἄν κάθε ἐπιμορφισμός εἶναι συμπυρήνας τότε ἡ κατηγορία λέγεται <u>conormal</u>.

iv) Ἄν $f: A \longrightarrow B$ εἶναι μονομορφισμός τότε ὁ πυρήνας τοῦ f εἶναι ὁ $(0,0)$. Τό ἀντίστροφο ἐν γένει δέν ἰσχύει. Ὅμοια ἄν f ἐπιμορφισμός τότε ὁ συμπυρήνας τοῦ f εἶναι ὁ $(0,0)$. Τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει.

v) Ὁ πυρήνας τῆς $0: A \longrightarrow B$ εἶναι ὁ $(A, 1_A)$ καί ὁ συμπυρήνας ὁ $(1_B, B)$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "1_A"] & A \arrow[r, "0"] & B \\ & X \arrow[ul, dashed, "f"] \arrow[u, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "0"] & B \arrow[r, "1_B"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

vi) Στήν κατηγορία $\mathcal{M}_R^{\ell}$ τῶν ἀριστερά R-προτύπων, ἄν $f: A \longrightarrow B$ εἶναι R-γραμμική ἀπεικόνιση τότε ὁ πυρήνας τῆς f εἶναι τό ζεῦγος $(\ker f, i)$ ὅπου $i: \ker f \longrightarrow A$ ἡ κανονική ἐμφύτευση.

Ὁ συμπυρήνας τῆς $f: A \longrightarrow B$ εἶναι τό ζεῦγος $(p, B/f(A))$ ὅπου

$$p: B \longrightarrow B/f(A) : y \longmapsto p(y) = y + f(A)$$

ἡ κανονική προβολή.

§5. Γινόμενα καί συνγινόμενα

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.1. Ἔστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία καί $(X_i)_{i\in I}$ μία οἰκογένεια ἀντικειμένων τῆς $\mathcal{C}$. Ὀνομάζουμε γινόμενο τῆς οἰκογένειας $(X_i)_{i\in I}$ ἕνα ζεῦγος $(X, (p_i)_{i\in I})$, ὅπου $X\in\mathcal{C}$ καί $\forall i\in I$ $p_i: X\longrightarrow X_i$, τό ὁποῖο ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη:

$$\forall\, Y\in\mathcal{C}\ ,\ \forall\,(f_i)_{i\in I} \text{ μέ } f_i: Y\longrightarrow X_i\ ,\ \exists!\, f: Y\longrightarrow X:$$

$$p_i f = f_i \quad \forall i\in I$$

Οἱ μορφισμοί $p_i: X\longrightarrow X_i$ λέγονται προβολές.
Τό γινόμενο τῶν $(X_i)_{i\in I}$ συμβολίζεται συχνά μέ $\prod X_i$. Ἄν $I=\{1,2,\dots,n\}$ γράφουμε καί $\prod X_i = X_1\times X_2\times\dots\times X_n$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 5.2. i) Στήν κατηγορία $\mathcal{S}$ τῶν συνόλων γινόμενο εἶναι τό καρτεσιανό γινόμενο.
ii) Στήν κατηγορία $\mathcal{M}_R^{\ell}$ τῶν ἀριστερά R-προτύπων γινόμενο εἶναι τό γινόμενο τῶν προτύπων
iii) Στήν κατηγορία $\mathcal{T}$ τῶν τοπολογικῶν χώρων γινόμενο εἶναι τό τοπολογικό γινόμενο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 5.3. i) Γιά τόν μονοσήμαντα ὁρισμένο μορφισμό $f: Y\longrightarrow \prod X_i$ πού ἐπάγεται ἀπό τήν οἰκογένεια τῶν μορφισμῶν $f_i: Y\longrightarrow X_i$, $i\in I$ χρησιμοποιοῦμε καί τόν συμβολισμό

$$f=\{f_i\}$$

ii) Ἔστω $i_0\in I$. Ἄν $\forall i\neq i_0$ $\exists\, f_i: X_{i_0}\longrightarrow X_i$ τότε ὁρίζοντα $f_{i_0}=1_{X_{i_0}}: X_{i_0}\longrightarrow X_{i_0}$ ἔχουμε ὅτι $\exists!\, f: X_{i_0}\longrightarrow \prod X_i$ μέ $p_{i_0} f = f_{i_0} = 1_{X_{i_0}}$, δηλ. p_{i_0} retraction.

Σέ μία κατηγορία $\mathcal{C}$ ἡ ὕπαρξη τοῦ γινόμενου μιᾶς οἰκογένειας $(X_i)_{i\in I}$ δέν ἐξασφαλίζεται πάντα. Ὅμως ἄν ὑπάρχει τότε ὁρίζεται μονοσήμαντα ὡς πρός ἕνα ἰσομορφισμό:

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.4. Ἔστω $(X,(p_i)_{i\in I})$ καί $(X',(p_i')_{i\in I})$ γινόμενα τῆς οἰκογένειας $(X_i)_{i\in I}$. Τότε ὑπάρχει ἀκριβῶς ἕνας ἰσομορφισμός $\xi: X \longrightarrow X'$ μέ $p_i'\xi = p_i$, $\forall i\in I$.

Ἀπόδειξη. Ὑπάρχει ἕνας μοναδικός μορφισμός $\xi: X\longrightarrow X'$ μέ $p_i'\xi = p_i$ καί ἕνας μοναδικός μορφισμός $\eta: X'\longrightarrow X$ μέ $p_i\eta = p_i'$. Τότε

$$p_i\eta\xi = p_i'\xi = p_i = p_i 1_X \qquad \forall i\in I$$

ὁπότε ἐπειδή $(X,(p_i)_{i\in I})$ εἶναι γινόμενο, ἔχουμε $\eta\xi = 1_X$. Ὁμοίως $\xi\eta = 1_{X'}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.5. *i)* Ἔστω δύο οἰκογένειες $(X_i)_{i\in I}$ καί $(Y_i)_{i\in I}$ στήν κατηγορία $\mathcal{C}$. Ἄν τά γινόμενα $(X,(p_i)_{i\in I})$ καί $(Y,(p_i')_{i\in I})$ ὑπάρχουν καί ἄν $\forall i\in I$: $f_i: X_i \longrightarrow Y_i$ τότε ὁρίζεται μονοσήμαντα ἕνας μορφισμός

$$\Pi f_i : X \longrightarrow Y$$

μέ $p_i'(\Pi f_i) = f_i p_i$.

