ΠΡΟΔΡΑΓΜΑΤΑ

(X,τ_X) τοπ. χώρος. Ενα προδράγμα (συνόλων πάνω απο το X) είναι μια οικογένεια συνόλων $(S(U))_{U\in\tau_X}$ και μια οικογένεια απεικονίσεων $(\rho^U_V : S(U)\longrightarrow S(V))_{V\subseteq U\in\tau_X}$ έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες:

(i) $\rho^U_U = id_{S(U)} : S(U)\longrightarrow S(U)\,,\ \forall U\in\tau_X$

(ii) $\forall$ τριάδα ανοιχτών $W\subseteq V\subseteq U$ στην τ_X:

$$\rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V\,,$$

δηλ. το τρίγωνο είναι μεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "\rho^U_V"] \arrow[dr, "\rho^U_W"'] & S(V) \arrow[d, "\rho^V_W"] \\ & S(W) \end{tikzcd}$$

Το προδράγμα $S\equiv(S(U),\rho^U_V)_{V\subseteq U\in\tau_X}$ λέγεται πλήρες αν $\forall U\in\tau_X$ και $\forall$ ανοιχτή κάλυψη $(U_a)_{a\in A}$ του U:

(1) $s,t\in S(U)$ με $\rho^U_{U_a}(s)=\rho^U_{U_a}(t)\,,\ \forall a\in A \Rightarrow$
$\Rightarrow s=t$

(2) $s_a\in S(U_a)\ \forall a\in A$, με $\rho^{U_a}_{U_a\cap U_\beta}(s_a)=\rho^{U_\beta}_{U_a\cap U_\beta}(s_\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, s\in S(U) : \rho^U_{U_a}(s)=s_a \quad \forall a\in A$

Αν ισχύει μόνο η (1) το S λέγεται μονοπροδράγμα.

ΟΡΣ. Έστω $\mathcal{S} \equiv (\mathcal{S}(U), \rho_V^U)$, $T \equiv (T(U), \lambda_V^U)$ προδράγματα συνόλων πάνω από τον (X, τ_X). Ένας <u>μορφισμός προδραγμάτων</u> $f: \mathcal{S} \to T$ είναι μια οικογένεια απεικονίσεων

$$\left(f_U : S(U) \longrightarrow T(U)\right)_{U \in \tau_X}$$

που κάνει μεταθετικά τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & T(U) \arrow[d, "\lambda_V^U"] \\ S(V) \arrow[r, "f_U"'] & T(V) \end{tikzcd}$$

για κάθε $V \subseteq U \in \tau_X$.

<u>Παρατήρηση.</u> Κάθε προδράγμα $\mathcal{S}$ πάνω από το X μπορεί να θεωρηθεί συναλλοίωτος συναρτητής

$$\mathcal{S} : \tau_X \longrightarrow \mathcal{S}et .$$

Ανάλογα, κάθε μορφισμός προδραγμάτων $f: S \to T$ είναι φυσικός μετασχ. μεταξύ των προηγούμενων συναρτητών.

Για κάθε προδράγμα $\mathcal{S} \equiv (\mathcal{S}(U), \rho_V^U)$ πάνω από το X, η οικογένεια των ταυτοτικών $(id_{S(U)} : S(U) \to S(U))$ είναι μορφισμός προδραγμάτων.
Αν $f \equiv (f_U) : S \to T$, $g \equiv (g_U) : T \to P$ είναι μορφισμοί προδραγμάτων, τότε η οικογένεια

$$g \circ f = (g_U \circ f_U)_{U \in \tau_X} : \mathcal{S} \longrightarrow P$$

είναι μορφισμός προδρ. Άρα τα προδράγματα πάνω από το X, με τους μορφισμούς τους αποτελούν μια κατηγορία που θα συμβολίζουμε με $\mathcal{P}\mathcal{S}h_X$.

Τα πλήρη προδράγματα πάνω από το X είναι πλήρης υποκατηγορία της $\mathcal{P}sh_X$ και θα συμβολίζεται με $\mathcal{C}o\mathcal{P}sh_X$.

ΔΡΑΓΜΑΤΑ

<u>ΟΡΣ.</u> (X, τ_X) τοπ. χώρος. Ένα <u>δράγμα (συνόλων) πάνω από το X</u> είναι μια τριάδα $(\mathcal{S}, \pi, X)$: $\mathcal{S}$ τοπ. χώρος και $\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$ <u>τοπικός ομοιομορφισμός</u>. Δηλ.

$$\forall z \in \mathcal{S} \quad \exists V \in \mathcal{N}(z) \text{ και } \exists U \in \mathcal{N}(x = \pi(z)) :$$

$$\pi|_V : V \longrightarrow U \quad \text{ομοιομορφισμός.}$$

Το $\mathcal{S}$ λέγεται <u>ολικός χώρος</u>, η π <u>προβολή</u> και το X <u>χώρος βάσης</u>.

$\forall x \in X$: $\mathcal{S}_x := \pi^{-1}(x)$ λέγεται <u>νήμα πάνω από το x</u>.

