ΚΕΦΑΛΑΙΟ III
ΔΡΑΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΔΡΑΓΜΑΤΑ

1. ΠΡΟΚΑΤΑΡΚΤΙΚΑ

1.1. ΟΡΣ. Ένα <u>δράγμα</u> είναι μια τριάδα $(\mathcal{S},\pi,X)$ όπου $\mathcal{S}, X$ τοπολογικοί χώροι και $\pi:\mathcal{S}\to X$ τοπικός ομοιομορφισμός.

Τοπικός ομοιομ. σημαίνει ότι $\forall s\in\mathcal{S}$ $\exists$ ανοιχτή περιοχή V του s: $\pi(V)$ ανοιχτό $\subseteq Y$ και $\pi|_V: V\to\pi(V)$ ομοιομορφισμός

1.2 ΛΗΜΜΑ. Κάθε τοπικός ομοιομορφισμός είναι ανοιχτή απεικόνιση.

<u>Απόδ.</u> Έστω $\pi:\mathcal{S}\to X$ τοπ. ομοιομ., $V\subseteq\mathcal{S}$ ανοιχτό. Θδο $\pi(V)$ ανοιχτό. Αρκεί ν.δ.ο $\forall x\in\pi(V)$ $\exists U$ ανοιχτό $\subseteq X$: $x\in U\subseteq\pi(V)$. Αφού $x\in\pi(V)$, $\exists s\in V$ με $x=\pi(s)$. Επίσης $\exists V_0\in\mathcal{N}(s)$: $\pi|_{V_0}: V_0\to\pi(V_0)$ ομοιομορφισμός. Η $U:=V\cap V_0$ είναι η ζητούμενη.

1.3. ΛΗΜΜΑ. Αν $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, τότε η οικογένεια των ανοιχτών υποσυνόλων του $\mathcal{S}$ πάνω στα οποία η π είναι ομοιομορφισμός, είναι βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$.

Για κάθε $x\in X$ το $\mathcal{S}_x:=\pi^{-1}(x)$ λέγεται <u>νήμα του x</u>. Αν π δεν είναι επί, μπορεί $\mathcal{S}_x=\phi$. Ισχύει

$$\mathcal{S}=\bigcup_{x\in X}\mathcal{S}_x \quad (\text{διακεκριμένη}).$$

1.4 ΛΗΜΜΑ. Αν $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, τότε $\forall x\in X$, η τοπολογία του $\mathcal{S}_x$ είναι η διακεκριμένη.

<u>Απόδ.</u> Έστω $s\in\mathcal{S}_x$. $\exists V$ περιοχή του s: $\pi|_V$ να είναι ομοιομορφ. $\Rightarrow \pi|_V$ 1-1 $\Rightarrow V\cap\mathcal{S}_x=\{s\}=$ ανοιχτό $\subseteq\mathcal{S}_x$.

Ενα *υποδράγμα* ενός δράγματος $(\mathcal{S},\pi,X)$ είναι μια τριάδα $(A, \pi|_A, X)$, όπου $A \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό.

1.5 ΟΡΣ. Αν $(\mathcal{S},\pi,X)$, $(\mathcal{T},\rho,X)$ δράγματα, ένας *μορφισμός* είναι μια συνεχής απεικόνιση $f:\mathcal{S}\to\mathcal{T}$, αν

$$\rho\circ f=\pi,$$

ή, ισοδύναμα, αν η f διατηρεί τα νήματα, δηλ.

$$f(\mathcal{S}_x)\subseteq \mathcal{T}_x,\quad \forall x\in X.$$

1.6 ΛΗΜΜΑ. Αν $f:\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ είναι μορφισμός δραγμάτων, τότε η f είναι τοπικός ομοιομορφισμός.

Απόδ. Εστω $s\in\mathcal{S}$, $V\in\mathcal{N}(s)$, $W\in \mathcal{N}(f(s))$: $\pi(V)$, $\rho(W)$ ανοιχτά και $\pi|_V$, $\rho|_W$ ομοιομορφισμοί. Λόγω της συνέχειας της f μπορούμε να θεωρούμε $f(V)\subseteq W$. Από την μεταθετικότητα του τριγώνου

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}\supseteq V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & f(V)\subseteq W\subseteq\mathcal{T} \arrow[dl, "\rho"] \\
& X\supseteq \pi(V)=\rho(f(V))\subseteq\rho(W) &
\end{tikzcd}$$

η $f|_V = (\rho|_{f(V)})^{-1}\circ \pi|_V = (\rho|_W)^{-1}|_{\pi(V)}\circ\pi|_V$ είναι σύνθεση ομοιομορφισμών.

Η σύνθεση μορφισμών δραγμάτων είναι μορφισμός δραγμάτων και η ταυτοτική $1_{\mathcal{S}}$ είναι μορφισμός δραγμάτων. Η *κατηγορία των δραγμάτων πάνω από το X* θα συμβολίζεται με $\mathcal{Sh}_X$.

1.7 ΛΗΜΜΑ. Ενας μορφισμός δραγμάτων είναι ισομορφισμός $\Leftrightarrow$ είναι ισομορφισμός στα νήματα $\Leftrightarrow$ είναι 1-1 και επί.

είναι 1-1 λόγω του (ί) και επί του U. Προφανώς $(\pi|_{s(U)})^{-1} = s$, και π, s είναι ανοιχτές από τον ορισμό της τ.

3.2 ΠΟΡ. Με τις υποθέσεις του προηγ. θεωρ., η τ είναι η λεπτότερη τοπολογία που κάνει τις $s \in \mathcal{G}$ συνεχείς.

Μια οικογένεια $\mathcal{G}$ όπως ανωτέρω λέγεται ορίζουσα οικογένεια του δράγματος $(\mathcal{S}, \pi, X)$.

4. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

4.1. Το σταθερό δράγμα. Η απλούστερη περίπτωση δράγματος είναι το "σταθερό" δράγμα: αν X τοπ. χώρος, $M \neq \emptyset$ σύνολο με την διακριτική τοπολογία, τότε η $\pi := pr_1 : X \times M \longrightarrow X$ είναι τοπ. ομοιομορφισμός: $\forall\, U \subseteq X$ ανοιχτό, η $\pi|_{U \times \{m\}} : U \times \{m\} \longrightarrow U$ είναι ομοιομορφισμός, $\forall\, m \in M$. Συνεπώς οι τομές του δράγματος πάνω από συνεκτικά $U \subseteq X$ είναι της μορφής $s : U \longrightarrow U \times M : x \longmapsto (x, m)$, m σταθ.
Το σταθερό δράγμα δέχεται ολικές τομές της μορφής

$$s : X \longrightarrow X \times M : x \longmapsto (x, m); \qquad m \text{ σταθ.}$$

4.2. Η έλικα. Εστω $X = S^1$, $\mathcal{S} = \{(\cos t, \sin t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ και $\pi : \mathcal{S} \to X : (\cos t, \sin t, t) \longmapsto (\cos t, \sin t)$. Αν S^1, $\mathcal{S}$ έχουν την σχετική τοπολογία από τους $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, οι περιορισμοί της π στα σύνολα $V = \{(\cos t, \sin t, t) : \alpha < t < b\}$ με $b - \alpha < 2\pi$ είναι ομοιομορφισμοί, άρα $(\mathcal{S}, \pi, X)$ είναι δράγμα. Οι τομές του έχουν την μορφή

$$s : U \longrightarrow \mathcal{S} : (\cos t, \sin t) \longmapsto (\cos t, \sin t, t),$$

για όλα τα $U = \{(\cos t, \sin t) : \alpha < t < b\}$ με $b - \alpha < 2\pi$. Ολικές τομές δεν υπάρχουν.