ii) Μέ τίς προηγούμενες ὑποθέσεις, ἄν $g_i: Z\longrightarrow X_i$ $\forall i\in I$ καί $h: W\longrightarrow Z$ τότε

$$\{g_i\}h = \{g_i h\} \quad \text{καί} \quad (\Pi f_i)\{g_i\} = \{f_i g_i\}$$

Απόδειξη. i) $f_i p_i : \Pi X_i \longrightarrow Y_i \quad \forall i \in I$. Ἐπειδὴ $(Y, (p_i')_{i\in I})$ εἶν γινόμενο $\exists! \ \Pi f_i : \Pi X_i \longrightarrow \Pi Y_i$ μέ $p_i'(\Pi f_i) = f_i p_i \quad \forall i \in I$.

ii) Ἀρκεῖ νά ἀποδείξουμε ὅτι οἱ συνθέσεις μέ τίς προβολές εἶν ὅλες ἴσες. Πράγματι:

$p_i \{g_i\} h = g_i h = p_i \{g_i h\}$ καί

$p_i'(\Pi f_i)\{g_i\} = (f_i p_i)\{g_i\} = f_i g_i = p_i'\{f_i g_i\}$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.6. Ἔστω $\mathcal{C}$ κατηγορία στήν ὁποία κάθε δύο ἀντικείμενα ἔχουν γινόμενο. Γιά τά ἀντικείμενα X, Y, Z τῆς $\mathcal{C}$ ὁρίζονται οἱ προβολές

$$p_1 : X\times Y \longrightarrow X \qquad q_1 : (X\times Y)\times Z \longrightarrow X\times Y$$
$$p_2 : X\times Y \longrightarrow Y \qquad q_2 : (X\times Y)\times Z \longrightarrow Z$$

Τότε $((X\times Y)\times Z,\ p_1 q_1,\ p_2 q_1,\ q_2)$ εἶναι γινόμενο τῶν X, Y, Z.

Απόδειξη. Ἄν $f_1 : W \longrightarrow X$, $f_2 : W \longrightarrow Y$, $f_3 : W \longrightarrow Z$ τότε ὑπάρχουν $g : W \longrightarrow X\times Y$ μέ $p_1 g = f_1$, $p_2 g = f_2$ καί $h : W \longrightarrow (X\times Y)\times Z$ μέ $q_1 h = g$, $q_2 h = f_3$, ὁπότε $p_1 q_1 h = f_1$, $p_2 q_1 h = f_2$.
Ἄν ὑπάρχει κι ἄλλη $h' : W \longrightarrow (X\times Y)\times Z$ μέ $p_1 q_1 h' = f_1$, $p_2 q_1 h' = f_2$ καί $q_2 h' = f_3$ τότε
$p_1 q_1 h' = p_1 q_1 h$ καί $p_2 q_1 h' = p_2 q_1 h \Rightarrow q_1 h = q_1 h'$.
Ὁπότε μαζί μέ τήν $q_2 h = q_2 h'$ δίδουν $h = h'$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.7. Ἄν κάθε ζεῦγος ἀντικειμένων τῆς $\mathcal{C}$ ἔχει γινόμενο, τότε κάθε πεπερασμένο πλῆθος ἀντικειμένων τῆς $\mathcal{C}$ ἔχει γινόμενο.

ΟΡΙΣΜΟΣ 5.8. Ἔστω $\mathcal{C}$ μία κατηγορία καὶ $(X_i)_{i\in I}$ μία οἰκογένεια ἀντικειμένων τῆς $\mathcal{C}$. Ὀνομάζουμε <u>συνγινόμενο τῆς οἰκογένειας $(X_i)_{i\in I}$</u> ἕνα ζεῦγος $(X,(q_i)_{i\in I})$ ὅπου $X\in\mathcal{C}$ καὶ $q_i : X_i \longrightarrow X$ $\forall i\in I$, ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν συνθήκη

$$\forall Y\in\mathcal{C},\ \forall (f_i)_{i\in I} \text{ μέ } f_i : X_i \longrightarrow Y \quad \exists!\, f : X \longrightarrow Y :$$

$$fq_i = f_i \quad \forall i\in I$$

Οἱ μορφισμοί $q_i : X_i \longrightarrow X$ λέγονται <u>ἐμφυτεύσεις</u>.
Τό ἄθροισμα τῶν $(X_i)_{i\in I}$ συμβολίζεται συχνά μέ $\amalg X_i$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 5.9. i) Γιά τόν μορφισμό $f : X \longrightarrow Y$ ποὺ ὁρίζεται μονοσήμαντα ἀπό τὴν οἰκογένεια τῶν μορφισμῶν $(f_i)_{i\in I}$ μέ $f_i : X_i \longrightarrow Y$ χρησιμοποιεῖται καὶ τό σύμβολο

$$f = \langle f_i \rangle_{i\in I}$$

ii) Ἔστω $i_0\in I$. Ἄν γιά κάθε $i\neq i_0$ $\exists\, f_i : X_i \longrightarrow X_{i_0}$ καὶ θέσουμε $f_{i_0} = 1_{X_{i_0}} : X_{i_0} \longrightarrow X_{i_0}$ ἔχουμε ὅτι $\exists!\, f : \amalg X_i \longrightarrow X_{i_0}$ μέ $fq_{i_0} = 1_{X_{i_0}}$, δηλ. q_{i_0} coretraction.
iii) Τό συνγινόμενο εἶναι ἡ δυϊκή ἔννοια τοῦ γινόμενου. Δέν ὑπάρχει πάντα, ἀλλά ὅταν ὑπάρχει ὁρίζεται μονοσήμαντα.
iv) Ἄν στὴν $\mathcal{C}$ κάθε ζεῦγος ἀντικειμένων ἔχει συνγινόμενο τότε κάθε πεπερασμένο πλῆθος ἀντικειμένων ἔχει συνγινόμενο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 5.10. i) Στὴν κατηγορία $\mathcal{S}$ συνγινόμενο εἶναι ἡ διακεκριμμένη ἕνωση.
ii) Στὴν κατηγορία $\mathcal{T}$ συνγινόμενο εἶναι ἡ διακεκριμμένη ἕνωση μέ τὴν φυσική τοπολογία.
iii) Στὴν κατηγορία $\mathcal{M}_R^l$ συνγινόμενο εἶναι τό εὐθύ ἄθροισμα.

