όπου, $\forall\, f, g \in Mor(\mathcal{S}|_U, \mathcal{T}|_U)$, είναι

$$f+g : \mathcal{S}_U \longrightarrow \mathcal{T}_U : \underset{\mathcal{S}_x}{\overset{\cap}{s}} \longmapsto \underset{\mathcal{T}_x}{\overset{\cap}{f(s)}} + \underset{\mathcal{T}_x}{\overset{\cap}{g(s)}} \in \mathcal{T}_x .$$

Επιπλέον, ορίζεται πολ/σμός με τα στοιχεία του $\mathcal{R}(U)$:

$$rf : \mathcal{S}_U \longrightarrow \mathcal{T}_U : s \longmapsto \underset{\mathcal{R}_x}{\overset{\cap}{r(x)}} \cdot \underset{\mathcal{T}_x}{\overset{\cap}{f(s)}} \in \mathcal{T}_x .$$

Αρα το (πλήρες) προδράγμα που παράγει το $\mathcal{M}or(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ είναι προδράγμα προτύπων ως προς το (πλήρες) προδράγμα δακτυλίων $(\mathcal{R}(U))$ των τομών του $\mathcal{R}$, και, επομένως, το $\mathcal{M}or(\mathcal{S}, \mathcal{T})$ είναι $\mathcal{R}$-πρότυπο. Ιδιαιτέρως, αν $\mathcal{T} = \mathcal{R}$, το $\mathcal{M}or(\mathcal{S}, \mathcal{R})$ λέγεται <u>δυϊκό του $\mathcal{S}$</u> και συμβολίζεται με $\mathcal{S}^*$.

ΑΛΛΑΓΗ ΧΩΡΟΥ ΒΑΣΗΣ / PUSH-OUT

Εστω $S \equiv (S(U), \rho^U_{U'}) \in \mathcal{P}Sh_X$, και $f : X \to Y$ συνεχής. Συμβολίζουμε

$$f_*(S)(V) := S(f^{-1}(V)), \quad \forall\, V \in \tau_Y ,$$

και

$$r^V_{V'} := \rho^{f^{-1}(V)}_{f^{-1}(V')}, \quad \forall\, V' \subseteq V \in \tau_Y .$$

Τότε $(f_*(S)(V), r^V_{V'}) \in \mathcal{P}Sh_Y$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>. (1) Δείξτε ότι S πλήρες $\Rightarrow f_*(S)$ πλήρες.
(2) Εξετάστε το αντίστροφο.

Εστω τώρα $g \equiv (g_U)_{U \in \tau_X} : S \longrightarrow T$ μορφισμός προδραγμάτων στην $\mathcal{PSh}_X$. Θέτουμε

$$f_*(g) := (f_*(g)_V)_{V \in \tau_Y} = \left(g_{f^{-1}(V)} : S(f^{-1}(V)) \longrightarrow T(f^{-1}(V))\right)_{V \in \tau_Y}$$

Τότε η $f_*(g) : f_*(S) \longrightarrow f_*(T)$ είναι μορφισμός προδραγμάτων.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ.</u> Η f_* ορίζει συναλλοίωτο συναρτητή

$$f_* : \mathcal{PSh}_X \longrightarrow \mathcal{PSh}_Y.$$

<u>Απόδ.</u> (i) Εστω $S \in \mathcal{PSh}_X$ και $1_S = (1_{S(U)})_{U \in \tau_X}$ ο ταυτοτικός μορφισμός του S. Τότε

$$(f_*(1_S)_V)_{V \in \tau_Y} = (1_{S(f^{-1}(V))})_{V \in \tau_Y} =$$

$$= (1_{f_*(S)(V)})_{V \in \tau_Y} = 1_{f_*(S)}.$$

(ii) Αν $g \equiv (g_U) : S \to T$, $h \equiv (h_U) : T \longrightarrow P$, τότε

$$\begin{aligned} f_*(h \circ g)_V &= (h \circ g)_{f^{-1}(V)} = \\ &= h_{f^{-1}(V)} \circ g_{f^{-1}(V)} = \\ &= f_*(h)_V \circ f_*(g)_V = (f_*(h) \circ f_*(g))_V \end{aligned}$$