<u>Παραδ.</u> (1) (X, τ_X) τοπ. χώρος, M σύνολο $\equiv$ τοπ. χώρος με διακριτή τοπολογία $\Rightarrow$ $\forall U \in \tau_X$, $\forall m \in M$: $U \times \{m\} \subseteq X \times M$ ανοιχτό και $\pi|_{U \times \{m\}} : U \times \{m\} \rightarrow U$ ομοιομορφισμός, όπου $\pi = pr_X : X \times M \rightarrow X$. Άρα $(X \times M, \pi, X)$ δράγμα, που λέγεται <u>σταθερό</u>.

(2) Κάθε επικαλύπτων χώρος είναι δράγμα.

<u>ΟΡΣ.</u> $(\mathcal{S}, \pi, X)$, $(\mathcal{T}, p, X)$ δράγματα, $f : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$. Η f λέγεται <u>μορφισμός δραγμάτων</u> $\Longleftrightarrow$ f συνεχής και το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό. Άρα $\forall x \in X$, $\forall z \in \mathcal{S}_x$: $p(f(z)) = \pi(z) = x$, δηλ. $f(\mathcal{S}_x) \subseteq \mathcal{T}_x$.

ΟΡΣ. Έστω $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα και $U \in \tau_X$. Μια (τοπική) τομή του $\mathcal{S}$ πάνω από το U είναι μια συνεχής $s: U \to \mathcal{S}$ με $\pi \circ s = id_U$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{S}(U)$ ή $\Gamma(U, \mathcal{S})$ το σύνολο των τομών του $\mathcal{S}$ πάνω από το $U \in \tau_X$.

ΠΡΟΤ. $(\mathcal{S}, \pi, X)$ δράγμα. Τότε:

(i) π ανοιχτή απεικόνιση

(ii) $\forall x \in X$, η σχετική τοπολογία του $\mathcal{S}_x$ είναι η διακριτή.

(iii) $U \in \tau_X$, $s \in \mathcal{S}(U) \Rightarrow s(U)$ ανοιχτό $\subseteq \mathcal{S}$ και η $s: U \to s(U)$ είναι ομοιομορφισμός

(iv) Τα ανοιχτά $V \subseteq \mathcal{S}$, όπου $\pi|_V$ ομοιομορφισμός, συμπίπτουν με τις εικόνες $s(U)$, όπου $U \in \tau_X$ και $s \in \mathcal{S}(U)$

(v) Τα σύνολα του (iv) είναι βάση της τοπολογίας του $\mathcal{S}$.

(vi) $\forall z \in \mathcal{S}$ $\exists U \in \mathcal{N}(x = \pi(z))$ και $\exists \sigma \in \mathcal{S}(U)$: $z = \sigma(x)$.

(vii) Αν $s \in \mathcal{S}(U)$, $\sigma \in \mathcal{S}(V)$, $x \in U \cap V$ και $\sigma(x) = s(x) \Rightarrow$ $\exists W \in \mathcal{N}(x)$, $W \subseteq U \cap V$: $s|_W = \sigma|_W$.

(viii) Έστω και $(\mathcal{C}, p, X)$ δράγμα και $f: \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ μορφισμός δραγμάτων $\Rightarrow$ f τοπικός ομοιομορφισμός.

(ix) Μια απεικόνιση $\phi: \mathcal{S} \to \mathcal{C}$ είναι μορφ. δραγμάτων $\Leftrightarrow$ $\forall z \in \mathcal{S}$ $\exists U \in \mathcal{N}(x = \pi(z))$ και $\exists s \in \mathcal{S}(U)$: $z = s(x)$ και $\phi \circ s \in \mathcal{C}(U)$.

Τα δράγματα πάνω από το X και οι μορφισμοί τους με την συνήθη σύνθεση αποτελούν κατηγορία που θα συμβολίζουμε με $\mathcal{S}h_X$.

Ο ΣΥΝΑΡΤΗΤΗΣ – ΤΟΜΗ

Εστω $(\mathcal{S},\pi,X) \in \mathcal{S}h_X$. Τότε το

$$\Gamma(\mathcal{S}) \equiv \left(\mathcal{S}(U),\, r^U_V\right)_{V\subseteq U\in\tau_X}$$

όπου $r^U_V : \mathcal{S}(U) \longrightarrow \mathcal{S}(V)$ ο συνήθης περιορισμός απεικονίσεων, $\forall\, V\subseteq U$, είναι πλήρες προδράγμα συνόλων.