§6. Pull-backs καί Push-outs.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.1. Ἔστω $\varphi: A \longrightarrow X$ καί $\psi: B \longrightarrow X$. Ἕνα <u>pull-back</u> τοῦ (φ,ψ) εἶναι μία τριάδα (Υ, a, b) μέ $a: \Upsilon \longrightarrow A$ καί $b: \Upsilon \longrightarrow B$ πού ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες:

i) $\varphi a = \psi b$.

ii) ἄν $\gamma: \Upsilon' \longrightarrow A$ καί $\delta: \Upsilon' \longrightarrow B$ εἶναι τέτοιοι ὥστε $\varphi\gamma = \psi\delta$ τότε $\exists!\ \omega: \Upsilon' \longrightarrow \Upsilon$ μέ $a\omega = \gamma$, $b\omega = \delta$.

$$\begin{tikzcd}
\Upsilon' \arrow[dr, dashed, "\omega"] \arrow[drr, bend left, "\gamma"] \arrow[ddr, bend right, "\delta"'] & & \\
& \Upsilon \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\
& B \arrow[r, "\psi"'] & X
\end{tikzcd}$$

Ἕνα pull-back ἐάν ὑπάρχει εἶναι οὐσιαστικά μοναδικό.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.2. Ἔστω ὅτι σέ μία κατηγορία $\mathcal{C}$ τό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
\Upsilon \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\
B \arrow[r, "\psi"'] & X
\end{tikzcd}$$

εἶναι pull-back. Ἄν ἡ $\mathcal{C}$ ἔχει μηδενικό ἀντικείμενο τότε:

i) $(J,\mu) = \operatorname{Ker} b \Rightarrow (J, a\mu) = \operatorname{Ker}\phi$.

ii) $(J,\nu) = \operatorname{Ker}\phi \Rightarrow \nu = a\mu$ καί $(J,\mu) = \operatorname{Ker} b$.

Τό (ii) εἶναι περιττό ἄν ξέρουμε πώς κάθε μορφισμός στήν $\mathcal{C}$ ἔχει πυρῆνα.

Ἀπόδειξη. i) $(J,\mu) = \operatorname{Ker} b \Rightarrow b\mu = 0 \Rightarrow \psi b\mu = \phi a\mu = 0$. Ἄν $\nu: Z \longrightarrow A$ μέ $\phi\nu = 0 \Rightarrow \phi\nu = \psi 0 \Rightarrow \exists!\ \zeta: Z \longrightarrow \Upsilon$ μέ $b\zeta = 0$

$$\begin{tikzcd} J \arrow[d, "\mu"'] & Z \arrow[l, "\xi"'] \arrow[dl, "\zeta"'] \arrow[ddl, "0"] \arrow[d, "\nu"] \\ Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\psi"'] & X \end{tikzcd}$$

και $a\zeta=\nu$. Όμως $b\zeta=0 \Rightarrow \zeta=\mu\xi$ οπότε $a\zeta=a\mu\xi=\nu$.

ii) Έστω $(J,\nu)=\mathrm{Ker}\phi$. Τότε $\phi\nu=0=\psi 0 \Rightarrow \exists!\ \mu: J\longrightarrow Y$ με

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\zeta"'] & J \arrow[dl, "\mu"'] \arrow[ddl, "0"] \arrow[d, "\nu"] \\ Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "\phi"] \\ B \arrow[r, "\psi"'] & X \end{tikzcd}$$

$a\mu=\nu$ και $b\mu=0$. Έστω $\zeta: Z\longrightarrow Y$ με $b\zeta=0$. Τότε $\psi b\zeta=0=\varphi a\zeta \Rightarrow \exists!\ \xi: J\longrightarrow Z$: $a\zeta=\nu\xi$. Θεωρώ $0: Z\longrightarrow B$ και $\nu\xi: Z\longrightarrow A$. $\varphi\nu\xi=\varphi a\zeta=\psi b\zeta=\psi 0$. Άρα υπάρχει ακριβώς ένας μορφισμός (ο ζ) : $Z\longrightarrow Y$ με $a\zeta=\nu\xi$ και $b\zeta=0$. Όμως $a\mu\xi=\nu\xi$ και $b\mu\xi=0$, άρα $\mu\xi=\zeta$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 6.3. Έστω $a: Y\longrightarrow A$ και $b: Y\longrightarrow B$ στην $\mathcal{C}$. Ένα push-out του (a,b) είναι μια τριάδα (X,φ,ψ) με $\phi: A\longrightarrow X$ και $\psi: B\longrightarrow X$ που ικανοποιεί τις συνθήκες:

i) $\phi a=\psi b$

ii) αν $fa=gb$ όπου $f: A\longrightarrow X'$ και $g: B\longrightarrow X'$ τότε $\exists!\ \omega: X\longrightarrow X'$ με $\omega\phi=f$ και $\omega\psi=g$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \arrow[dr, "f"] & \\ B \arrow[r, "\psi"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & X \arrow[r, dashed, "\omega"] & X' \end{tikzcd}$$

Ένα push-out, άν υπάρχει, είναι ουσιαστικά μοναδικό. Τό push-out είναι δυϊκή έννοια του pull-back.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.4. Έστω σέ μία κατηγορία $\mathcal{C}$ μέ μηδενικό αντικείμενο ένα push-out

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ B \arrow[r, "\psi"'] & X \end{tikzcd}$$

Τότε:

i) Άν $\varepsilon = \operatorname{coker}\phi \Rightarrow \varepsilon\psi = \operatorname{coker} b$.

ii) Άν $\eta = \operatorname{coker} b \Rightarrow \eta = \varepsilon\psi$ καί $\varepsilon = \operatorname{coker}\phi$.

Τό (ii) είναι περιττό άν κάθε μορφισμός στήν $\mathcal{C}$ έχει coker

ΠΡΟΤΑΣΗ 6.5. Έστω τό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "a"] & A \arrow[d, "\phi"] & \\ B \arrow[r, "\psi"'] & X \arrow[r, "x"'] & C \end{tikzcd}$$

όπου $\psi = \operatorname{Ker} x$. Τό διάγραμμα επεκτείνεται σέ pull-back $\Leftrightarrow a = \ker(x\phi)$.

Απόδειξη. Άν $a = \operatorname{Ker}(x\phi) \Rightarrow x\phi a = 0 \Rightarrow \exists!\, b: Y \to B : \phi a = \psi b$.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, "\omega"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[ddr, bend right, "g"'] & & & \\ & Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"] & A \arrow[d, "\varphi"] & \\ & B \arrow[r, "\psi"'] & X \arrow[r, "x"] & C \end{tikzcd}$$

$\phi f = \psi g \Rightarrow x\phi f = x\psi g = 0 \Rightarrow f = a\omega$. Τότε $\psi g = \varphi f = \varphi a\omega = \psi b\omega \Rightarrow g = b\omega$.

Αντίστροφα $\psi = \operatorname{Ker} x \Rightarrow x\psi b = x\phi a = 0$. Άν $x\varphi f = 0 \Rightarrow \varphi f = \psi g$ καί επειδή (Y, a, b) pull-back $\Rightarrow f = a\omega$ καί $g = b\omega$. Δηλ. $a = \ker(x\phi)$.

