Άσκηση Νδο ο συναρτητής $\mathcal{S}: \mathcal{C}o\mathcal{P}Sh_X \longrightarrow Sh_X$ είναι αριστερά προσαρτημένος (left adjoint) του $\Gamma: Sh_X \longrightarrow \mathcal{C}o\mathcal{P}Sh_X$ και, επίσης, ο $\Gamma: Sh_X \longrightarrow \mathcal{C}o\mathcal{P}Sh_X$ είναι αριστερά προσαρτημένος του $\mathcal{S}: \mathcal{C}o\mathcal{P}Sh_X \longrightarrow Sh_X$. Συμβαίνει το ίδιο αν θεωρήσουμε την $\mathcal{P}Sh_X$ αντί της $\mathcal{C}o\mathcal{P}Sh_X$;

$\boxed{\text{ΝΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ}}$

ΟΡΣ. Έστω $\mathcal{S} \equiv (S(U), \rho^U_V)$, $T \equiv (T(U), \lambda^U_V) \in \mathcal{P}Sh_X$. Ονομάζουμε γινόμενο των $\mathcal{S}, T$ το προδράγμα

$$S \times T := (S(U) \times T(U), \ \rho^U_V \times \lambda^U_V)$$

Άσκηση. Νδο $\mathcal{S} \times T$ πλήρες $\Leftrightarrow$ $\mathcal{S}, T$ πλήρη.

ΠΡΟΤ. Αν $\mathcal{S}, T$ προδράγματα, όπως προηγουμένως, η οικογένεια

$$\left(\begin{array}{rl} p_{SU}: S(U) \times T(U) & \longrightarrow S(U) \\ (s,t) & \longmapsto s \end{array} \right)_{U \in \tau_X}$$

και η οικογένεια

$$\left(\begin{array}{rl} p_{TU}: S(U) \times T(U) & \longrightarrow T(U) \\ (s,t) & \longmapsto t \end{array} \right)_{U \in \tau_X}$$

είναι μορφισμοί προδραγμάτων.

Απόδ. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι τα τετράγωνα

$$\begin{tikzcd} S(U) \times T(U) \arrow[r, "p_{SU}"] \arrow[d, "\rho^U_V \times \lambda^U_V"'] & S(U) \arrow[d, "\rho^U_V"] \\ S(V) \times T(V) \arrow[r, "p_{SV}"'] & S(V) \end{tikzcd} \quad \text{και} \quad \begin{tikzcd} S(U) \times T(U) \arrow[r, "p_{TU}"] \arrow[d, "\rho^U_V \times \lambda^U_V"'] & T(U) \arrow[d, "\lambda^U_V"] \\ S(V) \times T(V) \arrow[r, "p_{TV}"'] & T(V) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθ. $\blacksquare$

<u>Άσκηση</u>. Νδο η τριάδα $(S\times T, (p_{SU}), (p_{TU}))$ είναι γινόμενο των S και T στην $\mathcal{P}Sh_X$.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>. Εστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$, $(\mathcal{T}, p, X) \in Sh_X$. Ονομάζουμε <u>νηματικό γινόμενο</u> των $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ τον χώρο

$$\mathcal{S}\times_X \mathcal{T} := \{(s,t)\in \mathcal{S}\times\mathcal{T} : \pi(s) = p(t)\} \subseteq \mathcal{S}\times\mathcal{T}$$

εφοδιασμένο με την σχετική τοπολογία από την τοπολογία-γινόμενο του $\mathcal{S}\times\mathcal{T}$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Η απεικόνιση

$$\Pi : \mathcal{S}\times_X\mathcal{T} \longrightarrow X : (s,t) \longmapsto \Pi(s,t) = \pi(s) = p(t)$$

είναι τοπικός ομοιομορφ., άρα $(\mathcal{S}\times_X\mathcal{T}, \Pi, X) \in Sh_X$.