Αν $(\mathcal{S},\pi,X)$, $(\mathcal{T},p,X) \in \mathcal{S}h_X$ και $f : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ μορφισμός δραγμάτων, ορίζεται ενας μορφισμός προδραγμάτων $\Gamma(f) : \Gamma(\mathcal{S}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{T})$, με $\Gamma(f) \equiv \left(\Gamma(f)_U\right)_{U\in\tau_X}$ και

$$\Gamma(f)_U : \mathcal{S}(U) \longrightarrow \mathcal{T}(U) : s \mapsto f\circ s.$$

Η $\left(\Gamma(f)_U\right)_{U\in\tau_X}$ προφανώς κάνει τα τετράγωνα

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{S}(U) & \xrightarrow{\Gamma(f)_U} & \mathcal{T}(U) \\
{\scriptstyle r^U_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \ell^U_V} \\
\mathcal{S}(V) & \xrightarrow[\Gamma(f)_V]{} & \mathcal{T}(V)
\end{array}$$

μεταθετικά: $\forall\, V\subseteq U\in\tau_X$ και $\forall\, s\in\mathcal{S}(U)$ είναι

$$\Gamma(f)_V \circ r^U_V(s) = \Gamma(f)_V\left(s|_V\right) = f\circ\left(s|_V\right),$$

και

$$\ell^U_V \circ \Gamma(f)_U(s) = \ell^U_V(f\circ s) = (f\circ s)|_V.$$

Οι αντιστοιχίες $(\mathcal{S},\pi,X) \rightsquigarrow \Gamma(\mathcal{S})$ και $(f:\mathcal{S}\to\mathcal{T}) \rightsquigarrow \left(\Gamma(f) : \Gamma(\mathcal{S}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{T})\right)$

ορίζουν τον συναλλοίωτο <u>συναρτητή-τομή</u>

$$\Gamma : \mathcal{Sh}_X \longrightarrow \mathcal{CoPSh}_X \subsetneq \mathcal{PSh}_X .$$

<u>Άσκ.</u> Επαληθεύστε ότι ο Γ είναι συναρτητής.

Ο ΣΥΝΑΡΤΗΤΗΣ ΔΡΑΓΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Θα προχωρήσουμε και στην αντίστροφη διαδικασία: Έστω $\mathcal{S} \equiv (\mathcal{S}(U), \rho_V^U) \in \mathcal{PSh}_X$, και $x \in X$. Περιοριζόμαστε στην οικογένεια των ανοιχτών περιοχών του x, δηλ. θεωρούμε το $(\mathcal{S}(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{N}(x)}$.

Έστω $s_1 \in \mathcal{S}(U_1)$, $s_2 \in \mathcal{S}(U_2)$. Θέτουμε

(σ.i.) $$s_1 \underset{x}{\sim} s_2 \iff \exists\, V \in \mathcal{N}(x) : V \subseteq U_1 \cap U_2 \text{ με } \rho_V^{U_1}(s_1) = \rho_V^{U_2}(s_2).$$

<u>ΠΡΟΤ.</u> Η (σ.i) είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο

$$\biguplus_{U \in \mathcal{N}(x)} \mathcal{S}(U).$$

<u>Αποδ.</u> Είναι προφανώς ανακλαστική και συμμετρική. Είναι και μεταβατική: Έστω $s_1 \in \mathcal{S}(U_1)$, $s_2 \in \mathcal{S}(U_2)$ και $s_3 \in \mathcal{S}(U_3)$ με $s_1 \underset{x}{\sim} s_2$ και $s_2 \underset{x}{\sim} s_3$. Τότε

$$\exists\, V_1 \subseteq U_1 \cap U_2,\ V_1 \in \mathcal{N}(x) : \rho_{V_1}^{U_1}(s_1) = \rho_{V_1}^{U_2}(s_2) . \quad (1)$$

και

$$\exists\, V_2 \subseteq U_2 \cap U_3,\ V_2 \in \mathcal{N}(x) : \rho_{V_2}^{U_2}(s_2) = \rho_{V_2}^{U_3}(s_3) \quad (2).$$

Θέτω $W := V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}(x)$.

$$(1) \Rightarrow \rho_W^{V_1} \circ \rho_{V_1}^{U_1}(s_1) = \rho_W^{V_1} \circ \rho_{V_1}^{U_2}(s_2) \Rightarrow \rho_W^{U_1}(s_1) = \rho_W^{U_2}(s_2)$$

$$(2) \Rightarrow \rho_W^{V_2} \circ \rho_{U_2}^{U_2}(s_2) = \rho_W^{V_2} \circ \rho_{V_2}^{U_3}(s_3) \Rightarrow \rho_W^{U_2}(s_2) = \rho_W^{U_3}(s_3).$$

Συμβολισμοί:

$$\mathcal{S}_x := \{\text{κλάσεις ισοδ. της } \underset{x}{\sim}\} = \bigsqcup_{U \in \mathcal{N}(x)} S(U) \Big/ \sim_x$$

(: νήμα πάνω από το x),

$$\mathcal{S} := \bigsqcup_{x \in X} \mathcal{S}_x$$

και με $\pi : \mathcal{S} \longrightarrow X$ την προφανή προβολή:

$$z \in \mathcal{S} \Rightarrow \exists!\, x \in X : z \in \mathcal{S}_x \Rightarrow \pi(z) := x.$$