§7. Συναρτητές

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.1. Ἔστω $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ δύο κατηγορίες. Ἕνας *συναλλοίωτος συναρτητής* $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ εἶναι ἕνα ζεῦγος (F_1, F_2) ἀπεικονίσεων $F_1: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$, $F_2: \mathcal{M}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ πού ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες:

i) $f: A \longrightarrow B \Rightarrow F_2 f: F_1 A \longrightarrow F_1 B$.

ii) $F_2 1_A = 1_{F_1 A}$

iii) $F_2(f \circ g) = (F_2 f) \circ (F_2 g)$.

Ἕνας *ἀνταλλοίωτος συναρτητής* $F: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ εἶναι ἕνα ζεῦγος (F_1, F_2) ὅπως προηγουμένως πού ἱκανοποιεῖ τίς συνθῆκες:

i) $f: A \longrightarrow B \Rightarrow F_2 f: F_1 B \longrightarrow F_1 A$

ii) $F_2 1_A = 1_{F_1 A}$

iii) $F_2(f \circ g) = (F_2 g) \circ (F_2 f)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 7.2. i) Ἕνας ἀνταλλοίωτος συναρτητής $F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ εἶναι συναλλοίωτος συναρτητής $: \mathcal{A}^{opp} \longrightarrow \mathcal{B}$. Παρακάτω λέγοντας συναρτητής θά ἐννοοῦμε συναλλοίωτος συναρτητής.

ii) Μέ προφανή τρόπο μπορεῖ νά ὁρισθεῖ ταυτοτικός συναρτητής, σύνθεση συναρτητῶν, ἀντιστρέψιμος συναρτητής καί ἰσόμορφες κατηγορίες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ 7.3. 1) Ἡ ἐμφύτευση μιᾶς ὑποκατηγορίας στήν κατηγορία εἶναι συναρτητής.

2) Ἔστω S σύνολο καί $F(S)$ ἡ ἐλεύθερη ἀβελιανή ὁμάδα μέ βάση S. Τό F εἶναι συναρτητής $: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{Ab}$ καί λέγεται *ἐλεύθερος συναρτητής*. Ὅμοια ὑπάρχουν ἐλεύθεροι συναρτητές $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{G}$, $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{V}_F$, $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{M}^{l}_{R}$, κτλ.

3) Ὁ συναρτητής $U: \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{S}$ πού ἀπεικονίζει τόν τοπολ. χῶρο $(X, \mathcal{T})$ στό σύνολο X λέγεται ἐπιλήσμων. Ὅμοια ὑπάρχουν ἐπιλήσμονες συναρτητές $\mathcal{M}_R^l \longrightarrow \mathcal{A}b$, $\mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{A}b$ κ
4) Ἄν $A \in \mathcal{M}_R^l$, ἡ ἀπεικόνιση

$$F_A = \mathcal{M}_R^l(A,-) : \mathcal{M}_R^l \longrightarrow \mathcal{A}b : B \longmapsto Hom_R(A,B)$$

εἶναι συναρτητής. Λέμε ὅτι παρίσταται ἀπό τό A.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.4. Ἕνας συναρτητής $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ λέγεται πλήρης ἄν $\forall A,B \in \mathcal{C}$ ἀπεικονίζει τό $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ ἐπί τοῦ $Hom_{\mathcal{D}}(FA,FB)$. Λέγεται πιστός ἄν $\forall A,B \in \mathcal{C}$ ἡ $F: Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow Hom_{\mathcal{D}}(FA,FB)$ εἶναι 1-1 καί λέγεται full-embedding ἄν εἶναι πλήρης, πιστός καί $A \neq B \Rightarrow FA \neq FB$. Τότε $F(\mathcal{C})$ εἶναι πλήρης ὑποκατηγορία τῆς $\mathcal{D}$ ἐνῶ γενικά $F(\mathcal{C})$ δέν εἶναι ὑποκατηγορία.

ΟΡΙΣΜΟΣ 7.5. Ὀνομάζουμε γινόμενο τῶν $\mathcal{C}$ καί $\mathcal{D}$ τήν κατηγορία $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ πού ἔχει:

i) ἀντικείμενα: τά ζεύγη $(A,B) \in \mathcal{C}\times\mathcal{D}$.

ii) μορφισμούς: $Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((C_1,D_1),(C_2,D_2)) := Hom_{\mathcal{C}}(C_1,C_2) \times Hom_{\mathcal{D}}(D_1,D_2)$.

iii) σύνδεση: $(f_1,g_1)\circ(f_2,g_2) := (f_1f_2, g_1g_2)$.

Ἕνας συναρτητής $F: \mathcal{C}\times\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ λέγεται δισυναρτητής.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7.6. Γιά κάθε κατηγορία γινόμενο $\mathcal{C}\times\mathcal{D}$ ὁρίζεται ἕνας δισυναρτητής $P_{\mathcal{C}}: \mathcal{C}\times\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ μέ $P_{\mathcal{C}}(A,B) = A$ καί $P_{\mathcal{C}}(f,g) = f$ κι ἕνας δισυναρτητής $P_{\mathcal{D}}: \mathcal{C}\times\mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ μέ $P_{\mathcal{D}}(A,B) = B$ καί $P_{\mathcal{D}}(f,g) = g$. Οἱ $P_{\mathcal{C}}$ καί $P_{\mathcal{D}}$ λέγονται προβολικοί συναρτητές.

ΠΡΟΤΑΣΗ 7.7. Έστω $F_B : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ και $G_A : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ συναρτητές $\forall A \in \mathcal{A}$ και $\forall B \in \mathcal{B}$. Τότε αν

$$F_B(A) = G_A(B) \quad \text{και} \quad F_{B'}(f)\, G_A(g) = G_{A'}(g)\, F_B(f)$$

$\forall A, A' \in \mathcal{A}$, $\forall B, B' \in \mathcal{B}$, $\forall f : A \longrightarrow A'$, $\forall g : B \longrightarrow B'$, υπάρχει ακριβώς ένας δισυναρτητής $H : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C}$ με

$$H(A,B) = F_B(A) \quad \text{και} \quad H(f,g) = F_{B'}(f)\, G_A(g).$$

Απόδειξη. $H(1_A, 1_B) = F_B(1_A)\, G_A(1_B) = 1_{F_B(A)} \circ 1_{G_A(B)} =$
$= 1_{H(A,B)} \circ 1_{H(A,B)} = 1_{H(A,B)}$.