2. ΤΟΜΕΣ

2.1. ΟΡΣ. Εστω $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, $U\subseteq X$. Μια τομή του $\mathcal{S}$ πάνω από το U είναι μια συνεχής $s: U\to\mathcal{S}$ με $\pi\circ s=id_U$. Αν $U\subsetneqq X$ η s λέγεται τοπική τομή. Αν $U=X$, λέγεται ολική τομή. Το σύνολο όλων των (συνεχών) τομών του $\mathcal{S}$ πάνω από το U συμβολίζεται

$$\mathcal{S}(U)\equiv\Gamma(U,\mathcal{S}).$$

2.2. ΛΗΜΜΑ. $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, $U\subseteq X$ ανοιχτό, $s\in\Gamma(U,\mathcal{S})\Rightarrow$ $s(U)\subseteq\mathcal{S}$ ανοιχτό και $s: U\to s(U)$ ομοιομορφισμός.

Απόδ. Εστω $x\in U$. Τότε $\exists\, V\subseteq\mathcal{S}$ ανοιχτό: $s(x)\in V$, $\pi(V)$ ανοιχτό και $\pi|_V: V\to\pi(V)$ ομοιομορφισμός. Επειδή s συνεχής, $\exists\, A\subseteq U$ ανοιχτό, με $x\in A$ και $s(A)\subseteq V$. Τότε $\pi(s(A))=A\subseteq\pi(V)$ ανοιχτό, άρα $s(A)\subseteq V$ ανοιχτό. Εξάλλου $s|_A=(\pi|_V)^{-1}|_A$ ομοιομορφισμός, άρα η s είναι τοπικός ομοιομορφισμός, 1-1 και επί.

2.3 ΛΗΜΜΑ. $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, $z\in\mathcal{S}\Rightarrow\exists\, U$ ανοιχτό $\subseteq X$ με $x=\pi(z)\in U$ και $s\in\Gamma(U,\mathcal{S})$: $s(x)=z$.

2.4 ΛΗΜΜΑ. Αν s,σ τοπικές τομές ενός δράγματος με $s(x)=\sigma(x)$, για κάποιο $x\in X\Rightarrow$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή U του x, με $s|_U=\sigma|_U$.

2.5. ΛΗΜΜΑ. Αν $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, τότε τα σύνολα $s(U)$, όπου $s\in\Gamma(U,\mathcal{S})$ και $U\in\tau_X$, είναι βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$.

2.6 ΠΡΟΤ. $(\mathcal{S},\pi,X)$, $(\mathcal{T},p,X)$ δράγματα, $\phi:\mathcal{S}\to\mathcal{T}$ συνεχής. Είναι ισοδύναμα
(1) ϕ μορφισμός δραγμάτων
(2) $\forall\, U\in\tau_X$, $s\in\Gamma(U,\mathcal{S})\Rightarrow\phi^*(s)=\phi\circ s\in\Gamma(U,\mathcal{T})$
(3) $\forall\, z\in\mathcal{S}\ \exists\, U\in\tau_X$, $s\in\Gamma(U,\mathcal{S})$: $z\in s(U)$ και $\phi\circ s\in\Gamma(U,\mathcal{T})$.

Απόδ. (1) $\Rightarrow$ (2). Έστω $\rho\circ\phi = \pi$. Αν $U \in \tau_X$, $s \in \Gamma(U, \mathcal{S}) \Rightarrow \phi\circ s$ συνεχής σαν σύνθεση συνεχών και $\rho\circ\phi\circ s = \pi\circ s = id_U \Rightarrow \phi\circ s \in \Gamma(U, \mathcal{G})$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Έστω $z \in \mathcal{S}$. $\exists\, U \in \tau_X$, $s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$: $s(x) = z$, για κάποιο $x \in U \Rightarrow$ $z \in s(U)$ και $\phi\circ s \in \Gamma(U, \mathcal{G})$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Έστω $z \in \mathcal{S}$, με $\pi(z) = x$. $\exists\, U \in \tau_X$, $s \in \Gamma(U, \mathcal{S})$: $z \in s(U)$ και $\phi\circ s \in \Gamma(U, \mathcal{G})$. Τότε $\rho\circ\phi\circ s = id_U \Rightarrow \rho\circ\phi\circ s(x) = x \Rightarrow \rho\circ\phi(z) = x = \pi(z)$.

3. ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ

3.1 ΘΕΩΡ. X τ.χ., $\mathcal{S} = \bigcup_{x\in X} \mathcal{S}_x$, $\mathcal{S}_x$ διακεκριμένα σύνολα. Έστω και $\mathfrak{S}$ μια οικογένεια τοπικών απεικονίσεων από το X στο $\mathcal{S}$

$$s : U \longrightarrow \mathcal{S} :$$

(i) $\forall\, x \in U$, $s(x) \in \mathcal{S}_x$.

(ii) $\mathcal{S} = \bigcup_{s\in\mathfrak{S}} \operatorname{Im} s$

(iii) $\forall\, t, s \in \mathfrak{S}$ $\forall\, z = t(x) = s(x) \in \operatorname{Im} s \cap \operatorname{Im} t$ $\exists\, W$ ανοιχτό $\subseteq X$: $x \in W \subseteq \operatorname{Dom} s \cap \operatorname{Dom} t$ και $s|_W = t|_W$.

Ορίζουμε την

$$\pi : \mathcal{S} \to X : \mathcal{S}_x \mapsto \{x\}.$$

Τότε η οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{ s(V) : s \in \mathfrak{S} \text{ και } V \text{ ανοιχτό} \subseteq \operatorname{Dom} s \}$$

είναι βάση μιας τοπολογίας του $\mathcal{S}$ ως προς την οποία $(\mathcal{S}, \pi, X)$ είναι δράγμα.

Απόδ. $\mathcal{B}$ βάση κάποιας τοπολογίας $\tau \iff \forall\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\forall\, x \in B_1 \cap B_2$ $\exists\, B_3 \in \mathcal{B}$: $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Η συνθήκη αυτή εξασφαλίζεται από (iii). Ως προς την τ η π είναι τοπικός ομοιομορφισμός: Έστω $z \in \mathcal{S}_x \subseteq \mathcal{S}$. Από (ii) $\exists\, U \subseteq X$ ανοιχτό με $x \in U$ και $s \in \mathfrak{S}$: $s(x) = z$. Τότε $s(U) \in \mathcal{B} \subseteq \tau$ και $\pi|_{s(U)}$ ομοιομορφισμός. Πράγματι: η $\pi|_{s(U)}$

5. ΠΡΟΔΡΑΓΜΑΤΑ

5.1. ΟΡΣ. Εστω (X, τ_X) τοπ. χώρος. Ενα προδράγμα συνόλων πάνω από το X είναι μια οικογένεια $(S(U), \rho^U_V)$ με $U, V \in \tau_X$, $V \subseteq U$, όπου $S(U)$ σύνολα, $\rho^U_V : S(U) \longrightarrow S(V)$ απεικονίσεις ("περιορισμοί"), τέτοιες ώστε

(1) $\rho^U_U = id_{S(U)}$, $\forall\, U \in \tau_X$

(2) $\rho^V_W \circ \rho^U_V = \rho^U_W$, $\forall\, U, V, W \in \tau_X : W \subseteq V \subseteq U$.

Δηλαδή, η $(S(U), \rho^U_V)$ είναι ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων με σύνολο δεικτών τα $U \in \tau_X$. Οντας επαγωγικό σύστημα, μπορεί να θεωρηθεί σαν συναλλοίωτος συναρτητής από την κατηγορία τ_X στην κατηγορία $\mathcal{S}et$ των συνόλων.

5.2. ΟΡΣ. Εστω S ένα προδράγμα πάνω από το X και $A \subseteq X$ ανοιχτό. Ο <u>περιορισμός του S στο A</u> είναι το προδράγμα $(S|_A(U), \rho^U_V)$ γιά $V \subseteq U \subseteq A$ ανοιχτά, όπου $S|_A(U) = S(U)$.