<u>Αποδ</u>. Εστω $(s,t)\in \mathcal{S}\times_X\mathcal{T} \Rightarrow s\in\mathcal{S}$ και $t\in\mathcal{T} \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, U\in \mathcal{N}(s)$, $V\in\mathcal{N}(t)$, $W\in\mathcal{N}(x=\pi(s)=p(t))$:
$\pi|_U : U\to W$ και $p|_V : V\to W$ να είναι ομοιομορφισμοί $\Rightarrow$
$\Rightarrow A := (U\times V)\cap(\mathcal{S}\times_X\mathcal{T})$ είναι ανοιχτή περιοχή του (s,t) στο $\mathcal{S}\times_X\mathcal{T}$ και $\Pi|_A : A\to W$ είναι ομοιομορφισμός:

(i) $\Pi|_A$ είναι 1-1: Αν $\Pi(s_1,t_1) = \Pi(s_2,t_2) = x'\in W$ με $s_1,s_2\in U$, $t_1,t_2\in V$, τότε $\pi(s_1) = \pi(s_2) = x' \Rightarrow s_1 = s_2$ και $p(t_1) = p(t_2) = x' \Rightarrow t_1 = t_2$.

(ii) $\Pi|_A : A\to W$ επί: Εστω $x'\in W \Rightarrow \exists!\, s'\in U : \pi(s') = x'$ και $\exists!\, t'\in V : p(t') = x' \Rightarrow \exists!\,(s',t')\in A := (U\times V)\cap(\mathcal{S}\times_X\mathcal{T})$: $\Pi(s',t') = \pi(s') = p(t') = x'$.

(iii) Η $\Pi : \mathcal{S}\times_X\mathcal{T}\to X$ είναι συνεχής, σαν σύνθεση συνεχών: $\Pi = \pi\circ p_{\mathcal{S}}$, όπου $p_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}\times_X\mathcal{T}\to\mathcal{S}$ ο περιορισμός της κανονικής προβολής. Άρα και κάθε περιορισμός Π/A είναι συνεχής. ∎

<u>Ασκ.</u> Ολοκληρώστε την προηγ. απόδειξη, δείχνοντας ότι η $\Pi|_A$ είναι ανοιχτή.

<u>Παρατήρηση.</u> $\forall x \in X$, το νήμα πάνω από το x, του δράγματος $\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$, δηλ. το $(\mathcal{S} \times_X \mathcal{T})_x$ συμπίπτει με το γινόμενο $\mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Εστω $S \equiv (S(U), \rho^U_V)$, $T \equiv (T(U), \lambda^U_V) \in \mathcal{P}Sh_X$, $\mathcal{S} = \mathbf{S}(S)$, $\mathcal{T} = \mathbf{S}(T)$. Θεωρούμε και την δραγματοποίηση $\mathbf{S}(S \times T)$ του $S \times T$. Τότε, $\forall x \in X$, το νήμα $[\mathbf{S}(S \times T)]_x$ συμπίπτει με το γινόμενο $\mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x$.

<u>Απόδ.</u> Εστω $\xi \in [\mathbf{S}(S \times T)]_x$. Τότε $\exists\, U \in \mathcal{N}(x)$ και $\exists\, (s,t) \in S(U) \times T(U)$: $\xi = [(s,t)]_x$ (ως προς την σχ. ισοδ. που ορίζεται από τις $\rho^U_V \times \lambda^U_V$).

Ορίζουμε

$$\Phi_x : [\mathbf{S}(S \times T)]_x \longrightarrow \mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x : \xi = [(s,t)]_x \longmapsto ([s]_x, [t]_x).$$

(i) Είναι καλά ορσ.: Εστω $[(s',t')]_x = [(s,t)]_x$, όπου $s \in S(U)$, $t \in T(U)$, $s' \in S(U')$, $t' \in T(U')$, $U, U' \in \mathcal{N}(x)$

$\Rightarrow \exists\, V \in \mathcal{N}(x)$: $V \subseteq U \cap U'$ και $\rho^U_V(s) = \rho^{U'}_V(s')$, $\lambda^U_V(t) = \lambda^{U'}_V(t')$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow [s]_x = [s']_x$ και $[t]_x = [t']_x \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi_x([s,t]_x) = \Phi_x([s',t']_x)$.