$H(f_1 f_2, g_1 g_2) = F_{B''}(f_1 f_2)\, G_A(g_1 g_2) = F_{B''}(f_1)\, F_{B''}(f_2)\, G_A(g_1)\, G_A(g_2)$
$= F_{B''}(f_1) G_{A'}(g_1)\, F_{B'}(f_2)\, G_A(g_2) = H(f_1, g_1) \circ H(f_2, g_2)$.

§8. Φυσικοί μετασχηματισμοί

ΟΡΙΣΜΟΣ 8.1. Θεωρώ τούς συναρτητές $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$. Ένας <u>φυσικός μετασχηματισμός</u> $t : F \longrightarrow G$ είναι μία απεικόνιση $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{D}} : X \longmapsto t(X) := t_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(FX, GX)$ τέτοια ώστε γιά κάθε $f : X \longrightarrow Y$ στην $\mathcal{C}$, τό διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} FX \arrow[r, "t_X"] \arrow[d, "Ff"'] & GX \arrow[d, "Gf"] \\ FY \arrow[r, "t_Y"'] & GY \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Αν $\forall X \in \mathcal{C}$ t_X είναι ισομορφισμός, τότε ό t λέγεται <u>φυσική ισοδυναμία</u>.

§9 Επαγωγικά και προβολικά συστήματα.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9.1. Εστω $\mathscr{C}$ μια κατηγορία και $(\Lambda, \leq)$ ένα κατευθυνόμενο σύνολο. Ενα <u>επαγωγικό σύστημα</u> στην $\mathscr{C}$ (με δείκτες από το Λ) είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής $\mathbb{A}: \Lambda \longrightarrow \mathscr{C}$. Ισοδύναμα, είναι μια οικογένεια $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ αντικειμένων της $\mathscr{C}$ μαζί με μία οικογένεια μορφισμών $\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}: A_{\lambda_1} \longrightarrow A_{\lambda_2}$, $\forall\, \lambda_1 \leq \lambda_2$, που ικανοποιούν τις συνθήκες:

(i) $\phi^{\lambda}_{\lambda} = id_{A_\lambda}$, $\forall\, \lambda\in\Lambda$, και

(ii) $\phi^{\lambda_2}_{\lambda_3} \circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2} = \phi^{\lambda_1}_{\lambda_3}$, $\forall\, \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$.

ΟΡΙΣΜΟΣ 9.2. Εστω $\mathbb{A}: \Lambda \longrightarrow \mathscr{C}$ ένα επαγωγικό σύστημα. Ονομάζουμε <u>επαγωγικό όριο</u> του συστήματος ένα ζεύγος $(A, (\phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$, όπου $A\in\mathscr{C}$ και $\phi_\lambda \in Hom_{\mathscr{C}}(A_\lambda, A)$, $\forall\, \lambda\in\Lambda$, αν

(i) $\phi_{\lambda_2} \circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2} = \phi_{\lambda_1}$, $\forall\, \lambda_1 \leq \lambda_2$

και επιπλέον ικανοποιείται η επόμενη (καθολική) συνθήκη:

(ii) για κάθε ζεύγος $(B, (\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$, όπου $B\in\mathscr{C}$ και $\psi_\lambda \in Hom_{\mathscr{C}}(A_\lambda, B)$, $\lambda\in\Lambda$, με $\psi_{\lambda_2}\circ \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2} = \psi_{\lambda_1}$, $\forall\, \lambda_1\leq\lambda_2$, υπάρχει ακριβώς ένας $h\in Hom_{\mathscr{C}}(A,B)$:

$$h\circ\phi_\lambda = \psi_\lambda, \quad \forall\, \lambda\in\Lambda.$$

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[rr, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"] \arrow[dr, "\phi_{\lambda_1}"] \arrow[ddr, "\psi_{\lambda_1}"'] & & A_{\lambda_2} \arrow[dl, "\phi_{\lambda_2}"'] \arrow[ddl, "\psi_{\lambda_2}"] \\
& A \arrow[d, dashed, "h"'] & \\
& B &
\end{tikzcd}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.3. Αν το επαγωγικό σύστημα $\mathcal{A} : \Lambda \to \mathcal{C}$ έχει όριο (A, ϕ_λ), το όριο είναι μονοσήμαντα ορισμένο ως προς ισομορφισμό.

Απόδειξη. Εστω $(A, (\phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ και $(B, (\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ δύο όρια του συστήματος. Επειδή (A, ϕ_λ) όριο και οι ψ_λ κάνουν μεταθετικό το (μεγάλο) τρίγωνο στο διάγραμμα της σελ. 21, $\exists!\ h : A \to B$ με

$$h \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda, \quad \forall \lambda\in\Lambda.$$

Παρόμοια, επειδή (B, ψ_λ) είναι όριο, $\exists!\ h' : B \to A$ με

$$h' \circ \psi_\lambda = \phi_\lambda, \quad \forall \lambda\in\Lambda.$$

Αρα $(h' \circ h) \circ \phi_\lambda = \phi_\lambda$, $\forall \lambda\in\Lambda$.

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[rr, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"] \arrow[dr, "\phi_{\lambda_1}"] \arrow[ddr, bend right, "\phi_{\lambda_1}"'] & & A_{\lambda_2} \arrow[dl, "\phi_{\lambda_2}"'] \arrow[ddl, bend left, "\phi_{\lambda_2}"] \\
& A \arrow[d, "1_A"] & \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Στο ανωτέρω διάγραμμα, ξαναεφαρμόζοντας τον ορισμό του επαγ. ορίου για το A και τον εαυτό του, έχουμε ότι $\exists!\ \xi : A \to A$ με $\xi \circ \phi_\lambda = \phi_\lambda$, $\forall \lambda\in\Lambda$. Επειδή $1_A \circ \phi_\lambda = (h' \circ h) \circ \phi_\lambda = \phi_\lambda$, $\forall \lambda\in\Lambda$, έπεται ότι $h' \circ h = 1_A$. Παρόμοια αποδεικνύουμε ότι $h \circ h' = 1_B$. ∎

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.4. Στην κατηγορία $\mathcal{S}$ των συνόλων, κάθε επαγωγικό σύστημα έχει επαγωγικό όριο.

