Ομολογικη αλγεβρα και κατηγοριες (Εαρινο 2021-22)
Φυλλαδιο Ασκησεων 1
καταληκτικη ημερομηνια υποβολης: 22.03.2022

Άσκηση 1. Έστω ακέραιος $n \geqslant 2$. Να δείξετε ότι μια αβελιανή ομάδα M επιδέχεται δομή $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$–προτύπου αν και μόνο αν $nM = 0$.

Άσκηση 2. Έστω $(M, +)$ αβελιανή ομάδα και R δακτύλιος. Να δείξετε ότι υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ απεικονίσεων (συνόλων) $R \times M \to M$ που πληρούν τα αξιώματα των R–προτύπων (M1)–(M4) και ομομορφισμών δακτυλίων $R \to \operatorname{End}_{\mathbb{Z}}(M)$.

Άσκηση 3. Έστω θετικοί ακέραιοι m, n. Να δείξετε ότι υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$$

αν και μόνο αν οι m και n είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Άσκηση 4. Εξετάστε εάν το $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ είναι προβολικό εάν ιδωθεί ως:

(i) $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$–πρότυπο.
(ii) $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$–πρότυπο.
(iii) $\mathbb{Z}$–πρότυπο.

Άσκηση 5. Έστω $\{M_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια R–προτύπων και X ένα R–πρότυπο. Να δείξετε τα ακόλουθα:

(i) Εάν $\{\phi_i \colon X \to M_i \mid i \in I\}$ είναι μια οικογένεια R-γραμμικών απεικονίσεων, τότε υπάρχει *μοναδική* R-γραμμική απεικόνιση

$$u \colon X \to \prod_{i\in I} M_i$$

τέτοια ώστε για κάθε i στο I να έχουμε $\phi_i = \pi_i \circ u$, όπου $\pi_i \colon \prod_{i\in I} M_i \to M_i$ είναι η απεικόνιση προβολής, $\pi_i\left(\{m_i\}_{i\in I}\right) = m_i$.

(ii) Υπάρχει ισομορφισμός αβελιανών ομάδων

$$\operatorname{Hom}_R(X, \prod_{i\in I} M_i) \cong \prod_{i\in I} \operatorname{Hom}_R(X, M_i).$$

(iii) Το R–πρότυπο $\displaystyle\prod_{i\in I} M_i$ είναι ενριπτικό αν και μόνο αν για κάθε i στο I το M_i είναι ενριπτικό.

Άσκηση 6. Έστω R δακτύλιος και e ένα μη μηδενικό στοιχείο του R για το οποίο ισχύει $e^2 = e$.

(i) Να δείξετε ότι το Re είναι προβολικό R–πρότυπο. (Υπόδειξη: δείξτε ότι το Re είναι ευθύς προσθετέος του R).

(ii) Θεωρούμε ένα σώμα k και τον δακτύλιο

$$R := \begin{pmatrix} k & 0 \\ k & k \end{pmatrix}$$

Να δείξετε ότι οι στήλες $\binom{k}{k}$ και $\binom{0}{k}$ είναι προβολικά R–πρότυπα τα οποία δεν είναι ελεύθερα.

Άσκηση 7. Έστω R δακτύλιος. Δίνονται R–πρότυπα και ομομορφισμοί

$$A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C$$

(χωρίς να υποθέτουμε καμία συνθήκη ακρίβειας). Υποθέτουμε ότι *για κάθε* R–πρότυπο X η ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(X, A) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Hom}_R(X, B) \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Hom}_R(X, C)$$

είναι ακριβής. Να δείξετε ότι η ακολουθία

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C$$

είναι ακριβής. Εάν επιπλέον υποθέσουμε ότι για κάθε R–πρότυπο X ο ομομορφισμός $\pi_*\colon \mathrm{Hom}_R(X, B) \to \mathrm{Hom}_R(X, C)$ είναι επί, να δείξετε ότι $B \cong A \oplus C$.