(ii) Φ_x είναι 1-1: Αν $\Phi_x([s,t]_x) = \Phi_x([s',t']_x)$, με $(s,t) \in S(U) \times T(U)$, $(s',t') \in S(U') \times T(U') \Rightarrow$

$\Rightarrow [s]_x = [s']_x$ και $[t]_x = [t']_x \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, V_1 \subseteq U \cap U'$: $\rho^U_{V_1}(s) = \rho^{U'}_{V_1}(s')$ και

$\exists\, V_2 \subseteq U \cap U'$: $\lambda^U_{V_2}(t) = \lambda^{U'}_{V_2}(t') \Rightarrow$

$\Rightarrow$ για $W = V_1 \cap V_2$: $\rho^U_W(s) = \rho^{U'}_W(s')$ και $\lambda^U_W(t) = \lambda^{U'}_W(t')$

δηλ. $(\rho^U_W \times \lambda^U_W)(s,t) = (\rho^{U'}_W \times \lambda^{U'}_W)(s',t') \Rightarrow$
$\Rightarrow [s,t]_x = [s',t']_x$.

(iii) Η Φ_x είναι επί: Για κάθε $([s]_x, [t]_x) \in \mathcal{S}_x \times \mathcal{T}_x$, $\exists\, U \in \mathcal{N}(x)$ με $s \in S(U)$, $V \in \mathcal{N}(x)$ με $t \in T(V)$. Παίρνοντας $W := U \cap V$ έχουμε $(\rho^U_W(s), \lambda^V_W(t)) \in S(W) \times T(W)$ και $\Phi_x([\rho^U_W(s), \lambda^V_W(t)]_x) = ([s]_x, [t]_x)$. ∎

Τα δράγματα $\mathcal{S}(S\times T)$ και $\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$ έχουν τα ίδια νήματα. Για να συμπίπτουν, πρέπει να έχουν και την ίδια τοπολογία, άρα τις ίδιες συνεχείς τομές.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>. (1) Δείξτε ότι οι συνεχείς τομές του $\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}$ είναι της μορφής $\alpha : U \longrightarrow \mathcal{S} \times_X \mathcal{T} : \alpha(x) = (\sigma(x), \tau(x))$, $\sigma \in \mathcal{S}(U)$, $\tau \in \mathcal{T}(U)$.

(2) Συγκρίνετε με τις συνεχείς τομές του $\mathcal{S}(S\times T)$, δηλ. με τις $\widetilde{(s,t)} \in \mathcal{S}(S\times T)(U)$, όπου $(s,t) \in S(U)\times T(U)$

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> Η δραγματοποίηση των μορφισμών προδραγμάτων $(p_{SU} : S(U) \times T(U) \longrightarrow S(U))_{U\in \tau_X}$ και $(p_{TU} : S(U)\times T(U) \longrightarrow T(U))_{U \in \tau_X}$ συμπίπτει με τους περιορισμούς των κανονικών προβολών $p_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \times_X \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ και $p_{\mathcal{T}} : \mathcal{S} \times_X \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>. Εξετάστε αν $(\mathcal{S} \times_X \mathcal{T}, p_{\mathcal{S}}, p_{\mathcal{T}})$ είναι γινόμενο των $(\mathcal{S}, \pi, X)$ και $(\mathcal{T}, p, X)$ στην $\mathcal{S}h_X$.

ΠΡΟΔΡΑΓΜΑΤΑ/ΔΡΑΓΜΑΤΑ ΜΕ ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΔΟΜΗ

Εστω $S \equiv (S(U), \rho^U_V)$ ένα <u>προδράγμα ομάδων</u>. Δηλ. S είναι συναρτητής $: \tau_X \longrightarrow \mathcal{G}$, επομένως κάθε $S(U)$ είναι ομάδα και κάθε $\rho^U_V : S(U) \to S(V)$ μορφισμός ομάδων. Τότε, $\forall x \in X$, η οικογένεια $(S(U), \rho^U_V)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}(x)}$ είναι επαγωγικό σύστημα ομάδων, άρα:

(i) Το επαγ. όριο του συστήματος, δηλ. το νήμα $\mathcal{S}_x$ είναι ομάδα

(ii) κάθε κανονικός μορφισμός $\rho^U_x : S(U) \to \mathcal{S}_x$ είναι μορφ. ομάδων

(iii) Αν $(f_U : S(U) \to T(U))_{U \in \tau_X}$ είναι μορφισμός προδραγμάτων ομάδων, τότε $f_x : \mathcal{S}_x \to \mathcal{T}_x$ είναι μορφισμός ομάδων.