6. ΜΟΡΦΙΣΜΟΙ ΠΡΟΔΡΑΓΜΑΤΩΝ

6.1. ΟΡΣ. Εστω $(S(U), \rho^U_V)$, $(T(U), \lambda^U_V)$ προδράγματα πάνω από το X. Ενας μορφισμός $f : S \longrightarrow T$ είναι μια οικογένεια $(f_U)_{U \in \tau_X}$ απεικονίσεων $f_U : S(U) \longrightarrow T(U)$ που κάνει μεταθετικά τα τετράγωνα

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho^U_V"'] & T(U) \arrow[d, "\lambda^U_V"] \\ S(V) \arrow[r, "f_V"] & T(V) \end{tikzcd}$$

$\forall\, V \subseteq U \in \tau$. Δηλ. είναι ένας μορφισμός επαγωγικών συστημάτων, ή, αλλιώς, ένας φυσικός μετασχηματισμός μεταξύ των συναρτητών S, T.

Η σύνθεση $(g_U \circ f_U)_{U\in\tau}$ δύο μορφισμών προδραγμάτων $f: S \to T$ και $g: T \to P$ είναι μορφισμός $: S \to P$ και η οικογένεια των ταυτοτικών $(id_{S(U)})_{U\in\tau_X}$ είναι μορφισμός $: S \to S$, ουδέτερος ως προς την σύνθεση. Την σχηματιζόμενη κατηγορία των προδραγμάτων πάνω από το X συμβολίζουμε με PSh_X.

6.2. ΟΡΣ. Ενας μορφισμός προδραγμάτων $f \equiv (f_U) : S \to T$ λέγεται <u>μονομορφισμός</u> (αντ. <u>επιμορφισμός</u>) αν κάθε $f_U : S(U) \to T(U)$ είναι 1-1 (αντ. επί). Ενας $f \equiv (f_U)$ είναι <u>ισομορφισμός</u> $\Leftrightarrow$ f_U είναι 1-1 και επί, $\forall U \in \tau_X$.

7. ΔΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗ

Εστω $S = (S(U), \rho^U_V)_{V\subseteq U\in\tau}$ ένα προδράγμα πάνω από τον (X, τ_X) και $x \in X$. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{N}(x)$ των ανοιχτών περιοχών του x και τον περιορισμό του S στο $\mathcal{N}(x)$, δηλ. την οικογένεια $(S(U), \rho^U_V)_{V\subseteq U\in\mathcal{N}(x)}$. Είναι ένα επαγωγικό σύστημα συνόλων. Θεωρούμε το αντίστοιχο επαγωγικό όριο

$$S_x := \varinjlim_{U\in\mathcal{N}(x)} S(U),$$

και το καλούμε νήμα του S στο x. Δηλ. στην ένωση $\bigcup_{U\in\mathcal{N}(x)} S(U)$ Θεωρούμε την σχέση ισοδυναμίας: για $s_1 \in S(U)$, $s_2 \in S(V)$, είναι $s_1 \sim s_2 \Leftrightarrow \exists\, W \subseteq U\cap V,\ W\in\mathcal{N}(x) : \rho^U_W(s_1) = \rho^V_W(s_2)$. S_x είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας. Συμβολίζουμε με

$$\rho^U_x : S(U) \longrightarrow S_x$$

την κανονική απεικόνιση και με $\mathcal{S}$ την διακεκριμμένη ένωση

$$\mathcal{S} = \bigcup_{x\in X} S_x .$$

Στη συνέχεια, $\forall U \in \tau$, $\forall\, s \in S(U)$, θεωρούμε την απεικόνιση

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S} : x \longmapsto \tilde{s}(x) := \rho^U_x(s).$$

Είναι άμεσο ότι η οικογένεια

$$\mathfrak{S} = \{\tilde{s} : s \in S(U),\ U \in \tau\}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες (i), (ii), (iii) της §3. Άρα η τριάδα $(\mathcal{S}, \pi, X)$, όπου $\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$ η κανονική προβολή, είναι δράγμα.

Για κάθε $U \in \tau_X$, υπάρχει μια "κανονική απεικόνιση"

$$\rho_U : S(U) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{S}) : s \longmapsto \rho_U(s) := \tilde{s}.$$

Το $(\mathcal{S}, \pi, X)$ λέγεται <u>το δράγμα που παράγεται από το προδράγμα</u> $(S(U), \rho^U_V)$.

Σημείωση: Τα νήματα S_x μπορούν να προκύψουν και σαν επαγωγικά όρια επαγωγικών συστημάτων της μορφής

$$(S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \mathcal{B}(x)},$$

όπου $\mathcal{B}(x)$ είναι ένα σύστημα βασικών περιοχών του x.

8. Ο ΣΥΝΑΡΤΗΤΗΣ ΔΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Έστω $f \equiv (f_U) : S = (S(U), \rho^U_V) \longrightarrow T = (T(U), \lambda^U_V)$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{P}Sh_X$. Ορίζουμε

$$\tilde{f} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T} : z = \rho^U_x(s) \longmapsto \tilde{f}(z) := \lambda^U_x \circ f_U(s).$$

$$\begin{tikzcd}
S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho^U_W"'] \arrow[dd, bend right=60, "\rho^U_x"'] & T(U) \arrow[d, "\lambda^U_W"] \arrow[dd, bend left=60, "\lambda^U_x"] \\
S(W) \arrow[r] \arrow[d, "\rho^W_x"'] & T(W) \arrow[d, "\lambda^W_x"] \\
S_x \arrow[r, dashed, "\tilde{f}"'] & T_x
\end{tikzcd}$$

Η $\tilde{f}$ είναι καλά ορισμένη: αν $s \in S(U)$ και $t \in S(V)$ ορίζουν στο x την ίδια κλάση ισοδυναμίας z, δηλ. αν $\rho^U_x(s) = \rho^V_x(t) = z$, τότε υπάρχει ανοιχτό $W \subseteq U \cap V$ με $\rho^U_W(s) = \rho^V_W(t)$. Οπότε

$$\tilde{f}(z) = \lambda^U_x \circ f_U(s) = \lambda^W_x \circ \lambda^U_W \circ f_U(s) = \lambda^W_x \circ f_W \circ \rho^U_W(s) =$$
$$= \lambda^W_x \circ f_W \circ \rho^V_W(t) = \lambda^W_x \circ \lambda^V_W \circ f_V(t) = \lambda^V_x \circ f_V(t).$$

Για την συνέχεια της $\tilde{f}$ χρειαζόμαστε το

8.1 ΛΗΜΜΑ. Η $\tilde{f}$ μεταφέρει τις τομές του $\mathfrak{S}_S = \{\tilde{s} : s \in S(U), U \in \tau\}$ σε τομές του $\mathfrak{S}_T = \{\tilde{t} : t \in T(U), U \in \tau\}$.

Απόδ. Έστω $s \in S(U)$ και $t := f_U(s) \in T(U)$. Τότε $\forall x \in U$ είναι

$$\tilde{f} \circ \tilde{s}(x) = \tilde{f}(z = \rho^U_x(s)) = \lambda^U_x \circ f_U(s) = \lambda^U_x(t) = \tilde{t}(x).$$

Δείχνουμε τώρα ότι η $\tilde{f}$ είναι συνεχής: Έστω $z \in \mathcal{S}$. Τότε $\exists U \in \tau$, $x \in U$ και $s \in S(U)$: $z = \tilde{s}(x) = \rho^U_x(s)$. Έστω και μια βασική περιοχή $\tilde{t}(V)$ του $\tilde{f}(z)$. Τότε $\{\tilde{f}(z)\} = \tilde{t}(V) \cap T_x$, δηλ.

$$\tilde{t}(x) = \tilde{f}(z) = \tilde{f} \circ \tilde{s}(x),$$

άρα οι $\tilde{f} \circ \tilde{s}$, $\tilde{t} \in \mathfrak{S}_T$ συμπίπτουν στο $x \in U \cap V$. Άρα $\exists$ ανοιχτό $W \subseteq U \cap V$ με $x \in W$ και $\tilde{f} \circ \tilde{s}|_W = \tilde{t}|_W$. Οπότε υπάρχει βασική περιοχή $\tilde{s}(W)$ του z με $\tilde{f}(\tilde{s}(W)) = \tilde{t}(W) \subseteq \tilde{t}(V)$.