Αρα $f_*(h \circ g) = f_*(h) \circ f_*(g)$. ∎

Αντίστοιχος συναρτητής $\tilde{f}_* : \mathcal{Sh}_X \longrightarrow \mathcal{Sh}_Y$ ορίζεται μέσω των συναρτητών τομής και δραγματοποίησης:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Sh}_X \arrow[r, "\Gamma"] \arrow[rrr, bend right, "\tilde{f}_*"'] & \mathcal{C}o\mathcal{PSh}_X \arrow[r, "f_*"] & \mathcal{C}o\mathcal{PSh}_Y \arrow[r, "\mathcal{S}"] & \mathcal{Sh}_Y \end{tikzcd}$$

Στα επόμενα θα γράφουμε f_* αντί $\tilde{f}_*$.

ΑΣΚΗΣΗ Αν $\mathcal{S} \in Sh_X$, ποιά είναι τα νήματα του $f_*(\mathcal{S})$
- αν η f είναι ομοιομορφισμός;
- αν f όχι επί;
- αν f όχι 1-1;

ΑΣΚΗΣΗ Δείξτε ότι ο f_* διατηρεί τις αλγεβρικές δομές.

ΑΛΛΑΓΗ ΧΩΡΟΥ ΒΑΣΗΣ / PULL-BACK

Εστω $(\mathcal{S}, \pi, Y) \in Sh_Y$ και $f: X \to Y$ συνεχής. Συμβολίζουμε
$f^*(\mathcal{S}) := \{(x,s) \in X \times \mathcal{S} : f(x) = \pi(s)\} \subseteq X \times \mathcal{S}$
και με $p_X : f^*(\mathcal{S}) \to X$ τον περιορισμό της προβολής στο X.

ΠΡΟΤΑΣΗ. Η $p_X : f^*(\mathcal{S}) \to X$ είναι τοπικός ομοιομορφ.

Αποδ. Το $f^*(\mathcal{S})$ έχει την σχετική τοπολογία από το $X \times \mathcal{S}$.
Εστω $(x,s) \in f^*(\mathcal{S}) \Rightarrow f(x) = \pi(s) = y \in Y$.
$\mathcal{S}$ δράγμα $\Rightarrow \exists\, A \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό με $s \in A$, και
$\exists\, V \subseteq Y$ — " — $y \in V$:
$\pi|_A : A \to Y$ ομοιομορφισμός.
$f^{-1}(V) \times A \subseteq X \times \mathcal{S}$ ανοιχτό $\Rightarrow$
$f^*(\mathcal{S}) \cap (f^{-1}(V) \times A) \subseteq f^*(\mathcal{S})$ ανοιχτό με
$(x,s) \in f^*(\mathcal{S}) \cap (f^{-1}(V) \times A) =: B$.
ΘΔο $p_X|_B : B \to f^{-1}(V)$ είναι ομοιομορφ.
(i) $(x',s'), (x'',s'') \in B$ με $p_X(x',s') = p(x'',s'') \Rightarrow$
$\Rightarrow x' = x'' \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(x') = f(x'') = y' \in V$ και
$s', s'' \in \mathcal{S}_{y'} \cap A$ με $\pi|_A$ 1-1 και $\pi|_A(s') = \pi|_A(s'') = y' \Rightarrow$
$\Rightarrow s' = s''$. Άρα $p_X|_B$ 1-1.

(ii) Εστω $x' \in f^{-1}(V) \Rightarrow f(x') = y' \in V' \Rightarrow \exists!\ s' \in A$:
$\pi|_A(s') = y' = f(x') \Rightarrow (x', s') \in (f^{-1}(V) \times A) \cap f^*(\mathcal{S})$
και $p_X(x', s') = x'$. Δηλ. η $p_X|_B : B \to f^{-1}(V)$ είναι
επί. ∎

ΑΣΚΗΣΗ. Ολοκληρώστε την απόδειξη: Δείξτε ότι η $p_X|_B$
είναι συνεχής, ανοιχτή.