Απόδειξη. Εστω $(A_\lambda, (\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}))$ ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων με δείκτες από ένα κατευθυνόμενο σύνολο Λ. Θεωρούμε την διακεκριμένη ένωση $\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ εφοδιασμένη με την σχέση

$$A_{\lambda_1} \ni a_1 \sim a_2 \in A_{\lambda_2} \Leftrightarrow \exists\, \lambda \geq \lambda_1, \lambda_2 : \phi^{\lambda_1}_{\lambda}(a_1) = \phi^{\lambda_2}_{\lambda}(a_2)$$

Η ανωτέρω σχέση είναι σχέση ισοδυναμίας: Είναι προφανώς αυτοπαθής και συμμετρική. Είναι και μεταβατική: αν $a_1 \in A_{\lambda_1}$, $a_2 \in A_{\lambda_2}$, $a_3 \in A_{\lambda_3}$ με $a_1 \sim a_2$ και $a_2 \sim a_3$, τότε $\exists\, \lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με $\phi^{\lambda_1}_{\lambda}(a_1) = \phi^{\lambda_2}_{\lambda}(a_2)$ και $\exists\, \mu \geq \lambda_2, \lambda_3$ με $\phi^{\lambda_2}_{\mu}(a_2) = \phi^{\lambda_3}_{\mu}(a_3)$. Θεωρούμε $k \geq \lambda, \mu$. Τότε

$$\phi^{\lambda_1}_{k}(a_1) = \phi^{\lambda}_{k}(\phi^{\lambda_1}_{\lambda}(a_1)) = \phi^{\lambda}_{k}(\phi^{\lambda_2}_{\lambda}(a_2)) = \phi^{\lambda_2}_{k}(a_2) =$$
$$= \phi \quad (\phi^{\lambda_2}_{\mu}(a_2)) = \phi^{\mu}_{k}(\phi^{\lambda_3}_{\mu}(a_3)) = \phi^{\lambda_3}_{k}(a_3),$$

δηλ. $a_1 \sim a_3$. Εστω A το σύνολο πηλίκο, δηλ.

$$A = \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \big/ \sim$$

και

$$q : \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \longrightarrow A : a \longmapsto [a]$$

η κανονική απεικόνιση. Συμβολίζουμε με $\phi_\lambda : A_\lambda \to A$ τους περιορισμούς της q, δηλ.

$$\phi_\lambda(a) = [a] \in A \ , \quad \forall\, \lambda \in \Lambda, \ \forall\, a \in A_\lambda.$$

Ισχυριζόμαστε ότι $(A, \phi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι επαγωγικό όριο του συστήματος $(A_\lambda, \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2})$. Πράγματι:

(i) $\forall\, \lambda_1 \leq \lambda_2$, $\forall\, a \in A_{\lambda_1}$ είναι $a \sim \phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a)$, άρα $[a] = [\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a)]$ και $\phi_{\lambda_1}(a) = \phi_{\lambda_2}(\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}(a))$.

(ii) Εστω $(B, (\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ με B σύνολο και $\psi_\lambda : A_\lambda \to B$ απεικονίσεις που κάνουν μεταθετικά όλα τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} A_{\lambda_1} \arrow[rr, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"] \arrow[dr, "\psi_{\lambda_1}"'] & & A_{\lambda_2} \arrow[dl, "\psi_{\lambda_2}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Εστω $[a] \in A$, όπου $[a]$ η κλάση ενός $a \in A_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$. Θέτουμε

$$h : A \to B : [a] \mapsto h([a]) := \psi_\lambda(a).$$

Η h είναι καλά ορισμένη: αν $a_1 \sim a_2$ με $a_1 \in A_{\lambda_1}$ και $a_2 \in A_{\lambda_2}$, τότε $\exists\, \lambda \geq \lambda_1, \lambda_2$ με $\phi^{\lambda_1}_{\lambda}(a_1) = \phi^{\lambda_2}_{\lambda}(a_2)$. Άρα

$$\psi_{\lambda_1}(a_1) = \psi_\lambda(\phi^{\lambda_1}_\lambda(a_1)) = \psi_\lambda(\phi^{\lambda_2}_\lambda(a_2)) = \psi_{\lambda_2}(a_2).$$

Η h είναι η μοναδική για την οποία $h \circ \phi_\lambda = \psi_\lambda$, από τον ορισμό της. ■

ΟΡΙΣΜΟΣ 9.5. Εστω $\mathbb{A}, \mathbb{B} : \Lambda \to \mathcal{C}$ δύο επαγωγικά συστήματα. Ενας μορφισμός επαγωγικών συστημάτων $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ είναι ενας φυσικός μετασχ. μεταξύ των συναρτητών $\mathbb{A}$ και $\mathbb{B}$, δηλ. μια οικογένεια $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ μορφισμών $f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda$ στην $\mathcal{C}$, που κάνουν μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A_{\lambda_1} \arrow[r, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"] \arrow[d, "f_{\lambda_1}"'] & A_{\lambda_2} \arrow[d, "f_{\lambda_2}"] \\ B_{\lambda_1} \arrow[r, "\psi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"'] & B_{\lambda_2} \end{tikzcd} \qquad (*)$$

για κάθε $\lambda_1 \leq \lambda_2$.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.5. Αν τα επαγωγικά συστήματα $\mathbb{A}, \mathbb{B} : \Lambda \to \mathcal{C}$ έχουν όρια (A, ϕ_λ), (B, ψ_λ), τότε κάθε μορφισμός επαγωγικών συστημάτων $f = (f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$ ορίζει ένα μοναδικό μορφισμό $\bar{f} : A \to B$ (στην $\mathcal{C}$) που κάνει μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} A_\lambda \arrow[r, "f_\lambda"] \arrow[d, "\phi_\lambda"'] & B_\lambda \arrow[d, "\psi_\lambda"] \\ A \arrow[r, "\bar{f}"'] & B \end{tikzcd}$$

για κάθε $\lambda \in \Lambda$.

Απόδειξη. Η μεταθετικότητα των διαγραμμάτων $(*)$ και

$$\begin{tikzcd} B_{\lambda_1} \arrow[rr, "\psi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"] \arrow[dr, "\psi_{\lambda_1}"'] & & B_{\lambda_2} \arrow[dl, "\psi_{\lambda_2}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

εξασφαλίζει την μεταθετικότητα του μεγάλου τριγώνου στο διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
A_{\lambda_1} \arrow[rr, "\phi^{\lambda_1}_{\lambda_2}"] \arrow[dr, "\phi_{\lambda_1}"] \arrow[ddr, "\psi_{\lambda_1}\circ f_{\lambda_1}"'] & & A_{\lambda_2} \arrow[dl, "\phi_{\lambda_2}"'] \arrow[ddl, "\psi_{\lambda_2}\circ f_{\lambda_2}"] \\
& A \arrow[d, "\bar{f}"] & \\
& B &
\end{tikzcd}$$

άρα, αφού $(A, (\phi_\lambda))$ είναι όριο του $\mathbb{A}$, $\exists!\ \bar{f} : A \to B$ με $\bar{f}\circ\phi_\lambda = \psi_\lambda \circ f_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$ (μεταθ/τητα των πλευρικών τριγώνων). ∎

Εστω $\mathbb{A} : \Lambda \to \mathcal{G}$ ένα επαγωγικό σύστημα στην κατηγορία των ομάδων και $F : \mathcal{G} \to \mathcal{S}et$ ο επιλήσμων συναρτητής. Τότε η σύνθεση $F\circ\mathbb{A} : \Lambda \to \mathcal{S}et$ είναι επαγωγικό σύστημα συνόλων με όριο (στην $\mathcal{S}et$) το $(A, (\phi_\lambda))$. Ισχύει η επόμενη:

ΠΡΟΤΑΣΗ 9.7. Με τις προηγούμενες υποθέσεις:

(i) Το A δέχεται δομή ομάδας.