Κατά συνέπεια, κάθε μορφισμός προδραγμάτων $(f_U): S \to T$ ορίζει ένα μορφισμό δραγμάτων $\tilde{f}: \mathcal{S} \to \mathcal{T}$. Ελέγχεται εύκολα ότι ο ταυτοτικός $id_S : S \to S$ ορίζει τον ταυτοτικό $id_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ και η σύνθεση $(g_U) \circ (f_U): S \to P$ των $(f_U): S \to T$ και $(g_U): T \to P$ ορίζει την σύνθεση $\tilde{g} \circ \tilde{f}$ των $\tilde{f}$ και $\tilde{g}$. Δηλ.

$$\widetilde{id_S} = id_{\mathcal{S}},$$
$$\widetilde{g \circ f} = \tilde{g} \circ \tilde{f}.$$

Η αντιστοιχία $S \rightsquigarrow \mathcal{S}$ και $f \rightsquigarrow \tilde{f}$ ορίζει ένα συναλλοίωτο συναρτητή

$$\mathbf{S} : \mathcal{PSh}_X \longrightarrow \mathcal{Sh}_X ,$$

που λέγεται <u>συναρτητής δραγματοποίησης.</u>

8α. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ (Συνέχεια).

8α.1. Το δράγμα των σπερμάτων των συνεχών συναρτήσεων. Εστω (X, τ_X) τ.χ. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}(U)$ το σύνολο των συνεχών $f : U \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$), $\forall\, U \in \tau_X$. Για $U, V \in \tau_X$ με $V \subseteq U$ έστω

$$\rho^U_V : \mathcal{C}(U) \longrightarrow \mathcal{C}(V) : f \mapsto \rho^U_V(f) := f|_V$$

ο συνήθης περιορισμός. Τότε η οικογένεια $(\mathcal{C}(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ είναι προδράγμα συνόλων. Το αντίστοιχο δράγμα συμβολίζουμε με $\mathcal{C}_X$. Ενα στοιχείο του $\mathcal{C}_X$ είναι η κλάση ισοδυναμίας $[f]_x$ μιας $f : U \to \mathbb{K}$ σε ένα $x \in U$. Στην κλάση $[f]_x$ ανήκουν όλες οι συνεχείς $g : V \to \mathbb{K}$, $V \in \mathcal{N}(x)$, για τις οποίες $\exists\, W \in \mathcal{N}(x)$: $f|_W = g|_W$. Η $[f]_x$ λέγεται σπέρμα της f στο x.

8α.2. Το δράγμα των σπερμάτων των διαφορίσιμων συναρτήσεων. Εστω $(X, \mathcal{A})$ διαφ. πολ/τα. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}^\infty(U)$ το σύνολο των διαφορίσιμων $f : U \to \mathbb{R}$, $U \in \tau_X$. Ανάλογα με τα προηγούμενα ορίζεται το δράγμα $\mathcal{C}^\infty_X$.

8α.3. Το δράγμα των σπερμάτων των ολόμορφων συναρτήσεων. Εστω $(X, \mathcal{A})$ μιγαδική πολ/τα (: με μοντέλο $\mathbb{C}^n$ και <u>ολόμορφες</u> απεικονίσεις <u>μεταφοράς</u>). Συμβολίζουμε με $\mathcal{O}(U)$ το <u>σύνολο</u> των ολόμορφων $f : U \to \mathbb{C}$. Ανάλογα με τα προηγούμενα, παίρνουμε ένα δράγμα που συμβολίζουμε με $\mathcal{O}_X$.

9. Ο ΣΥΝΑΡΤΗΤΗΣ-ΤΟΜΗ

Εστω $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα. Θεωρούμε την οικογένεια συνόλων $(\Gamma(U,\mathcal{S}))_{U\in\tau_X}$ και των απεικονίσεων

$$\rho^U_V : \Gamma(U,\mathcal{S}) \longrightarrow \Gamma(V,\mathcal{S}) : s \longmapsto s|_V ,$$

$\forall\, V\subseteq U$ ανοιχτό. Είναι άμεσο ότι $(\Gamma(U,\mathcal{S}), \rho^U_V)_{V\subseteq U\in\tau_X}$ είναι προδράγμα. Το ονομάζουμε προδράγμα των τομών του δράγματος $\mathcal{S}$.

Αν $(\mathcal{S},\pi,X)$, $(\mathcal{G},\rho,X)\in \mathcal{S}h_X$ και $f:\mathcal{S}\to\mathcal{G}$ μορφισμός δραγμάτων, η οικογένεια των απεικονίσεων

$$f_U : \Gamma(U,\mathcal{S}) \longrightarrow \Gamma(U,\mathcal{G}) : s \longmapsto f_U(s) := f\circ s , \qquad U\in\tau_X,$$

είναι μορφισμός προδραγμάτων. Είναι προφανές ότι στην ταυτοτική $id_{\mathcal{S}}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ αντιστοιχεί η οικογένεια $(id_{\Gamma(U,\mathcal{S})})_{U\in\tau_X}$ και στην σύνθεση $g\circ f$ των μορφισμών $f:\mathcal{S}\to\mathcal{G}$, $g:\mathcal{G}\to\mathcal{F}$, αντιστοιχεί η σύνθεση $(g_U\circ f_U) = (g_U)\circ(f_U)$ των μορφισμών προδραγμάτων.

Αρα η αντιστοιχία $\mathcal{S}\rightsquigarrow(\Gamma(U,\mathcal{S}), \rho^U_V)$ και $f\rightsquigarrow(f_U)_{U\in\tau_X}$ είναι ένας συναλλοίωτος συναρτητής

$$\Gamma : \mathcal{S}h_X \longrightarrow \mathcal{P}\mathcal{S}h_X$$

που ονομάζεται <u>συναρτητής-τομή</u>.

Θα εξετάσουμε παρακάτω τη σχέση μεταξύ των συναρτητών $\mathbf{S}$ και Γ.

9.1 ΛΗΜΜΑ. Εστω $(\mathcal{S},\pi,X)$ δράγμα, $(\Gamma(U,\mathcal{S}), \rho^U_V)$ το προδράγμα των τομών του και $(\Gamma(\mathcal{S}),\tilde{\pi},X)$ το παραγόμενο δράγμα. Τότε $\forall x\in X$, $\mathcal{S}_x \cong \Gamma(\mathcal{S})_x$.

Απόδ. Εστω $x\in X$. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$\delta_x : \Gamma(\mathcal{S})_x \longrightarrow \mathcal{S}_x : z \longmapsto s(x),$$

όπου $s\in\Gamma(U,\mathcal{S})$ με $\rho^U_x(s) = z$, $U\in\mathcal{N}(x)$.

Η δ_x είναι καλά ορισμένη: αν $t \in \Gamma(V,\mathcal{S})$ με $\rho_x^V(t) = z$, $V \in \mathcal{N}(x)$, τότε $\exists\, W \in \mathcal{N}(x) : W \subseteq U \cap V$ και $\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$, δηλ. $s|_W = t|_W$, άρα $s(x) = t(x)$.

