ΔΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

$(S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ προδράγμα συνόλων πάνω από το X

Σταθεροποιούμε $x \in X$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow (S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}^o_x}$ επαγωγικό σύστημα συνόλων με δείκτη από το κατευθυνόμενο $(\mathcal{N}^o_x, \leq \equiv \supseteq)$.

Ακολουθώντας την γενική θεωρία για την κατασκευή επαγωγικού ορίου, παίρνουμε:

- την διακεκριμένη ένωση $\bigsqcup_{U \in \mathcal{N}^o_x} S(U)$

- την σχέση ισοδυναμίας: για $s \in S(U)$, $\sigma \in S(V)$, $U, V \in \mathcal{N}^o_x$

$$s \underset{x}{\sim} \sigma \iff \exists \underset{\underset{U \cap V}{\cap \! |}}{W} \in \mathcal{N}^o_x : \rho^U_W(s) = \rho^V_W(\sigma)$$

- το σύνολο πηλίκο

$$\mathcal{S}_x := \bigsqcup_{U \in \mathcal{N}^o_x} S(U) \Big/ \sim$$

- την κανονική απεικόνιση, $\forall\, U \in \mathcal{N}^o_x$:

$$\rho^U_x : S(U) \longrightarrow \mathcal{S}_x : s \longmapsto [s]_x$$

Θεωρούμε τώρα την διακεκριμένη ένωση $\mathcal{S} = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x$ και την

$$\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X : \underset{\underset{\mathcal{S}_x}{\cap \! |}}{z} \longmapsto \pi(z) = x$$

Θδο υπάρχει τοπολογία $\tau_{\mathcal{S}}$ στο $\mathcal{S}$, ώστε η τριάδα $(\mathcal{S}, \pi, X)$ να είναι δράγμα.

$\forall U \in \tau_X$, $\forall s \in \mathcal{S}(U)$ θέτουμε

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S} : x \longmapsto \tilde{s}(x) := \rho_x^U(s) = [s]_x \in \mathcal{S}_x.$$

Προφανώς $\tilde{s}$ είναι 1-1 και $\pi \circ \tilde{s} = id_U$.

Θέτουμε

$$\mathcal{B} = \{ \tilde{s}(U) : U \in \tau_X, s \in \mathcal{S}(U) \}$$

Θδο $\mathcal{B}$ βάση για μια τοπολογία του $\mathcal{S}$.

Λήμμα 1

$\forall z \in \mathcal{S}$ $\exists$ $U \in \tau_X$ και $s \in \mathcal{S}(U)$: $z = \tilde{s}(x)$, για κάποιο $x \in U$.

Απόδ.

$z \in \mathcal{S} = \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x \Rightarrow \exists!\, x \in X : z \in \mathcal{S}_x =$ σύνολο πηλίκο της $\sim_x$

$\Rightarrow z = [s]_x = \tilde{s}(x) = \rho_x^U(s)$,

για κάποια $U \in \mathcal{N}_x^o$ και $s \in \mathcal{S}(U)$.

Λήμμα 2

Αν $U, V \in \tau_X$, $s \in \mathcal{S}(U)$, $\sigma \in \mathcal{S}(V)$ και $\exists$ $z \in \tilde{s}(U) \cap \tilde{\sigma}(V)$

$\Rightarrow \exists$ $W \subseteq U \cap V$: $\tilde{s}|_W = \tilde{\sigma}|_W$

Απόδ.

$z = \tilde{s}(x) = \tilde{\sigma}(y)$ για κάποια $x \in U$ και $y \in V$, όμως
$\tilde{s}(x) = [s]_x \in \mathcal{S}_x$, $\tilde{\sigma}(y) = [\sigma]_y \in \mathcal{S}_y$ και $\mathcal{S}$
διακεκρ. ένωση $\Rightarrow x = y$. Άρα

$\exists\, x \in U \cap V : [s]_x = [\sigma]_x \Rightarrow$

$\exists\, x \in U \cap V : s \sim_x \sigma \Rightarrow$

$\exists\, x \in U \cap V$ και $\exists\, \underset{\mathcal{N}^o_x}{\overset{\cap}{W}} \subseteq U \cap V : \rho^U_W(s) = \rho^V_W(\sigma) =: t \in S(W)$

Τότε, $\forall\, y \in W$:

$\tilde{t}(y) = \rho^W_y(t) = \rho^W_y(\rho^U_W(s)) = \rho^U_y(s) = [s]_y = \tilde{s}(y)$,