(ii) Κάθε $\phi_\lambda : A_\lambda \to A$ είναι μορφισμός ομάδων.

(iii) Αν $(f_\lambda : A_\lambda \to B_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ είναι μορφισμός επαγωγικών συστημάτων ομάδων (: κάθε f_λ είναι μορφ. ομάδων), τότε το όριο $\bar{f} : A \to B$ είναι μορφ. ομάδων.

Απόδ. (i) Εστω $[a],[b]\in A$. Τότε $\exists \lambda_1\in\Lambda$ με $a\in A_{\lambda_1}$ και $\exists \lambda_2\in\Lambda$ με $b\in A_{\lambda_2}$. Επίσης $\exists \lambda\geq\lambda_1,\lambda_2$. Τότε $\phi_\lambda^{\lambda_1}(a),\phi_\lambda^{\lambda_2}(b)\in A_\lambda$ και A_λ είναι ομάδα, θέτουμε

$$[a]*[b]:=[\phi_\lambda^{\lambda_1}(a)*\phi_\lambda^{\lambda_2}(b)].$$

Η πράξη είναι καλά ορισμένη: Αν $[a]=[a']$ και $[b]=[b']$ τότε $a\in A_{\lambda_1}$, $a'\in A_{\lambda_1'}$, $b\in A_{\lambda_2}$, $b'\in A_{\lambda_2'}$ και $\exists \lambda\geq\lambda_1,\lambda_1'$ με $\phi_\lambda^{\lambda_1}(a)=\phi_\lambda^{\lambda_1'}(a')$ και $\exists \mu\geq\lambda_2,\lambda_2'$ με $\phi_\mu^{\lambda_2}(b)=\phi_\mu^{\lambda_2'}(b')$. Θεωρούμε ένα $\nu\geq\lambda,\mu\Rightarrow\nu\geq\lambda_1,\lambda_1',\lambda_2,\lambda_2'$. Τότε:

$$\phi_\nu^{\lambda_1}(a)*\phi_\nu^{\lambda_2}(b)=\phi_\nu^{\lambda}\circ\phi_\lambda^{\lambda_1}(a)*\phi_\nu^{\mu}\circ\phi_\mu^{\lambda_2}(b)=$$

$$=\phi_\nu^{\lambda}\circ\phi_\lambda^{\lambda_1'}(a')*\phi_\nu^{\mu}\circ\phi_\mu^{\lambda_2'}(b')=$$

$$=\phi_\nu^{\lambda_1'}(a')*\phi_\nu^{\lambda_2'}(b')\Rightarrow$$

$$[\phi_\nu^{\lambda_1}(a)*\phi_\nu^{\lambda_2}(b)]=[\phi_\nu^{\lambda_1'}(a')*\phi_\nu^{\lambda_2'}(b')].$$

Είναι άμεσο ότι η πράξη $*$ στο A είναι πράξη ομάδας. Το ουδέτερο του A είναι το $[e_\lambda]$, όπου e_λ το ουδέτερο στην A_λ, για οποιοδήποτε $\lambda\in\Lambda$, και το αντίστροφο του $[a]$ είναι το $[a^{-1}]$.

(ii) Εστω $a,b\in A_\lambda$. Τότε $\phi_\lambda(a)*\phi_\lambda(b)=[a]*[b]=$ $=[a*b]=\phi_\lambda(a*b)$, εξ ορισμού της $[a]*[b]$.

(iii) Εστω $[a],[b]\in A$. Τότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\phi_{\lambda_2}^{\lambda_1}$, ϕ_λ, $\psi_{\lambda_2}^{\lambda_1}$, ψ_λ, f_λ είναι μορφισμοί ομάδων, έχουμε:

$$\bar{f}([a]*[b]) = \bar{f}([\phi_\lambda^{\lambda_1}(a) * \phi_\lambda^{\lambda_2}(b)]) =$$

$$= \bar{f}\circ\phi_\lambda(\phi_\lambda^{\lambda_1}(a) * \phi_\lambda^{\lambda_2}(b)) =$$

$$= \psi_\lambda\circ f_\lambda(\phi_\lambda^{\lambda_1}(a) * \phi_\lambda^{\lambda_2}(b)) =$$

$$= \psi_\lambda\circ f_\lambda\circ\phi_\lambda^{\lambda_1}(a) * \psi_\lambda\circ f_\lambda\circ\phi_\lambda^{\lambda_2}(b) =$$

$$= \bar{f}\circ\phi_\lambda\circ\phi_\lambda^{\lambda_1}(a) * \bar{f}\circ\phi_\lambda\circ\phi_\lambda^{\lambda_2}(b) =$$

$$= \bar{f}([\phi_\lambda^{\lambda_1}(a)]) * \bar{f}([\phi_\lambda^{\lambda_2}(b)]) =$$

$$= \bar{f}([a]) * \bar{f}([b]). \quad \blacksquare$$

ΑΣΚΗΣΗ. Να ορίσετε τις δυϊκές έννοιες του επαγωγικού συστήματος (: προβολικό σύστημα) και του επαγωγικού ορίου (: προβολικό όριο) και να εξετάσετε αν ισχύουν οι αντίστοιχες των προτάσεων 9.3, 9.4, 9.6 και 9.7.

ΑΣΚΗΣΗ. Να εξετάσετε αν επαγωγικά και προβολικά όρια κληρονομούν τυχόν υπάρχουσες τοπολογίες (δηλ. αν υπάρχουν επαγωγικά/προβολικά όρια στην κατηγορία $\mathcal{T}op$). Το ίδιο για την κατηγορία των διαφορικών πολλαπλοτήτων.