Η δ_x είναι 1-1: έστω $z, \omega \in \Gamma(\mathcal{S})_x$ με $\delta_x(z) = \delta_x(\omega)$. Τότε $z = \rho_x^U(s)$, $\omega = \rho_x^V(t)$ για κάποια $s \in \Gamma(U,\mathcal{S})$, $t \in \Gamma(V,\mathcal{S})$, $U, V \in \mathcal{N}(x)$. Η υποθ. $\delta_x(z) = \delta_x(\omega)$ συνεπάγεται $z(x) = \omega(x)$, άρα $\exists\, W \subseteq U \cap V$, $W \in \mathcal{N}(x)$: $\rho_W^U(s) = \rho_W^V(t)$, άρα $\rho_x^U(s) = \rho_x^V(t)$, ή $z = \omega$.

Η δ_x είναι επί: έστω $z \in \mathcal{S}_x$. Τότε $z = s(x)$, για κάποια $s \in \Gamma(U,\mathcal{S})$, $U \in \mathcal{N}(x)$. Προφανώς $\delta_x(\rho_x^U(s)) = z = s(x)$.

9.2 ΘΕΩΡ. Εστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα, $\Gamma_{\mathcal{S}} = (\Gamma(U,\mathcal{S}), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ το προδράγμα των τομών του και $\mathbf{S}(\Gamma_{\mathcal{S}})$ το παραγόμενο δράγμα. Τότε

$$\mathcal{S} \equiv \mathbf{S}(\Gamma_{\mathcal{S}}),$$

ως προς ένα ισομορφισμό στην $\mathcal{S}h_X$.

Απόδ. Θεωρούμε την απεικόνιση

$$\phi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathbf{S}(\Gamma_{\mathcal{S}}) : z \longmapsto \rho_x^U(s),$$

όπου $z \in \mathcal{S}_x$, $U \in \mathcal{N}(x)$, $s \in \Gamma(U,\mathcal{S})$ με $s(x) = z$. Στα νήματα είναι $\phi_x = (\delta_x)^{-1}$, δηλ. η ϕ είναι 1-1 και επί και διατηρεί τα νήματα. Είναι και συνεχής: αρκεί ν.δ.ο μεταφέρει τις τομές σε τομές: αν $s \in \Gamma(U,\mathcal{S})$, τότε $\phi \circ s(x) = \rho_x^U(s)$, δηλ. $\phi \circ s$ είναι ορίζουσα τομή του $\mathbf{S}(\Gamma_{\mathcal{S}})$, και η συνέχεια προκύπτει από τον ορισμό της τοπολογίας.

9.3 ΠΡΟΤ. $f : \mathcal{S} \to \mathcal{G}$ μορφισμός $\iff$ διατηρεί τις τομές.

Απόδ. ($\Rightarrow$) προφανές.

($\Leftarrow$) διατηρεί τα νήματα και είναι τοπικός ομοιομορφισμός.

9.4. ΛΗΜΜΑ. Εστω $S=(S(U),\rho^U_V)_{V\subseteq U\in\mathcal{T}}$ προδράγμα συνόλων πάνω από το X, και $A\subseteq X$ ανοιχτό. Τότε $\mathbf{S}(S|A)=\mathbf{S}(S)|A$.

Απόδ. Τα δύο δράγματα έχουν τον ίδιο ολικό χώρο. Πράγματι έχουν τα ίδια νήματα:

$$(\mathbf{S}(S)|A)_x := \varinjlim_{U\in\mathcal{N}(x)} S(U),$$

$$(\mathbf{S}(S|A))_x := \varinjlim_{\substack{U\in\mathcal{N}(x)\\ U\subseteq A}} (S|A)(U) := \varinjlim_{\substack{U\in\mathcal{N}(x)\\ U\subseteq A}} S(U),$$

και το σύνολο $\{U\in\mathcal{N}(x) : U\subseteq A\}$ είναι ομοτελικό του $\mathcal{N}(x)$. Το $\mathbf{S}(S|A)$ έχει ορίζουσα οικογένεια την

$$\tilde{s} : U \to \mathbf{S}(S) : x \mapsto \tilde{s}(x) := \rho^U_x(s), \quad U\subseteq A,\ s\in S(U),$$

και η ίδια οικογένεια είναι ορίζουσα για το $\mathbf{S}(S)|A$.

Σημ. Αν $(S(U),\rho^U_V)_{V\subseteq U\in\mathcal{T}}$ προδράγμα, $(\mathcal{S},\pi,X)$ το παραγόμενο δράγμα, τότε $(\rho_U : S(U)\to\Gamma(U,\mathcal{S}))_{U\in\mathcal{T}_X}$ με $\rho_U(s)(x)=\rho^U_x(s)$, είναι μορφισμός προδραγμάτων.

10. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ ΠΡΟΔΡΑΓΜΑΤΩΝ

10a. Το σταθερό προδράγμα. X τοπολ. χώρος, M σύνολο. Η οικογένεια $(M(U):=M,\ \rho^U_V=\mathrm{id}_M)$ είναι προδράγμα συνόλων. Για κάθε $x\in X$,

$$M_x := \varinjlim_{U\in\mathcal{N}(x)} M(U) = \varinjlim_{U\in\mathcal{N}(x)} M = M,$$

δηλ. τα νήματα του αντίστοιχου δράγματος είναι ίσα με M. Ο ολικός χώρος είναι

$$\mathcal{M} := \dot{\bigcup_{x\in X}} M_x = \bigcup_{x\in X}\{x\}\times M = X\times M.$$

Στον χώρο αυτό τα νήματα έχουν την διακριτή τοπολογία. Επιπλέον, $\forall\, m\in M(X)=M$, η απεικόνιση

$$\tilde{m} : X \to X\times M : x\mapsto \tilde{m}(x) := \rho^X_x(m) = \varinjlim_{U\in\mathcal{N}(x)} \mathrm{id}_M(m) = m \equiv (x,m)$$

είναι ολική τομή, δηλ. $X\times\{m\}$ είναι ομοιόμορφο με το X.

10b. Προδράγματα συναρτήσεων. Εστω X τοπολογικός χώρος. Η οικογένεια $(\mathcal{C}(U), \rho^U_V)_{V\subseteq U\in\tau}$, όπου $\mathcal{C}(U)=\{f:U\to\mathbb{K}$ συνεχής$\}$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) και $\rho^U_V(f)=f|_V$, $\forall f\in\mathcal{C}(U)$, είναι το προδράγμα των συνεχών συναρτήσεων πάνω από το X. Αν $U\subseteq X$ ανοιχτό, $f\in\mathcal{C}(U)$ και $x\in U$, το όριο $[f]_x := \rho^U_x(f)$ ονομάζεται σπέρμα της f στο x. Το επαγόμενο δράγμα των συνεχών συναρτήσεων του X συμβολίζεται με $\mathcal{C}_X$.

Ανάλογα ορίζονται το δράγμα $\mathcal{C}^\infty_X$ των διαφορίσιμων συναρτήσεων μιας διαφορικής πολ/τας X και το $\mathcal{O}_X$ των ολόμορφων συναρτήσεων μιας μιγαδικής πολ/τας.

11. ΠΛΗΡΗ ΠΡΟΔΡΑΓΜΑΤΑ. ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

11.1. ΟΡΣ. Ενα προδράγμα $(S(U), \rho^U_V)_{V\subseteq U\in\tau_X}$ λέγεται <u>πλήρες</u> αν

(i) $U\in\tau_X$, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ ανοιχτή κάλυψη του U, $s,t\in S(U)$ με $\rho^U_{U_\alpha}(s) = \rho^U_{U_\alpha}(t)$, $\forall\alpha\in A \Rightarrow s=t$

(ii) $U\in\tau_X$, $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ ανοιχτή κάλυψη του U, $s_\alpha\in S(U_\alpha)$ με $\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha\cap U_\beta}(s_\alpha) = \rho^{U_\beta}_{U_\alpha\cap U_\beta}(s_\beta)$ $\forall\alpha,\beta\in A \Rightarrow \exists\, s\in S(U) : \rho^U_{U_\alpha}(s)=s_\alpha$, $\forall\alpha\in A$.