$\forall\, U \in \tau_X,\ \forall\, s \in S(U),\ \forall\, x \in U : [s]_x \in \mathcal{S}_x.$
Θέτουμε

$$\rho^U_x : S(U) \longrightarrow \mathcal{S}_x : s \longmapsto \rho^U_x := [s]_x.$$

<u>Λήμμα:</u> $\forall\, V \subseteq U \in \mathcal{N}(x)$, το διάγραμμα είναι μεταθ:

$$\begin{tikzcd}
S(U) \arrow[rr, "\rho^U_V"] \arrow[dr, "\rho^U_x"'] & & S(V) \arrow[dl, "\rho^V_x"] \\
& \mathcal{S}_x &
\end{tikzcd}$$

<u>Απόδ.</u> Έστω $s \in S(U)$. Τότε $s \underset{x}{\sim} \rho^U_V(s)$ (: παίρνω στον ορσ. της $\underset{x}{\sim}$ $W := V$). Οπότε

$$\rho^V_x \circ \rho^U_V(s) = [\rho^U_V(s)]_x = [s]_x = \rho^U_x(s). \qquad \blacksquare$$

$\forall\, s \in S(U)$ ορίζουμε την απεικόνιση

$$\tilde{s} : U \longrightarrow \mathcal{S} : x \longmapsto \tilde{s}(x) := [s]_x = \rho^U_x(s) \in \mathcal{S}_x.$$

<u>ΘΕΩΡ.</u> Η οικογένεια $\mathbb{B} = \{\tilde{s}(U) : U \in \tau_X,\ s \in S(U)\}$ είναι βάση μιας τοπολογίας στο $\mathcal{S}$: κάθε $\tilde{s}$ είναι συνεχής και η π είναι τοπικός ομοιομορφισμός.

Απόδ. (1α) Τα σύνολα της $\mathbb{B}$ είναι κάλυψη του $\mathcal{S}$:

$z \in \mathcal{S} \Rightarrow z = [s]_x$ για κάποιο $s \in S(U)$, $U \in \mathcal{N}(x)$, $x \in X$.

$\Rightarrow z = \tilde{s}(x) \in \tilde{s}(U)$.

(1β) Ισχύει η συνθήκη:

$$\forall B_1, B_2 \in \mathbb{B}, \quad \forall p \in B_1 \cap B_2 \quad \exists B_3 \in \mathbb{B}:$$
$$p \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Πράγματι, έστω $\tilde{s}(U), \tilde{\sigma}(V) \in \mathbb{B}$, όπου $U, V \in \tau_X$ και $s \in S(U)$, $\sigma \in S(V)$. Έστω και $z \in \tilde{s}(U) \cap \tilde{\sigma}(V)$.
Τότε $x = \pi(z) \in \pi(\tilde{s}(U)) = U$ και $x \in \pi(\tilde{\sigma}(V)) = V$, δηλ $x = \pi(z) \in U \cap V$ με $\tilde{s}(x) = \tilde{\sigma}(x) = z \Rightarrow$
$[s]_x = [\sigma]_x \Rightarrow \exists\, W \in \mathcal{N}(x)$, $W \subseteq U \cap V$ με

$$\rho^U_W(s) = \rho^V_W(\sigma) =: \tau \in S(W).$$

Επειδή $s \underset{y}{\sim} \rho^U_W(s)$ και $\sigma \sim_y \rho^V_W(\sigma)$, $\forall y \in W$, παίρνουμε

$$\tilde{\tau}(W) = \tilde{s}(W) = \tilde{\sigma}(W) \subseteq \tilde{s}(U) \cap \tilde{\sigma}(V).$$

Άρα η $\mathbb{B}$ είναι βάση τοπολογίας.

(2) Η $\pi: \mathcal{S} \to X$ γίνεται τοπικός ομοιομορφισμός:
Έστω $z = [s]_x \in \mathcal{S}_x \subseteq \mathcal{S}$, όπου $s \in S(U)$, $U \in \mathcal{N}(x)$.
Τότε $z = \tilde{s}(x) \in \tilde{s}(U)$, $\tilde{s}(U) \subseteq \mathcal{S}$ ανοιχτό, $U \subseteq X$ ανοιχτό και $\pi|_{\tilde{s}(U)}: \tilde{s}(U) \to U$ 1-1, επί.
Προφανώς

$$\left(\pi|_{\tilde{s}(U)}\right)^{-1} = \tilde{s}$$

και κάθε ανοιχτό $V \subseteq U$ αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα στο ανοιχτό $\tilde{\tau}(V) \subseteq \tilde{s}(U)$, όπου $\tau = \rho^U_V(s)$.
Πράγματι:

(2α) Η π είναι συνεχής:

$\forall\, V \subseteq U$ ανοιχτό $\Rightarrow \left(\pi|_{\tilde{s}(U)}\right)^{-1}(V) = \tilde{s}(V) = \tilde{\tau}(V) \in \mathbb{B}$.