Επομένως η τριάδα $f^*(\mathcal{S}) := (f^*(\mathcal{S}), p_X, X)$ είναι
δράγμα πάνω από το X. Τα νήματα του δράγματος είναι:

$$
\begin{aligned}
f^*(\mathcal{S})_x := p_X^{-1}(\{x\}) &= \\
&= \{(x', s) \in f^*(\mathcal{S}) : p_X(x', s) = x\} = \\
&= \{(x, s) \in X \times \mathcal{S} : \pi(s) = f(x)\} = \\
&= \{x\} \times \mathcal{S}_{f(x)}.
\end{aligned}
$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. Αν $g : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ μορφισμός στην $\mathcal{S}h_Y$, τότε η

$$f^*(g) : f^*(\mathcal{S}) \to f^*(\mathcal{T}) : (x, s) \mapsto (x, g(s))$$

είναι μορφισμός δραγμάτων.

Αποδ. $f^*(g)(x, s) = (x, g(s)) \in X \times \mathcal{T}$. Αρα
$f^*(g)(x,s) \in f^*(\mathcal{T}) \Leftrightarrow \underset{\pi(s)}{\underset{\parallel}{f(x)}} = p(g(s))$, που
ισχύει, αφού $p \circ g = \pi$. Δηλ. $f^*(g)$ καλά ορσ.
Επίσης είναι συνεχής, σαν ζεύγος συνεχών. ∎

ΠΡΟΤΑΣΗ Η $f^* : \mathcal{S}h_Y \to \mathcal{S}h_X$ είναι συναλλοίωτος
συναρτητής.

Απόδ. Αν $\mathcal{S} \in \mathcal{S}h_Y$, τότε $\forall (x,s) \in f^*(\mathcal{S})$:

$$f^*(1_{\mathcal{S}})(x,s) = (x, 1_{\mathcal{S}}(s)) = (x,s) = 1_{f^*(\mathcal{S})}(x,s),$$

δηλ. $f^*(1_{\mathcal{S}}) = 1_{f^*(\mathcal{S})}$.

Εξάλλου, αν $g: \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, $h: \mathcal{T} \to \mathcal{P}$ μορφισμοί στην $\mathcal{S}h_Y$, τότε

$$f^*(h\circ g)(x,s) = (x, h(g(s))) = f^*(h)(x, g(s)) =$$
$$= f^*(h)(f^*(g)(x,s)) = f^*(h)\circ f^*(g)(x,s),$$

δηλ. $f^*(h\circ g) = f^*(h)\circ f^*(g)$. ∎

Αντίστοιχος συναρτητής $\widetilde{f^*}: \mathcal{PS}h_Y \to \mathcal{PS}h_X$ ορίζεται σαν σύνθεση:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{PS}h_Y \arrow[r, "\mathbf{S}"] \arrow[rrr, bend right, "\widetilde{f^*}"'] & \mathcal{S}h_Y \arrow[r, "f^*"] & \mathcal{S}h_X \arrow[r, "\Gamma"] & \mathcal{PS}h_X \end{tikzcd}$$

Έστω τώρα $(x,s) \in f^*(\mathcal{S})$. Θα βρούμε μια τομή του $f^*(\mathcal{S})$ που περνά από το (x,s):

$$(x,s) \in f^*(\mathcal{S}) \Rightarrow s \in \mathcal{S}_{f(x)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists V \in \mathcal{N}(f(x)) \text{ και } \exists \sigma \in \mathcal{S}(V) : \sigma(f(x)) = s.$$

Στο $U = f^{-1}(V)$ ορίζουμε την

$$(id_U, \sigma\circ f): U \longrightarrow U \times \mathcal{S} \subseteq X \times \mathcal{S}:$$
$$x' \longmapsto (x', \sigma(f(x'))).$$

Είναι συνεχής, σαν ζεύγος συνεχών με

$$p_X \circ (id_U, \sigma\circ f) = id_U.$$

Οι τιμές της περιέχονται στο $f^*(\mathcal{S})$. Πράγματι, $\forall x' \in U$:

$$(id_U, \sigma\circ f)(x') \in f^*(\mathcal{S}) \Longleftrightarrow (x', \sigma(f(x'))) \in f^*(\mathcal{S})$$
$$\Longleftrightarrow f(x') = \underbrace{\pi(\sigma}_{id_V}(f(x'))),$$

που ισχύει.