και, παρόμοια,

$\tilde{t}(y) = [\sigma]_y = \tilde{\sigma}(y)$.

$$\begin{tikzcd}
s \in S(U) \arrow[dr, "\rho^U_W"] \arrow[drr, bend left, "\rho^U_y"] & & \\
& S(W) \arrow[r, "\rho^W_y"'] & \mathcal{S}_y \\
\sigma \in S(V) \arrow[ur] \arrow[urr, bend right, "\rho^V_y"'] & &
\end{tikzcd}$$

Παρατήρηση

$s \in S(U),\ V \subseteq U \Rightarrow \tilde{s}|_V = \widetilde{\rho^U_V(s)}$

Πρόταση

Η οικογένεια $\mathcal{B} = \{\tilde{s}(U) : U \in \tau_X,\ s \in S(U)\}$ είναι βάση για μια τοπολογία $\tau_{\mathcal{S}}$ του $\mathcal{S}$.

Απόδ. Προφανώς, από Λήμματα 1, 2.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η $\pi : (\mathcal{S}, \tau_{\mathcal{S}}) \longrightarrow (X, \tau_X)$ είναι τοπικός ομοιομορφισμός.

Απόδ

Παρατηρούμε ότι $\forall B \in \mathcal{B} : B = \tilde{s}(U)$, $U \in \tau_X$, ο περιορισμός $\pi|_B : B = \tilde{s}(U) \longrightarrow U$ είναι 1-1 και επί, με

$$(\pi|_B)^{-1} = \tilde{s}.$$

Αρκεί νδο $\tilde{s} : U \longrightarrow \tilde{s}(U)$ συνεχής και ανοιχτή:

→ $\tilde{s}$ ανοιχτή:

Εστω $V \in \tau_X : V \subseteq U \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall y \in V : \tilde{s}(y) = [s]_y = \rho^U_y(s) = \rho^V_y(\rho^U_V(s)) =$$

$$= [\underbrace{\rho^U_V(s)}_{=:\sigma}]_y = \tilde{\sigma}(y)$$

$$\Rightarrow \tilde{s}(V) = \tilde{\sigma}(V), \quad \sigma \in \mathcal{S}(V) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{s}(V) = \tilde{\sigma}(V) \in \mathcal{B} \Rightarrow \tilde{s}(V) \text{ ανοιχτό.}$$

→ $\tilde{s}$ συνεχής:

Εστω $x \in U$. ΘΔο $\tilde{s}$ συνεχής στο x. Εστω $A \in \tau_{\mathcal{S}}$: $\tilde{s}(x) \in A \subseteq \tilde{s}(U)$. A ανοιχτό $\Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B}$:

$$\tilde{s}(x) \in B \subseteq A \subseteq \tilde{s}(U)$$

$\llcorner\ \tilde{\sigma}(V)$ με $V \in \tau_X$, $\sigma \in \mathcal{S}(V)$.

$$\tilde{s}(x) \in \tilde{\sigma}(V) \Rightarrow \tilde{s}(x) = \tilde{\sigma}(x) \in \tilde{s}(U) \cap \tilde{\sigma}(V)$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, W \subseteq U \cap V : \rho^U_{W}(s) = \rho^V_{W}(\sigma)$$

$$\Uparrow \quad \mathcal{N}^o_x$$

$$\Downarrow$$

$$\exists\, W \in \mathcal{N}^o_x,\ W \subseteq U \cap V : \tilde{s}|_W = \tilde{\sigma}|_W$$

$$\Downarrow$$

$\exists$ ανοιχτό $W \subseteq U$: $x \in W$ και

$$\tilde{s}(W) = \tilde{\sigma}(W) \subseteq \tilde{\sigma}(V) = B \subseteq A. \quad \blacksquare$$

ΘΕΩΡΗΜΑ

$(S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ προδράγμα συνόλων πάνω από το $X \Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα.

Έστω τώρα τα προδράγματα $(S(U), \rho^U_V)$, $(T(U), \lambda^U_V)$ πάνω από τον ίδιο (X, τ_X) και

$$(f_U : S(U) \longrightarrow T(U))_{U \in \tau_X}$$

μορφισμός προδραγμάτων.