(2β) Η $\left(\pi|_{\tilde{s}(U)}\right)^{-1} = \tilde{s}$ είναι συνεχής: Έστω $A \subseteq \tilde{s}(U)$ ανοιχτό. ΘΔο $\pi(A) \subseteq U$ ανοιχτό. Έστω $x \in \pi(A)$. ΘΔο $\exists W \in \mathcal{N}(x)$ με $W \subseteq \pi(A)$.

$$x \in \pi(A) \Rightarrow x = \pi(z),\ z \in A \subseteq \tilde{s}(U) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \tilde{s}(x) \in \underbrace{A \subseteq \tilde{s}(U)}_{\text{ανοιχτά στο } \mathcal{S}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\ \tilde{\sigma}(V) \in \mathcal{B} :\ z = \tilde{s}(x) \in \tilde{\sigma}(V) \subseteq A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\sigma}(x) = z = \tilde{s}(x) \Rightarrow [\sigma]_x = [s]_x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists\ W \in \mathcal{N}(x) :\ W \subseteq U \cap V \text{ με } \rho_W^U(s) = \rho_W^V(\sigma) = \tau$$

$$\Rightarrow \tilde{s}(y) = \tilde{\sigma}(y) = \tilde{\tau}(y),\quad \forall y \in W \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{s}(W) = \tilde{\sigma}(W) = \tilde{\tau}(W) \in \mathcal{B}$$

$$\begin{array}{c} \cap \\ \tilde{\sigma}(V) \subseteq A \Rightarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow W = \pi(\tilde{\sigma}(W)) \subseteq \pi(\tilde{\sigma}(V)) = V \subseteq \pi(A). \blacksquare$$

Συμπέρασμα: $\forall\ \mathcal{S} \equiv (S(U), \rho_V^U)_{V \subseteq U \in \mathcal{T}_X} \in \mathcal{P}sh_X$, η τριάδα $(\mathcal{S} = \dot{\bigcup}_{x \in X} \mathcal{S}_x, \pi, X)$ είναι δράγμα.

Εστω τώρα $\mathcal{S} \equiv (S(U), \rho_V^U)$, $\mathcal{T} \equiv (T(U), \lambda_V^U) \in \mathcal{P}sh_X$ και $f \equiv (f_U) : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$ μορφ. προδραγμάτων. Τότε $\forall\ x \in X$ και $\forall\ V \subseteq U \in \mathcal{N}(x)$ το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & T(U) \arrow[d, "\lambda_V^U"] \\ S(V) \arrow[r, "f_V"'] & T(V) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, δηλ. η οικογένεια $(f_U)_{U \in \mathcal{N}(x)}$ είναι μορφ. επαγωγικών συστημάτων. Άρα $\exists!\ f_x : \mathcal{S}_x \longrightarrow \mathcal{T}_x$ που κάνει μετα-θετικά όλα τα τετράγωνα

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_x^U"'] & T(U) \arrow[d, "\lambda_x^U"] \\ \mathcal{S}_x \arrow[r, "f_x"'] & \mathcal{T}_x \end{tikzcd}$$

Άρα, $\forall\ [s]_x \in \mathcal{S}_x$, όπου $s \in \mathcal{S}(U)$, είναι

$$f_x([s]_x) = f_x \circ \rho_x^U(s) = \lambda_x^U \circ f_U(s) = [f_U(s)]_x .$$

Θέτουμε $\tilde{f} := \bigcup_{x\in X} f_x : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$. Τότε προφανώς είναι μεταθετικό το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & \mathcal{T} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ. Η $\tilde{f}$ είναι συνεχής ($\Rightarrow$ μορφ. δραγμάτων $\Rightarrow$ τοπ. ομοιομορφ.).

<u>Απόδ.</u> Έστω $\tilde{\tau}(U) \in \mathbb{B}_T$. Θδο $\tilde{f}^{-1}(\tilde{\tau}(U)) =$ $= \{z \in \mathcal{S} : \tilde{f}(z) \in \tilde{\tau}(U)\}$ ανοιχτό $\subseteq \mathcal{S}$.

Έστω $z = [s]_x \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{\tau}(U))$, με $s \in \mathcal{S}(V)$, $V \in \mathcal{N}(x)$. Τότε

$$\mathcal{S} \supseteq \mathcal{S}_x \ni z = [s]_x \in \tilde{f}^{-1}(\tilde{\tau}(U)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\tilde{f}(z)}_{\in \mathcal{T}_x} \in \tilde{\tau}(U) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(z) = \tilde{f}([s]_x) = [\underbrace{f_V(s)}_{\sigma \in T(V)}]_x = \tilde{\tau}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\sigma}(x) = \tilde{\tau}(x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \exists\, W \subseteq U \cap V, \quad W \in \mathcal{N}(x):$

$$\lambda^U_W(\tau) = \lambda^V_W(\sigma) = \lambda^V_W \circ f_V(s) =$$

$$= f_W \circ \rho^V_W(s) \in T(W).$$

Άρα $\forall y \in W$:

$$\tilde{\tau}(U) \ni \tilde{\tau}(y) = \widetilde{f_W \circ \rho^V_W(s)}\,(y) =$$

$$= [f_W \circ \rho^V_W(s)]_y =$$

$$= f_y([\rho^V_W(s)]_y) = f_y([s]_y) =$$

$$= f_y(\tilde{s}(y)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(\tilde{s}(W)) = \tilde{\tau}(W) \subseteq \tilde{\tau}(U) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \tilde{s}(x) \in \underbrace{\tilde{s}(W)}_{\in \mathbb{B}_{\mathcal{S}}} \subseteq \tilde{f}^{-1}(\tilde{\tau}(U)). \quad \blacksquare$$