§ 10. Προσαρτημένοι (adjoint) συναρτητές

ΟΡΣ. 10.1. Έστω $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ κατηγορίες και $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$, $G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ (συναλλοίωτοι) συναρτητές. Λέμε ότι ο F είναι <u>αριστερά</u> προσαρτημένος στον G, αν $\forall\, C\in\mathcal{C}$ και $\forall\, D\in\mathcal{D}$, υπάρχει ένας ισομορφισμός

$$\Phi_{CD} : \mathrm{Mor}(F(C), D) \longrightarrow \mathrm{Mor}(C, G(D)),$$

που είναι φυσικός ως προς κάθε ένα από τους δείκτες C, D.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ 10.2. (i) Το $\mathrm{Mor}(F(C), D)$ είναι σύνολο μορφισμών στην κατηγορία $\mathcal{D}$ και το $\mathrm{Mor}(C, G(D))$ είναι σύνολο μορφισμών στην κατηγορία $\mathcal{C}$.

(ii) Η φυσικότητα του Φ_{CD} ως προς καθένα από τα C, D σημαίνει ότι αν το ένα σταθεροποιηθεί, έχουμε φυσικό μετασχ. ως προς το άλλο.

Εστω $D \in \mathcal{D}$, σταθ. Τότε ορίζεται ο ανταλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Mor}(F(\cdot), D) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$$

μέσω των σχέσεων:

$$\mathcal{C} \ni C \rightsquigarrow \mathrm{Mor}(F(C), D) \in \mathcal{S}et$$

και, $\forall\ f : C \to C'$ μορφισμό στην $\mathcal{C}$,

$$\mathrm{Mor}(F(f), D) : \mathrm{Mor}(F(C'), D) \longrightarrow \mathrm{Mor}(F(C), D)$$
$$h \longmapsto h \circ F(f)$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "f"'] & & F(C) \arrow[d, "F(f)"'] & \\ C' & & F(C') \arrow[r, "h"'] & D \end{tikzcd}$$

Επίσης ορίζεται ο ανταλλοίωτος συναρτητής

$$\mathrm{Mor}(\cdot, G(D)) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{S}et$$

μέσω των σχέσεων

$$\mathcal{C} \ni C \rightsquigarrow \mathrm{Mor}(C, G(D)) \in \mathcal{S}et$$

και, $\forall\ f : C \to C'$ μορφισμό στην $\mathcal{C}$,

$$Mor(f, G(D)) : Mor(C', G(D)) \longrightarrow Mor(C, G(D))$$
$$h \longmapsto h \circ f$$

Η φυσικότητα του Φ_{CD} ως προς C (με D σταθ.) σημαίνει ότι η οικογένεια $(\Phi_{CD})_{C\in\mathcal{C}}$ είναι φυσικός μετσχ (ισομορφ.) μεταξύ των συναρτητών $Mor(F(\cdot), D)$ και $Mor(\cdot, G(D))$, δηλ. $\forall\, f: C \to C'$ είναι μεταθετικό το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd}
Mor(F(C), D) \arrow[r, "\Phi_{CD}"] & Mor(C, G(D)) \\
Mor(F(C'), D) \arrow[u, "Mor(F(f), D)"] \arrow[r, "\Phi_{C'D}"'] & Mor(C', G(D)) \arrow[u, "Mor(f, G(D))"']
\end{tikzcd}$$

Αντίστοιχα, αν σταθεροποιήσουμε το $C \in \mathcal{C}$, ορίζονται οι συναλλοίωτοι συναρτητές

$$Mor(F(C), \cdot),\ Mor(C, G(\cdot)) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{S}et,$$

όπου ο πρώτος δίνεται από τις σχέσεις

$$\mathcal{D} \ni D \rightsquigarrow Mor(F(C), D) \in \mathcal{S}et$$

και $\forall\, g: D \to D'$ στην $\mathcal{D}$

$$Mor(F(C), g) : Mor(F(C), D) \longrightarrow Mor(F(C), D')$$
$$h \longmapsto g \circ h$$

ενώ ο δεύτερος δίνεται από τις σχέσεις

$$\mathcal{D} \ni D \rightsquigarrow Mor(C, G(D)) \in \mathcal{S}et$$

και $\forall\, g: D \to D'$ στην $\mathcal{D}$

$$Mor(C, G(g)) : Mor(C, G(D)) \longrightarrow Mor(C, G(D'))$$
$$h \longmapsto G(g) \circ h.$$

Η φυσικότητα του Φ_{CD} ως προς D (με C σταθ.) σημαίνει ότι η οικογ $(\Phi_{CD})_{D\in\mathcal{D}}$ είναι φυσ. μετασχ. (ισομορφ.) μεταξύ των $Mor(F(C),\cdot)$ και $Mor(C,G(\cdot))$, δηλ. $\forall\ g: D \to D'$ είναι μεταθετικό το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} Mor(F(C),D) \arrow[r, "\Phi_{CD}"] \arrow[d, "Mor(F(C),g)"'] & Mor(C, G(D)) \arrow[d, "Mor(C,G(g))"] \\ Mor(F(C),D') \arrow[r] & Mor(C, G(D')) \end{tikzcd}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 10.3. Εστω $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ και $G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ συναλλοίωτοι συναρτητές. Τότε είναι ισοδύναμα:

(i) Ο F είναι αριστερά προσαρτημένος του G.

(ii) Υπάρχουν φυσικοί μετασχ. $\eta: I_{\mathcal{C}} \longrightarrow GF$ και $\varepsilon: FG \longrightarrow I_{\mathcal{D}}$ που κάνουν μεταθετικά τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\eta G"'] & & G \\ & GFG \arrow[ur, "G\varepsilon"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "F\eta"'] & & F \\ & FGF \arrow[ur, "\varepsilon F"'] & \end{tikzcd}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 10.4. Αν δίνεται το (i), $\forall\, C \in \mathcal{C}$ είναι $F(C) \in \mathcal{D}$, άρα $\exists\ \Phi_{C,F(C)}: Mor(F(C),F(C)) \longrightarrow Mor(C, G(F(C)))$. Τότε ο φυσ. μετασχ $(\eta_C)_{C\in\mathcal{C}}$ δίνεται από την

$$\eta_C := \Phi_{C,F(C)}(1_C).$$

Επίσης, $\forall\, D \in \mathcal{D}$, είναι $G(D) \in \mathcal{C}$, άρα υπάρχει ο

$$\Phi_{G(D),D}: Mor(F(G(D)),D) \longrightarrow Mor(G(D),G(D)).$$

Τότε ο φυσ. μετασχ. $(\varepsilon_D)_{D\in\mathcal{D}}$ δίνεται από την

$$\varepsilon_D := \Phi^{-1}_{G(D),D}(1_{G(D)}).$$

Αντίστροφα, αν δίνεται το (ii), τότε για κάθε $f \in Mor(F(C), D)$ είναι

$$\Phi_{CD}(f) := G(f)\circ\eta_C$$

και $\forall\, g: C \to G(D)$

$$\Phi_{CD}(g^{-1}) = \varepsilon_D \circ F(g).$$