

ΟΜΟΛΟΓΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ (ΕΑΡΙΝΟ 2021-22)
ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ (21.07.2022)

Σύμβαση: Στα παρακάτω θεωρούμε ότι όλοι οι δακτύλιοι είναι μοναδιαίοι και με τον όρο 'πρότυπο' αναφερόμαστε σε αριστερά πρότυπα.

Θέμα 1. Να δώσετε τον ορισμό του επίπεδου καθώς και τον ορισμό του ενριπτικού προτύπου πάνω από έναν δακτύλιο R .

Έστω $0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \rightarrow 0$ βραχεία ακριβής ακολουθία R -προτύπων. Εξετάστε τα ακόλουθα:

- (i) Εάν τα A και B είναι επίπεδα R -πρότυπα, ισχύει ότι το C είναι επίπεδο; Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα.
- (ii) Εάν τα B και C είναι ενριπτικά R -πρότυπα, ισχύει ότι το A είναι ενριπτικό; Αποδείξτε ή δώστε αντιπαράδειγμα.

Θέμα 2. Υπενθυμίζεται ότι μια αβελιανή ομάδα M καλείται διαιρέσιμη εάν για κάθε $m \in M$ και μη μηδενικό ακέραιο n , υπάρχει $c \in M$ έτσι ώστε $m = nc$. Να δείξετε τα ακόλουθα:

- (i) Κάθε ενριπτική αβελιανή ομάδα είναι διαιρέσιμη.
- (ii) Εάν M είναι ενριπτική αβελιανή ομάδα και T είναι μια αβελιανή ομάδα τέτοια ώστε $nT = 0$ για κάποιον θετικό ακέραιο n , τότε $M \otimes_{\mathbb{Z}} T = 0$.

Θέμα 3. (i) Να δώσετε τον ορισμό του επιμορφισμού σε μια κατηγορία και να δείξετε ότι η φυσική απεικόνιση $\phi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ είναι επιμορφισμός στην κατηγορία των δακτυλίων.

(ii) Έστω $\phi: R \rightarrow S$ ομομορφισμός δακτυλίων ο οποίος καθιστά το S προβολικό R -πρότυπο. Δείξτε ότι εάν το P είναι προβολικό R -πρότυπο τότε το $S \otimes_R P$ είναι προβολικό S -πρότυπο.

Θέμα 4. (i) Έστω A αβελιανή ομάδα όπου κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη. Να δείξετε ότι υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων:

$$A \cong \text{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

(ii) Έστω R δακτύλιος και $r \in R$ το οποίο δεν είναι διαίρετος του μηδενός. Δείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων:

$$\text{Ext}_R^1(R/(r), M) \cong M/rM.$$

Θέμα 5. Έστω \mathcal{C} κατηγορία. Ένα αντικείμενο A της \mathcal{C} καλείται *αρχικό* εάν έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

Για κάθε αντικείμενο D της \mathcal{C} υπάρχει μοναδικός μορφισμός από το A στο D .

- (i) Αποδείξτε ότι ένα αρχικό αντικείμενο της \mathcal{C} , εάν υπάρχει, είναι μοναδικό ως προς μοναδικό ισομορφισμό (δηλαδή, κάθε δύο αντικείμενα που ικανοποιούν την παραπάνω ιδιότητα είναι ισόμορφα μέσω μοναδικού ισομορφισμού).
- (ii) Δώστε τον ορισμό του ορίου ενός συναρτητή $F: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$. Δείξτε ότι εάν το A είναι αρχικό αντικείμενο της κατηγορίας \mathcal{C} τότε είναι και όριο του ταυτοτικού συναρτητή $\text{id}_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.

Καλή Επιτυχία!