Έτσι ορίσαμε μια αντιστοιχία $(S(U), \rho^U_V) \rightsquigarrow (\mathcal{S}, \pi, X)$ και $(f_U : S(U) \to T(U))_{U \in \tau_X} \rightsquigarrow \tilde{f} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{T}$.
Η αντιστοιχία αυτή είναι ο συναλλοίωτος <u>συναρτητής δραγματοποίησης</u>

$$\mathcal{S} : \mathcal{P}\mathcal{S}h_X \longrightarrow \mathcal{S}h_X.$$

Αποδεικνύουμε ότι ο $\mathcal{S}$ είναι συναρτητής:
(1) Αν $f = 1_S = (1_{S(U)})_{U \in \tau_X}$ τότε $\mathcal{S}(1_S) = 1_{\mathcal{S}}$.
Πράγματι ο μορφισμός επαγ. συστημάτων $(1_{S(U)})_{U \in \mathcal{N}(x)}$ έχει όριο $(1_S)_x = 1_{\mathcal{S}_x}$, $\forall x \in X$,

από το μονοσήμαντο του $(1_{\mathcal{S}})_x$, που κάνει μεταθετικά όλα τα διαγράμματα

$$\begin{tikzcd}
S(U) \arrow[r, "1_{S(U)}"] \arrow[d, "\rho_x^U"'] & S(U) \arrow[d, "\rho_x^U"] \\
\mathcal{S}_x \arrow[r, "(1_{\mathcal{S}})_x"'] & \mathcal{S}_x
\end{tikzcd}$$

(2) Αν $f \equiv (f_U : S(U) \longrightarrow T(U))_{U\in\tau_X}$ και $g \equiv (g_U : T(U) \to P(U))_{U\in\tau_X}$ μορφισμοί στην $\mathcal{P}Sh_X$, για νδο $\mathcal{S}(g\circ f) = \mathcal{S}(g)\circ\mathcal{S}(f)$ αρκεί νδο

$$(g\circ f)_x = g_x\circ f_x, \quad \forall x\in X.$$

$$\begin{tikzcd}
S(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_x^U"'] & T(U) \arrow[r, "g_U"] \arrow[d, "\lambda_x^U"] & P(U) \arrow[d, "\xi_x^U"] \\
\mathcal{S}_x \arrow[r, "f_x"'] \arrow[rr, bend right, "h_x"'] & \mathcal{T}_x \arrow[r, "g_x"'] & \mathcal{P}_x
\end{tikzcd}$$

$\exists!\ h_x : \mathcal{S}_x \longrightarrow \mathcal{P}_x$ που κάνει μεταθ. το μεγάλο διάγραμμα. Όμως από την μεταθ/τητα των μικρών, η $g_x\circ f_x$ έχει αυτή την ιδιότητα.

ΣΧΕΣΗ ΤΩΝ $\mathcal{S}$ ΚΑΙ Γ

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}h_X \arrow[r, "\Gamma"] & \mathcal{C}o\mathcal{P}Sh_X \arrow[r, "\subset"] \arrow[l, bend left, dashed, "\mathcal{S}|_{\mathcal{C}o\mathcal{P}Sh_X}"] & \mathcal{P}Sh_X \arrow[ll, bend left=60]
\end{tikzcd}$$

Ας ξεκινήσουμε με ένα $\mathcal{S} \equiv (\mathcal{S}(U), \rho_V^U) \in \mathcal{P}sh_X$,
θεωρούμε διαδοχικά την δραγματοποίηση του $\mathcal{S}(\mathcal{S}) =$
$= (\mathcal{S}, \pi, X)$ και το πλήρες προδράγμα των τομών-της
$\Gamma(\mathcal{S}(S)) = (\mathcal{S}(U), r_V^U)$.

$$(\mathcal{S}(U), \rho_V^U) \overset{\mathcal{S}}{\rightsquigarrow} (\mathcal{S}, \pi, X) \overset{\Gamma}{\rightsquigarrow} (\mathcal{S}(U), r_V^U).$$

Τα προδράγματα $\mathcal{S}$ και $\Gamma(\mathcal{S}(S))$ συνδέονται με ένα φυσικό μορφισμό $(\rho_U : \mathcal{S}(U) \longrightarrow \mathcal{S}(U))_{U \in \tau_X}$ που δίνεται από την σχέση:

$$\rho_U(s) = \tilde{s}, \quad \forall s \in \mathcal{S}(U).$$

Είναι προφανές ότι $\forall V \subseteq U \in \tau_X$ το τετράγωνο

$$\begin{tikzcd} S(U) \arrow[r, "\rho_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathcal{S}(U) \arrow[d, "r_V^U"] \\ S(V) \arrow[r, "\rho_V"'] & \mathcal{S}(V) \end{tikzcd}$$

είναι μεταθετικό, άρα (ρ_U) είναι μορφ. προδραγμ.