<u>Υπενθ.</u> $\forall s \in S(U)$, $t \in S(V)$, όπου $U, V \in \mathcal{N}(x)$ είναι $[s]_x * [t]_x := [\rho^U_{U \cap V}(s) * \rho^V_{U \cap V}(t)]_x$. (1)

Ανάλογα αποτελέσματα έχουμε αν το αρχικό S είναι προδράγμα δακτυλίων, σωμάτων, ή διαν. χώρων πάνω από ένα σώμα $\mathbb{K}$.

Ιδιαιτέρως, έστω $R \equiv (R(U), \rho^U_V)$ ένα προδράγμα δακτυλίων. Ενα δράγμα $M \equiv (M(U), \lambda^U_V)$ λέγεται <u>R-πρότυπο</u>, αν κάθε $M(U)$ είναι $R(U)$-πρότυπο και κάθε λ^U_V είναι ρ^U_V-μορφισμός, δηλ.

(i) λ^U_V είναι προσθετικός: $\lambda^U_V(s+t) = \lambda^U_V(s) + \lambda^U_V(t)$

(ii) $\forall s \in M(U)$, $\forall r \in R(U)$:

$$\lambda^U_V(rs) = \rho^U_V(r) \cdot \lambda^U_V(s).$$

Παράδ. Τα προδράγματα $C \equiv (C(U), r^U_V)$ και $C^\infty \equiv (C^\infty(U), r^U_V)$ των συνεχών συναρτήσεων πάνω από ένα τοπολ. χώρο X και των διαφορίσιμων συναρτήσεων πάνω από μια πολ/τα X, αντίστοιχα, είναι προδράγματα δακτυλίων, ιδιαιτέρως, είναι προδράγματα αλγεβρών.

Αν S είναι προδράγμα ομάδων, τότε, προφανώς, τα διαγράμματα

$$
\begin{array}{ccc}
S(U)\times S(U) & \xrightarrow{\ *_U\ } & S(U) \\
{\scriptstyle \rho^U_V\times\rho^U_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho^U_V} \\
S(V)\times S(V) & \xrightarrow{\ *_V\ } & S(V)
\end{array}
$$

είναι μεταθετικά, άρα η οικογένεια $(*_U)_{U\in\tau_X}$ είναι μορφισμός : $S\times S \longrightarrow S$. Άρα ορίζεται η δραγματοποίησή του

$$* : \mathcal{S}\times_X \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \qquad (2)$$

που στα νήματα συμπίπτει με την πράξη ομάδας του $\mathcal{S}_x$ (βλ. (1)). Σαν δραγματοποίηση μορφισμού προδραγμάτων, η (2) είναι συνεχής.

ΤΟ ΔΡΑΓΜΑ ΤΩΝ ΜΟΡΦΙΣΜΩΝ

Εστω $(\mathcal{S},\pi,X), (\mathcal{T},p,X) \in \mathcal{Sh}_X$. $\forall U\in\tau_X$, θεωρούμε τους περιορισμούς $\mathcal{S}|_U := (\pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)}, U)$ και $\mathcal{T}|_U := (p^{-1}(U), p|_{p^{-1}(U)}, U)$. Τότε $\mathcal{S}|_U, \mathcal{T}|_U \in \mathcal{Sh}_U$. Τα $\mathcal{S}|_U$ και $\mathcal{T}|_U$ λέγονται <u>περιορισμοί των $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ πάνω από το U</u>.

Αν $Mor(\mathcal{S}|_U, \mathcal{T}|_U)$ συμβολίζει το σύνολο των μορφισμών δραγμάτων $: \mathcal{S}|_U \longrightarrow \mathcal{T}|_U$, τότε η οικογένεια

$$(Mor(\mathcal{S},\mathcal{T})(U) := Mor(\mathcal{S}|_U, \mathcal{T}|_U),\ r^U_V)_{V\subseteq U\in\tau_X},$$

όπου r^U_V οι συνήθεις περιορισμοί απεικονίσεων, είναι πλήρες προδράγμα πάνω από το X. Το επαγόμενο <u>δράγμα των σπερμάτων των μορφισμών</u> από το $\mathcal{S}$ στο $\mathcal{T}$ συμβολίζεται με $\mathcal{M}or(\mathcal{S},\mathcal{T})$.