Άρα η $(id_U, \sigma\circ f): U \longrightarrow f^*(\mathcal{S})$ είναι συνεχής τομή με $(id_U, \sigma\circ f)(x) = (x, s)$.

Αντίστροφα, έστω $\alpha: U \longrightarrow f^*(\mathcal{S})$ συνεχής τομή $\Rightarrow$

$\alpha(x) \in f^*(\mathcal{S}) \subseteq X \times \mathcal{S} \Rightarrow$

$$\alpha(x) = (\underbrace{p_X \circ \alpha(x)}_{\alpha_X}, \underbrace{p_{\mathcal{S}} \circ \alpha(x)}_{\alpha_{\mathcal{S}}}) = (x, \alpha_{\mathcal{S}}(x)),$$

όπου

$\alpha_{\mathcal{S}}: U \longrightarrow \mathcal{S}$ με $\alpha_{\mathcal{S}}(x) \in \mathcal{S}_{f(x)}$ δηλ. $\pi\circ\alpha_{\mathcal{S}}(x) = f(x)$.

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S} \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[ur, "\alpha_{\mathcal{S}}"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

<u>ΟΡΣ.</u> Μια συνεχής $\alpha: U \longrightarrow \mathcal{S}$ με $\pi\circ\alpha = f$, λέγεται <u>τομή κατά μήκος της f.</u>

Συμβολίζουμε

$$\Gamma_f(U, \mathcal{S}) := \{\alpha: U \longrightarrow \mathcal{S} : \text{συνεχής και } \pi\circ\alpha = f\},$$

και θεωρούμε το (πλήρες) προδράγμα

$$(\Gamma_f(U, \mathcal{S}), r^U_{U'})_{U' \subseteq U \in \tau_X}$$

όπου $r^U_{U'}$ οι συνήθεις περιορισμοί απεικονίσεων. Το δράγμα που προκύπτει από το ανωτέρω προδράγμα είναι το $f^*(\mathcal{S})$:

ΠΡΟΤΑΣΗ. Η οικογένεια $(\Phi_U)_{U\in\tau_X}$ με

$$\Phi_U : \Gamma_f(U, \mathcal{S}) \longrightarrow f^*(\mathcal{S})(U) : \alpha \longmapsto \Phi_U(\alpha) := (id_U, \alpha)$$

είναι ισομορφισμός προδραγμάτων.

<u>Αποδ:</u> Ασκηση!

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u> Εστω οι συνεχείς συναρτήσεις $f : X \to Y$ και $g : Y \to Z$. Να εξετάσετε πώς σχετίζονται οι $(g \circ f)_*$ και $(g \circ f)^*$ με τους επιμέρους συναρτητές f_*, g_*, f^*, g^*.

ΠΥΡΗΝΕΣ ΚΑΙ ΣΥΜΠΥΡΗΝΕΣ

Θεωρούμε τώρα ένα προδράγμα δακτυλίων $R \equiv (R(U), \rho^U_V)$ και την κατηγορία Mod_R των R-προτύπων.

<u>ΛΗΜΜΑ</u> Η Mod_R έχει μηδενικό αντικείμενο, το R-πρότυπο $O \equiv (O(U) = \{0\},\ o^U_V = 0)_{V \subseteq U \in \tau_X}$.

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ</u> Καθε μορφισμός $f : S \to T$ στην Mod_R έχει πυρήνα.

<u>Αποδ.</u> $\forall\, U \in \tau_X$, υπάρχει ο πυρήνας της f_U: $(K(U) = \ker f_U,\ k_U)$, όπου $k_U : \ker f_U \longrightarrow S(U)$ η κανονική εμφύτευση.

Εστω (λ^U_V) και (μ^U_V) οι περιορισμοί των S και T, αντίστοιχα. Θεωρούμε την οικογένεια $(K(U),\ \nu^U_V := \lambda^U_V|_{K(U)})_{V \subseteq U \in \tau_X}$ ·