ΘΕΩΡΗΜΑ. $\mathcal{S}$ πλήρες $\Longleftrightarrow$ $\forall U \in \tau_X$: ρ_U 1-1 και επί.

Αποδ. (1) Εστω $\forall U \in \tau_X$ η ρ_U είναι 1-1.
Εστω και $U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ με $U, U_\alpha \in \tau_X$, $s, t \in \mathcal{S}(U)$:
$\rho_{U_\alpha}^U(s) = \rho_{U_\alpha}^U(t)$, $\forall \alpha \in A$.

Τότε, $\forall \alpha \in A$, $\forall x \in U_\alpha$, είναι

$$\tilde{s}(x) = \rho_x^U(s) = \rho_x^{U_\alpha} \circ \rho_{U_\alpha}^U(s) = \rho_x^{U_\alpha} \circ \rho_{U_\alpha}^U(t) =$$
$$= \rho_x^U(t) = \tilde{t}(x),$$

άρα, $\forall a \in A$:

$$\tilde{s}|_{U_a} = \tilde{t}|_{U_a} \Rightarrow r^{U}_{U_a}(\tilde{s}) = r^{U}_{U_a}(\tilde{t}) \xRightarrow[\text{πλήρες}]{(\Gamma(\mathcal{S}(S')))}$$

$$\Rightarrow \tilde{s} = \tilde{t} \xRightarrow[1-1]{\rho_U}$$

$$\Rightarrow s = t.$$

Άρα, όταν κάθε ρ_U είναι 1-1, το S' είναι μονο-προδράγμα.

Αντίστροφα: Εστω ότι το S' είναι μονο-προδράγμα. Εστω και $U \in \tau_X$. Θδο ρ_U 1-1. Εστω $s, t \in U$, με

$$\rho_U(s) = \rho_U(t) \Longleftrightarrow \tilde{s} = \tilde{t} \Longleftrightarrow \forall x \in U: \tilde{s}(x) = \tilde{t}(x)$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in U \ \rho^U_x(s) = [s]_x = [t]_x = \rho^U_x(t) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \forall x \in U \ \exists U_x \subseteq U: \ \rho^U_{U_x}(s) = \rho^U_{U_x}(t).$$

Αλλά τότε η $(U_x)_{x \in U}$ είναι ανοιχτή κάλυψη του U, και επειδή S' μονο-προδράγμα $\Rightarrow s = t$, άρα και ρ_U 1-1.

(2) <u>Δεν</u> μπορούμε να δείξουμε ότι η ιδιότητα (2) των πλήρων προδραγμάτων ισοδυναμεί με ρ_U επί, $\forall U \in \tau_X$.

Εστω ότι όλες οι ρ_U είναι <u>επί</u> <u>και</u> <u>1-1</u>. Εστω $U \in \tau_X$, $(U_a)_{a \in A}$ ανοιχτή κάλυψη του U και $s_a \in S'(U_a)$:

$$\rho^{U_a}_{U_a \cap U_\beta}(s_a) = \rho^{U_\beta}_{U_a \cap U_\beta}(s_\beta) \Rightarrow \tilde{s}_a|_{U_a \cap U_\beta} = \tilde{s}_\beta|_{U_a \cap U_\beta} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow[\text{πλήρες}]{\Gamma(\mathcal{S}(S'))} \exists\, \xi \in \mathcal{S}(U): \ \xi|_{U_a} = \tilde{s}_a, \ \forall a \in A.$$

Επειδή ρ_U επί $\Rightarrow \exists\ \sigma \in \mathcal{S}(U)$: $\rho_U(\sigma) = \tilde{\sigma} = \xi$.
Θδο $\forall a \in A$: $\rho^U_{U_a}(\sigma) = s_a$. Πράγματι:

$$\widetilde{\rho^U_{U_a}(\sigma)} = \tilde{\sigma}|_{U_a} = \xi|_{U_a} = \tilde{s}_a \xrightarrow[1-1]{\rho_{U_a}} \rho^U_{U_a}(\sigma) = s_a.$$

Αντίστροφα: Εστω $\mathcal{S}$ πλήρες $\Rightarrow$ ρ_U επί, $\forall U \in \tau_X$.
Εστω $U \in \tau_X$ και $\xi \in \mathcal{S}(U)$. Θα βρω $s \in \mathcal{S}(U)$: $\rho_U(s) = \xi$.