Προσοχή! Αν S, T προδράγματα πάνω από το X, και $Mor(S(U),T(U))$ το σύνολο των μορφισμών (: απεικονίσεων) $: S(U)\longrightarrow T(U)$ που, αν έχουμε προδράγματα με αλγεβρική δομή, επιπλέον διατηρούν την δομή αυτή, τότε, εν γένει, δεν μπορούμε να βρούμε απεικονίσεις "περιορισμού" που να συνδέουν αυτά τα σύνολα, άρα η οικογένεια $(Mor(S(U),T(U)))_{U\in\tau_X}$ <u>δεν</u> αποτελεί προδράγμα.

Ας δούμε την ειδική περίπτωση που $R\equiv(R(U), \xi^U_V)$ είναι προδράγμα δακτυλίων και $S\equiv(S(U), \rho^U_V)$, $T\equiv (T(U), \lambda^U_V)$ είναι R-πρότυπα. Αν $\mathcal{S}, \mathcal{T}, \mathcal{R}$ είναι τα επαγόμενα δράγματα, τότε $\mathcal{S},\mathcal{T}$ είναι $\mathcal{R}$-πρότυπα, και $\forall x\in X$, $\mathcal{S}_x$ και $\mathcal{T}_x$ είναι $\mathcal{R}_x$-πρότυπα. Ένας <u>μορφισμός $\mathcal{R}$-προτύπων</u> $f:\mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{T}$ είναι ένας μορφισμός δραγμάτων, τέτοιος ώστε, $\forall x\in X$: $f_x:\mathcal{S}_x\longrightarrow\mathcal{T}_x$ να είναι $\mathcal{R}_x$-γραμμική. Άρα, $\forall\, U\in\tau_X$, στο σύνολο

$$Mor(\mathcal{S}|_U,\mathcal{T}|_U)=\{f:\mathcal{S}|_U\longrightarrow\mathcal{T}|_U : \text{μορφ. } \mathcal{R}|_U\text{-προτύπων}\}$$

ορίζεται η πρόσθεση

$$+ : Mor(\mathcal{S}|_U,\mathcal{T}|_U)\times Mor(\mathcal{S}|_U,\mathcal{T}|_U)\longrightarrow Mor(\mathcal{S}|_U,\mathcal{T}|_U),$$

όπου, $\forall\, f, g \in Mor(\mathcal{S}|_U, \mathcal{T}|_U)$, είναι

$$f+g : \mathcal{S}_U \longrightarrow \mathcal{T}_U : \underset{\mathcal{S}_x}{\underset{\cap}{s}} \longmapsto \underset{\mathcal{T}_x}{\underset{\cap}{f(s)}} + \underset{\mathcal{T}_x}{\underset{\cap}{g(s)}} \in \mathcal{T}_x .$$

Επιπλέον, ορίζεται πολ/σμός με τα στοιχεία του $\mathcal{R}(U)$:

$$rf : \mathcal{S}_U \longrightarrow \mathcal{T}_U : s \longmapsto \underset{\mathcal{R}_x}{\underset{\cap}{r(x)}} \cdot \underset{\mathcal{T}_x}{\underset{\cap}{f(s)}} \in \mathcal{T}_x .$$

Άρα το (πλήρες) προδράγμα που παράγει το $\mathcal{M}or(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ είναι προδράγμα προτύπων ως προς το (πλήρες) προδράγμα δακτυλίων ($\mathcal{R}(U)$) των τομών του $\mathcal{R}$, και, επομένως, το $\mathcal{M}or(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ είναι $\mathcal{R}$-πρότυπο. Ιδιαιτέρως, αν $\mathcal{T} = \mathcal{R}$, το $\mathcal{M}or(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ λέγεται <u>δυϊκό του $\mathcal{S}$</u> και συμβολίζεται με $\mathcal{S}^*$.

ΑΛΛΑΓΗ ΧΩΡΟΥ ΒΑΣΗΣ / PUSH-OUT

Έστω $S \equiv (S(U), \rho^U_{U'}) \in \mathcal{PSh}_X$, και $f : X \longrightarrow Y$ συνεχής. Συμβολίζουμε

$$f_*(S)(V) := S(f^{-1}(V)), \quad \forall\, V \in \tau_Y ,$$

και

$$r^V_{V'} := \rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V')} , \quad \forall\, V' \subseteq V \in \tau_Y .$$

Τότε $(f_*(S)(V), r^V_{V'}) \in \mathcal{PSh}_Y$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>. (1) Δείξτε ότι S πλήρες $\Rightarrow f_*(S)$ πλήρες.
(2) Εξετάστε το αντίστροφο.