Ενα προδράγμα που ικανοποιεί μόνο την (i) λέγεται <u>μονοπροδράγμα.</u>

Παρατηρούμε ότι η s του (ii) είναι μονοσήμαντα ορισμένη σε ένα πλήρες προδράγμα, λόγω της (i).

11.2. ΠΑΡΑΔ. (1) Για κάθε δράγμα $(\mathcal{S},\pi,X)$, το προδράγμα των τομών του $(\Gamma(U,\mathcal{S}), \rho^U_V)_{V\subseteq U\in\tau_X}$ είναι πλήρες.

(2) Τα συναρτησιακά δράγματα $\mathcal{C}_X$, $\mathcal{C}^\infty_X$, $\mathcal{O}_X$ είναι πλήρη.

(3) Το (επίσης συναρτησιακό) δράγμα $\mathcal{C}^b_X$ των φραγμένων συναρτήσεων του X <u>δεν</u> είναι πλήρες. Π.χ. για $X=U=\mathbb{R}$, $(U_n=(n,n+2))_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι $s_n = id_{U_n}\in\mathcal{C}^b_{\mathbb{R}}(U_n)$, $\forall n\in\mathbb{Z}$, αλλά

$\nexists\, f \in \mathcal{C}^b_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}) : f|_{U_n} = id_{U_n}$, γιατί η $id_{\mathbb{R}}$ δεν είναι φραγμένη.

Τα συναρτησιακά προδράγματα με περιορισμούς τους συνήθεις περιορισμούς των συναρτήσεων είναι μονοπροδράγματα. Αν η ιδιότητα των συναρτήσεων που χαρακτηρίζουν το προδράγμα είναι τοπική, το προδράγμα είναι και πλήρες. Το φραγμένο δεν είναι τοπική ιδιότητα.

11.3. ΘΕΩΡ. Εστω $S = (S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ ένα προδράγμα πάνω από το X, $(\mathcal{S}, \pi, X)$ το αντίστοιχο δράγμα και $(\Gamma(U, \mathcal{S}), r^U_V)_{V \subseteq U \in \tau_X}$ το δράγμα των τομών του. Τότε το S είναι πλήρες εάν και μόνον εάν η οικογένεια

$$\rho_U : S(U) \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{S}) : s \longmapsto \tilde{s}\,, \qquad U \in \tau_X$$

είναι ισομορφισμός προδραγμάτων.

<u>Απόδ.</u> (1) Εστω S πλήρες προδράγμα. Θ.δ.ο. $\forall\, U \in \tau_X$, ρ_U είναι 1-1 και επί. Εστω $U \in \tau_X$, και $s, t \in S(U)$: $\rho_U(s) = \rho_U(t) \in \Gamma(U, \mathcal{S})$. Τότε $\forall\, x \in U$ $\rho_U(s)(x) = \rho^U_x(s) = \rho^U_x(t) = \rho_U(t)(x)$, άρα, $\forall x \in U$ $\exists\, U_x \in \mathcal{N}(x)$ $U_x \subseteq U$ και $\rho^U_{U_x}(s) = \rho^U_{U_x}(t)$. Η οικογένεια $(U_x)_{x \in U}$ είναι ανοιχτή κάλυψη του U, άρα από την υποθ. (ι) του ορσ. 11.1, $s = t$, και ρ_U 1-1.

Εστω $U \in \tau_X$ και $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{S})$. $\forall\, x \in U$, $\sigma(x) \in \mathcal{S}_x$, άρα $\exists\, U_x \in \mathcal{N}(x)$ με $U_x \subseteq U$ και $s_x \in S(U_x)$: $\tilde{s}_x(x) = \rho^{U_x}_x(s_x) = \sigma(x)$. Επειδή $\tilde{s}_x$ και σ είναι συνεχείς τομές του $\mathcal{S}$ που συμπίπτουν στο x, $\exists\, U^o_x \subseteq U_x$ με $\tilde{s}_x(y) = \sigma(y)$, $\forall\, y \in U^o_x$. Τότε $(U^o_x)_{x \in U}$ είναι ανοιχτή κάλυψη του U. Θεωρούμε την οικογένεια $(t_x := \rho^{U_x}_{U^o_x}(s_x))_{x \in U}$.
$\forall\, z \in U^o_x \cap U^o_y$ είναι

$$\tilde{t}_x(z) = \rho^{U^o_x}_z(t_x) = \rho^{U^o_x}_z(\rho^{U_x}_{U^o_x}(s_x)) = \rho^{U_x}_z(s_x) = \tilde{s}_x(z) = \sigma(z) =$$

$$= \tilde{s}_y(z) = \rho^{U_y}_z(s_y) = \rho^{U^o_y}_z(\rho^{U_y}_{U^o_y}(s_y)) = \rho^{U^o_y}_z(t_y) = \tilde{t}_y(z),$$

άρα $\forall z \in U_x^o \cap U_y^o$. $\exists\, U_z^{oo} \subseteq U_x^o \cap U_y^o$ με

$$(*)\quad \rho^{U_x^o \cap U_y^o}_{U_z^{oo}}\left(\rho^{U_x^o}_{U_x^o \cap U_y^o}(t_x)\right) = \tilde{t}_x(z) = \tilde{t}_y(z) = \rho^{U_x^o \cap U_y^o}_{U_z^{oo}}\left(\rho^{U_y^o}_{U_x^o \cap U_y^o}(t_y)\right).$$

Η οικογένεια $(U_z^{oo})_{z \in U_x^o \cap U_y^o}$ είναι ανοιχτή κάλυψη του $U_x^o \cap U_y^o$, $\rho^{U_x^o}_{U_x^o \cap U_y^o}(t_x)$, $\rho^{U_y^o}_{U_x^o \cap U_y^o}(t_y) \in S(U_x^o \cap U_y^o)$ και ικανοποιείται η $(*)$,

άρα από την (i) του πλήρους προδράγματος, $\rho^{U_x^o}_{U_x^o \cap U_y^o}(t_x) = \rho^{U_y^o}_{U_x^o \cap U_y^o}(t_y)$,
οπότε, εφαρμόζοντας την (ii) για την οικογένεια (U_x^o, t_x) έχουμε ότι $\exists\, s_0 \in S(U)$: $\rho^U_{U_x^o}(s_0) = t_x$, $\forall x \in U$
Αλλά τότε

$$\tilde{s}_0(x) = \rho^U_x(s_0) = \rho^{U_x^o}_x\left(\rho^U_{U_x^o}(s_0)\right) = \rho^{U_x^o}_x(t_x) = \tilde{t}_x(x) = \sigma(x),\ \forall x \in U,$$

δηλ. $\rho_U(s_0) = \sigma$ και s_0 είναι η ζητούμενη.