$\forall x \in U$: $\xi(x) \in \mathcal{S}_x \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ U_x \in \mathcal{N}(x)$, $\sigma_x \in \mathcal{S}(U_x)$: $\xi(x) = [\sigma_x]_x = \tilde{\sigma}_x(x)$.

$\Rightarrow \exists\ V_x \in \mathcal{N}(x)$: $\xi|_{V_x} = \tilde{\sigma}_x|_{V_x}$. (αφού ξ και $\tilde{\sigma}_x$ τομές του $\mathcal{S}$ που συμπίπτουν στο x).
$V_x \subseteq U \cap U_x$

Θέτω $s_x := \rho^{U_x}_{V_x}(\sigma_x) \in \mathcal{S}(V_x)$. Τότε οι οικογένειες (V_x), (s_x), ικανοποιούν τις υποθ. της (2) των πλήρων προδραγμάτων: Εστω $V_x \cap V_y \neq \emptyset$. Θδο

$$\underbrace{\rho^{V_x}_{V_x \cap V_y}(s_x)}_{=:t_x} = \underbrace{\rho^{V_y}_{V_x \cap V_y}(s_y)}_{t_y}.$$ Πράγματι:

$\forall z \in V_x \cap V_y$: $\tilde{s}_x(z) = \xi(z) = \tilde{s}_y(z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\ W_z \in \mathcal{N}(z)$: $W_z \subseteq V_x \cap V_y$ και $\rho^{V_x}_{W_z}(s_x) = \rho^{V_y}_{W_z}(s_y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \rho^{V_x \cap V_y}_{W_z} \circ \rho^{V_x}_{V_x \cap V_y}(s_x) = \rho^{V_x \cap V_y}_{W_z} \circ \rho^{V_y}_{V_x \cap V_y}(s_y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho^{V_x \cap V_y}_{W_z}(t_x) = \rho^{V_x \cap V_y}_{W_z}(t_y) \quad (*)$$

(W_z) είναι ανοιχτή κάλυψη του $V_x \cap V_y$ όπου ισχύει η $(*)$ $\Rightarrow t_x = t_y$. Δηλ. το ζεύγος $((V_x), (s_x))$

ικανοποιεί τις υποθέσεις της (2) των πλήρων προδρ.
Αφού το $\mathcal{S}$ είναι πλήρες $\Rightarrow \exists\ s \in \mathcal{S}(U) : \rho^U_{V_x}(s) = s_x$, $\forall x \in U \Rightarrow \forall x \in U : \tilde{s}(x) = \tilde{s}_x(x) = \xi(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho_U(s) = \xi$. ■

ΘΕΩΡΗΜΑ. Εστω $(\mathcal{S}, \pi, X) \in \mathcal{S}h_X$, και θεωρούμε την διαδικασία
$$(\mathcal{S}, \pi, X) \xrightarrow{\Gamma} \mathcal{C}o\mathcal{P}\mathcal{S}h_X \xrightarrow{\mathbf{S}} \mathbf{S} \circ \Gamma(\mathcal{S}).$$
Δείξτε ότι τα $\mathcal{S} \equiv (\mathcal{S}, \pi, X)$ και $\mathbf{S} \circ \Gamma(\mathcal{S})$ είναι ισόμορφα δράγματα.

Απόδ. Εστω $(\mathcal{S}, \pi, X) \in \mathcal{S}h_X$, $(\mathcal{S}(U), r^U_V)$ το πλήρες προδράγμα των τομών του και $\tilde{\mathcal{S}} \equiv (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\pi}, X)$ το παραγόμενο δράγμα. Ορίζουμε απεικόνιση $R : \mathcal{S} \longrightarrow \tilde{\mathcal{S}}$ 1-1 και επί:

Εστω $z \in \mathcal{S}_x$. Τότε $z = s(x)$, $s \in \mathcal{S}(U)$, $U \in \mathcal{N}(x)$. Θέτουμε $R(z) := r^U_x(s) = [s]_x \in \tilde{\mathcal{S}}_x$.

Η R είναι 1-1: Εστω $z = s(x)$, $s \in \mathcal{S}(U)$, $U \in \mathcal{N}(x)$ και $w = t(x)$, $t \in \mathcal{S}(V)$, $V \in \mathcal{N}(x)$, με $R(z) = R(w) \Rightarrow$
$\Rightarrow r^U_x(s) = r^V_x(t) \Rightarrow [s]_x = [t]_x \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists A \subseteq U \cap V,\ A \in \mathcal{N}(x) : r^U_A(s) = r^V_A(t) \Rightarrow$
$\Rightarrow s|_A = t|_A \Rightarrow s(x) = z = w = t(x)$.

Η R είναι επί: Εστω $[s]_x \in \tilde{\mathcal{S}}_x$ με $s \in \mathcal{S}(U)$, $U \in \mathcal{N}(x)$. Θέτουμε $z = s(x) \in \mathcal{S}_x$. Τότε $R(z) = [s]_x$. ■

Ασκηση Ολοκληρώστε την προηγ. απόδειξη, δείχνοντας ότι η R είναι ομοιομορφισμός.