Έστω $x \in X$. Η οικογένεια

$$(f_U : S(U) \longrightarrow T(U))_{U \in \mathcal{N}^o_x}$$

είναι μορφισμός επαγωγικών συστημάτων $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists!\ f_x : \mathcal{S}_x \longrightarrow \mathcal{T}_x$ που κάνει μεταθετικά όλα τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
s \in S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho^U_x"'] & T(U) \ni t = f_U(s) \arrow[d, "\lambda^U_x"] \\
\tilde{s}(x) = [s]_x \in \mathcal{S}_x \arrow[r, "f_x"'] & \mathcal{T}_x \ni [t]_x = \tilde{t}(x).
\end{tikzcd}$$

Θέτουμε

$$\tilde{f} := \bigcup_{x\in X} f_x : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}. \quad (*)$$

ΛΗΜΜΑ

$\forall s \in S(U)$, $t := f_U(s) \in T(U)$, ισχύει

$$\tilde{t} = \tilde{f}\circ\tilde{s}$$

Απόδ. $\forall x\in U$:

$$\tilde{t}(x) = \lambda^U_x(t) = \lambda^U_x \circ f_U(s) = f_x \circ \rho^U_x(s) =$$
$$= \tilde{f}([s]_x) = \tilde{f}\circ\tilde{s}(x).$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η $\tilde{f}$ που ορίζεται από ένα μορφισμό προδραγμάτων όπως στο (*) είναι μορφισμός δραγμάτων.

Απόδ. Το τρίγωνο

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό: $z\in\mathcal{S} \Rightarrow z = \tilde{s}(x)$, με $x\in U$ και $s\in S(U)$. Επίσης:

$$p\circ\tilde{f}(z) = p\circ\tilde{f}\circ\tilde{s}(x) = p\circ\tilde{t}(x) = x = \pi(z)$$

(με $t = f_U(s)$).

Η $\tilde{f}$ είναι συνεχής: Έστω $z = \tilde{s}(x)\in\mathcal{S}$, με $x\in U$, $s\in S(U)$. Θεωρούμε μια βασική περιοχή του $\tilde{f}(z)$: $\tilde{f}(z)\in\tilde{\sigma}(V)$, με $x\in V\in\tau_X$, $\sigma\in T(V)$. Θέτοντας $t = f_U(s)\in T(U)$, έχουμε

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}\circ\tilde{s}(x) = \tilde{t}(x) \quad \text{και} \quad \tilde{f}(z) = \tilde{\sigma}(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{N}_x^o$ με $W \subseteq U \cap V$ και $\tilde{t}|_W = \tilde{\sigma}|_W \Rightarrow$

$\Rightarrow \widetilde{f} \circ \tilde{s}|_W = \tilde{\sigma}|_W \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{f} \circ \widetilde{\rho_W^U(s)} = \tilde{\sigma}|_W \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{f}\Big(\underbrace{\widetilde{\rho_W^U(s)}(W)}_{\text{βασικό στο } \mathcal{S}}\Big) = \tilde{\sigma}(W) \subseteq \tilde{\sigma}(V).$

με $x \in W$, άρα $z = \tilde{s}(x) \in \widetilde{\rho_W^U(s)}(W) = \tilde{s}(W)$. ∎

Παρατήρηση

(α) Ο ταυτοτικός μορφισμός προδραγμάτων

$$\left(id_{S(U)} : S(U) \longrightarrow S(U) \right)_{U \in \tau_X}$$

ορίζει τον ταυτοτικό μορφισμό

$$id_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}.$$

(β) Η σύνθεση δύο μορφ. προδραγμάτων

$$\left(g_U \circ f_U : S(U) \longrightarrow P(U) \right)_{U \in \tau_X}$$

όπου

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[rr, "g_U \circ f_U"] \arrow[dr, "f_U"'] & & P(U) \\ & T(U) \arrow[ur, "g_U"'] & \end{tikzcd} \qquad \forall\, U \in \tau_X$$

ορίζει την σύνθεση

$$\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}.$$

Άρα το ζεύγος $(F_1, F_2) : \mathcal{P}Sh_X \longrightarrow Sh_X$ με

$F_1((S(U), \rho_V^U)) = \mathcal{S}$,

$F_2((f_U : S(U) \to T(U))_{U \in \tau_X}) = \tilde{f} : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$

είναι συναλλοίωτος συναρτητής που λέγεται <u>συναρτητής δραγματοποίησης</u> και συμβολίζεται με

$$\mathcal{S} : \mathcal{P}\mathcal{S}h_X \longrightarrow \mathcal{S}h_X$$