(2) Αντίστροφα: Αν ρ_U είναι 1-1 και επί, $\forall U \in \tau_X$, τότε το προδράγμα $(S(U), \rho^U_V)$ είναι ισόμορφο με το προδράγμα $(\Gamma(U,\mathcal{S}), \pi^U_V)$ που είναι πλήρες. Ο ισομορφισμός διατηρεί την πληρότητα:

Αν $U, (U_\alpha)$, όπως στην (i) και $s,t \in S(U)$ με $\rho^U_{U_\alpha}(s) = \rho^U_{U_\alpha}(t)$, $\forall \alpha \in A$, τότε

$$\begin{tikzcd}
s,t \in S(U) \arrow[r, "\rho_U"] \arrow[d, "\rho^U_{U_\alpha}"'] & \Gamma(U,\mathcal{S}) \arrow[d, "\pi^U_{U_\alpha}"] \\
S(U_\alpha) \arrow[r, "\rho_{U_\alpha}"'] & \Gamma(U_\alpha,\mathcal{S})
\end{tikzcd}$$

$$\rho_{U_\alpha} \circ \rho^U_{U_\alpha}(s) = \rho_{U_\alpha} \circ \rho^U_{U_\alpha}(t) \Rightarrow \pi^U_{U_\alpha}(\rho_U(s)) = \pi^U_{U_\alpha}(\rho_U(t))\ \forall \alpha \in A$$

$$\xRightarrow[\text{πλήρες}]{\Gamma} \rho_U(s) = \rho_U(t) \xRightarrow[1-1]{\rho_U} s = t.$$

Εξάλλου, αν $U, (U_\alpha)$ και $s_\alpha \in S(U_\alpha)$, όπως στην (ii), τότε

$$\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\alpha) = \rho^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_{U_\alpha \cap U_\beta}\left(\rho^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\alpha)\right) = \rho_{U_\alpha \cap U_\beta}\left(\rho^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}(s_\beta)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi^{U_\alpha}_{U_\alpha \cap U_\beta}\left(\rho_{U_\alpha}(s_\alpha)\right) = \pi^{U_\beta}_{U_\alpha \cap U_\beta}\left(\rho_{U_\beta}(s_\beta)\right) \xRightarrow[\text{πλήρες}]{\Gamma}$$

$$\Rightarrow \exists\, \tilde{s} \in \Gamma(U, \mathcal{S}) : \tilde{s}|_{U_\alpha} = \rho_{U_\alpha}(s_\alpha), \ \forall \alpha \in A \underset{\text{επί}}{\overset{\rho_U}{\Longrightarrow}}$$

$$\Rightarrow \exists\, s \in S(U) : \rho_U(s) = \tilde{s}.$$

Τότε

$$\rho_{U_\alpha}(\rho^U_{U_\alpha}(s)) = \pi^U_{U_\alpha}(\rho_U(s)) = \tilde{s}|_{U_\alpha} = \rho_{U_\alpha}(s_\alpha) \ \ \forall \alpha \in A \underset{1-1}{\overset{\rho_{U_\alpha}}{\Longrightarrow}}$$

$$\Rightarrow \rho^U_{U_\alpha}(s) = s_\alpha, \quad \forall \alpha \in A,$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. ∎

11.4 ΠΟΡΙΣΜΑ. Ένα προδράγμα S πάνω από το X είναι πλήρες εάν και μόνον εάν είναι ισόμορφο με το προδράγμα των τομών του αντίστοιχου δράγματος $\mathcal{S}$.

11.5 ΠΟΡΙΣΜΑ. Σε ένα προδράγμα S οι απεικονίσεις ρ_U είναι 1-1, εάν και μόνον εάν το S είναι μονο-προδράγμα.

11.6 ΠΟΡΙΣΜΑ. Ο περιορισμός ενός πλήρους προδράγματος σε ένα ανοιχτό υποσύνολο της βάσης είναι πλήρες προδράγμα.

11.7 ΠΟΡΙΣΜΑ. Αν $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα και $\Gamma(\mathcal{S}) = (\Gamma(U,\mathcal{S}), \rho^U_V)$ το αντίστοιχο πλήρες προδράγμα των τομών του, τότε $\forall A \in \tau_X$,

$$\Gamma(\mathcal{S})|_A = \Gamma(\mathcal{S}|_A)$$

ως προς ένα ισομορφισμό προδραγμάτων.

<u>Απόδ.</u> Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\Gamma(\mathcal{S})|_A(U) := \Gamma(\mathcal{S})(U) = \Gamma(U, \mathcal{S}) = \Gamma(U, \mathcal{S}|_A) =: \Gamma(\mathcal{S}|_A)(U),$$

$\forall U \subseteq A$ ανοιχτό. ∎

11.8 ΠΟΡΙΣΜΑ. Οι ισομορφισμοί των προδραγμάτων διατηρούν την πληρότητα.

Για κάθε προδράγμα S, το προδράγμα των τομών $\Gamma(\mathcal{S})$ του αντίστοιχου δράγματος $\mathcal{S}$ είναι το "μικρότερο" πλήρες προδράγμα που περιέχει το S. Δηλ. το $\Gamma(\mathcal{S})$ είναι η λύση ενός καθολικού προβλήματος. Ακριβέστερα

11.7 ΘΕΩΡΗΜΑ. Εστω $S=(S(U), \rho^U_V)_{V\subseteq U\in\tau_X}$ ένα προδράγμα πάνω από το X, $\mathcal{S}$ η αντίστοιχη δραγματοποίηση και $\Gamma(\mathcal{S}) = (\Gamma(U,\mathcal{S}), \sigma^U_V)_{V\subseteq U\in}$ το προδράγμα των τομών του $\mathcal{S}$. Εστω και $E=(E(U), \lambda^U_V)$ ένα πλήρες προδράγμα στο X και $\phi: S\to E$ ένας μορφισμός προδραγμάτων. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός μορφισμός (πλήρων) προδραγμάτων $\psi:\Gamma(\mathcal{S})\to E$ που κάνει μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "\rho"'] & & E \\ & \Gamma(\mathcal{S}) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

όπου $\rho_U: S(U)\to\Gamma(U,\mathcal{S}) : s\mapsto\tilde{s}$, $\forall U\in\tau_X$.

Απόδ. Ο μορφισμός προδραγμάτων $\phi: S\to E$ επάγεται ένα μορφισμό δραγμάτων $\tilde{\phi}: \mathcal{S}\to\mathcal{E}$ που με τη σειρά του επάγεται ένα μορφισμό προδραγμάτων τομών $\bar{\phi}: \Gamma(\mathcal{S})\to\Gamma(\mathcal{E})$. Εξάλλου, επειδή το E είναι πλήρες ο μορφισμός προδραγμάτων $\lambda: E\to\Gamma(\mathcal{E})$ είναι ισομορφισμός. Θέτουμε $\psi:=\lambda^{-1}\circ\bar{\phi}$. Τότε

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\rho"'] & E \arrow[d, shift left, "\lambda"] \\ \Gamma(\mathcal{S}) \arrow[r, "\bar{\phi}"'] \arrow[ur, dashed, "\psi"] & \Gamma(\mathcal{E}) \arrow[u, shift left, "\lambda^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$$\psi\circ\rho = \lambda^{-1}\circ\bar{\phi}\circ\rho = \lambda^{-1}\circ\lambda\circ\phi = \phi.$$

Για το μονοσήμαντο: Ο μορφισμός $\bar{\phi}$ είναι ο μοναδικός που έχει την ιδιότητα $\lambda\circ\phi = \bar{\phi}\circ\rho$, από την καθολική ιδιότητα των επαγωγικών ορίων. Αν $\psi': \Gamma(\mathcal{S})\to E$ μορφισμός με $\psi'\circ\rho=\phi$, τότε $\lambda\circ\psi'\circ\rho = \lambda\circ\phi$, άρα $\lambda\circ\psi' = \phi$ και $\psi' = \lambda^{-1}\circ\phi = \psi$. ■

11.10 ΛΗΜΜΑ. Έστω $\mathcal{S}=(\mathcal{S}(U),\rho^U_V)$ και $E=(E(U),\lambda^U_V)$ δύο προδράγματα πάνω από το X με E μονοπροδράγμα. Επιπλέον, $\phi,\psi:\mathcal{S}\to E$ δύο μορφισμοί προδραγμάτων με $\phi_x=\psi_x$, $\forall x\in X$. Τότε $\phi=\psi$.

<u>Απόδ.</u> $\phi_x=\psi_x \ \forall x\in X \Rightarrow \tilde{\phi}=\tilde{\psi}:\mathcal{S}\to\mathcal{E} \Rightarrow \bar{\phi}_U=\bar{\psi}_U:\Gamma(U,\mathcal{S})\to\Gamma(U,\mathcal{E})$, $\forall U\in\tau_X$. Έστω $U\in\tau_X$. Είναι

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}(U) \arrow[r, "\phi_U"] \arrow[d, "\rho_U"'] & E(U) \arrow[d, "\lambda_U"] \\
\Gamma(U,\mathcal{S}) \arrow[r, "\bar{\phi}_U"'] & \Gamma(U,\mathcal{E})
\end{tikzcd}$$

$\lambda_U\circ\phi_U=\bar{\phi}_U\circ\rho_U=\bar{\psi}_U\circ\rho_U=\lambda_U\circ\psi_U \Rightarrow \phi_U=\psi_U$, αφού E μονοπροδράγμα και λ_U 1-1. ∎

Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}o\mathcal{P}\mathcal{S}h_X$ την πλήρη υποκατηγορία της $\mathcal{P}\mathcal{S}h_X$ που αποτελείται από τα πλήρη προδράγματα πάνω από το X.

12. ΜΟΡΦΙΣΜΟΙ ΠΡΟΔΡΑΓΜΑΤΩΝ (συνέχεια).

12.1 ΛΗΜΜΑ. Έστω $S=(\mathcal{S}(U),\rho^U_V)$, $E=(E(U),\lambda^U_V)$ προδράγματα πάνω από το X, $\phi=(\phi_U):\mathcal{S}\to E$ μορφισμός προδραγμάτων. Θεωρούμε τις συνθήκες:

(1) ϕ μονομορφισμός (βλ. Ορσ. 2.6).

(2) $\forall x\in X \ \forall U\in\mathcal{N}(x) \ \exists V\in\mathcal{N}(x): V\subseteq U$ και $\phi_V:\mathcal{S}(V)\to E(V)$ να είναι 1-1.

(3) $\forall x\in X$ $\phi_x: \mathcal{S}_x\to E_x$ είναι 1-1.

Τότε (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

Ιδιαιτέρως: Αν $\mathcal{S}$ μονο-προδράγμα, (3) $\Rightarrow$ (1), οπότε (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3).

Απόδ. Προφανώς (1) $\Rightarrow$ (2). Θδο (2) $\Rightarrow$ (3). Έστω $a, b \in S_x$ με $\phi_x(a) = \phi_x(b)$. Υπάρχουν $U, V \in \mathcal{N}(x)$ και $\alpha \in S(U)$, $\beta \in S(V)$: $\rho_x^U(\alpha) = a$, $\rho_x^V(\beta) = b$. Οπότε

$$\phi_x(a) = \phi_x(b) \Rightarrow \phi_x \circ \rho_x^U(\alpha) = \phi_x \circ \rho_x^V(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_x^U(\phi_U(\alpha)) = \lambda_x^V(\phi_V(\beta)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{N}(x) : W \subseteq U \cap V,\ \phi_W \text{ 1-1 και } \lambda_W^U(\phi_U(\alpha)) = \lambda_W^V(\phi_V(\beta)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{N}(x) : W \subseteq U \cap W,\ \phi_W \text{ 1-1 και } \phi_W \circ \rho_W^U(\alpha) = \phi_W \circ \rho_W^V(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{N}(x) : W \subseteq U \cap W \text{ και } \rho_W^U(\alpha) = \rho_W^V(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = b.$$

Έστω τώρα ότι S μονο-προδράγμα και ισχύει η (3). Αν $U \subseteq X$ ανοικτό και $\alpha, \beta \in S(U)$ με $\phi_U(\alpha) = \phi_U(\beta)$, τότε $\forall x \in U$ είναι

$$\phi_x(\rho_x^U(\alpha)) = \lambda_x^U(\phi_U(\alpha)) = \lambda_x^U(\phi_U(\beta)) = \phi_x(\rho_x^U(\beta)) \overset{(3)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \rho_x^U(\alpha) = \rho_x^U(\beta),\ \forall x \in U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha}(x) = \tilde{\beta}(x),\ \forall x \in U \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho_U(\alpha) = \rho_U(\beta) \Rightarrow \alpha = \beta. \quad \blacksquare$$

Ένας μορφισμός με την ιδιότητα (2) θα λέγεται B-μονομορφισμός. Ανάλογα ορίζονται οι B-επιμορφισμοί και οι B-ισομορφισμοί.

12.2 ΛΗΜΜΑ. Έστω $S = (S(U), \rho_V^U)$, $E = (E(U), \lambda_V^U)$ προδράγματα πάνω από το X, $\phi = (\phi_U) : S \to E$ μορφισμός προδραγμάτων. Θεωρούμε τις συνθήκες:

(1) ϕ επιμορφισμός (Ορσ. 2.6)

(2) $\forall x \in X\ \forall U \in \mathcal{N}(x)\ \exists V \in \mathcal{N}(x) : V \subseteq U$ και $\phi_V : S(V) \to E(V)$ επί.

(3) $\forall x \in X$ $\phi_x : S_x \to E_x$ επί.

Τότε (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3).

Απόδ. Προφανώς (1) ⇒ (2). Δείχνουμε ότι (2) ⇒ (3). Έστω $x \in X$ και $b \in E_x$. $\exists\, U \in \mathcal{N}(x)$ με ϕ_U επί και $\beta \in E(U)$: $b = \lambda_x^U(\beta)$. Επίσης $\exists\, \alpha \in S(U)$: $\phi_U(\alpha) = \beta$. Άρα

$$b = \lambda_x^U(\beta) = \lambda_x^U(\phi_U(\alpha)) = \phi_x(\rho_x^U(\alpha)), \quad \rho_x^U(\alpha) =: a \in S_x,$$

άρα ϕ_x επί. ∎

12.3 (ΑΝΤΙ-)ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ. Έστω $\mathcal{O}$ το δράγμα των σπερμάτων των ολομόρφων συναρτήσεων, ορισμένων στο $\mathbb{C}$, με τιμές στο $\mathbb{C}$. Είναι το δράγμα που παράγεται από το πλήρες προδράγμα $(\mathcal{O}(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \subseteq \mathbb{C}}$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{O}^\cdot$ το δράγμα που παράγεται από το πλήρες προδράγμα $(\mathcal{O}^\cdot(U) := \mathcal{O}(U)^\cdot, \rho_V^U)$, όπου

$$\mathcal{O}(U)^\cdot := \{\alpha \in \mathcal{O}(U) : \alpha(x) \neq 0,\ \forall x \in U\}.$$

Θεωρούμε και τον μορφισμό προδραγμάτων $\phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}^\cdot$ με

(*) $\qquad \phi_U : \mathcal{O}(U) \longrightarrow \mathcal{O}(U)^\cdot : \alpha \longmapsto \phi_U(\alpha) := \exp 2\pi i\, \alpha.$

Παρατηρούμε ότι κάθε $\beta \in \mathcal{O}(U)$ τοπικά παίρνει τη μορφή $\beta = \exp 2\pi i\, \alpha$, $\alpha \in \mathcal{O}(V)$, $V \subseteq U$. Άρα η ϕ_x είναι επί, $\forall x \in \mathbb{C}$. Όμως αν U δεν είναι απλά-συνεκτικό, τότε η (*) μπορεί να μην είναι επί. Π.χ. για $U = \mathbb{C} - \{0\}$, η id_U δεν έχει μονοσήμαντα ορισμένο λογάριθμο. Άρα (3) $\not\Rightarrow$ (1).

12.4 ΘΕΩΡΗΜΑ. Έστω $S = (S(U), \rho_V^U)$ ένα πλήρες προδράγμα και $E = (E(U), \lambda_V^U)$ ένα μονο-προδράγμα. Έστω $f : S \to E$ μορφισμός προδραγμάτων. Τα κάτωθι είναι ισοδύναμα:

(i) f είναι ισομορφισμός

(ii) f είναι Β-ισομορφισμός

(iii) $\forall x \in X$ $f_x : S_x \longrightarrow E_x$ είναι 1-1 και επί.

Απόδ: Άσκηση!