Ομολογικη αλγεβρα και κατηγοριες (Εαρινο 2021-22)
Φυλλαδιο Ασκησεων 2
καταληκτικη ημερομηνια υποβολης: 06.05.2022

Άσκηση 1. Έστω Ring η κατηγορία των δακτυλίων και των ομομορφισμών μεταξύ τους και Group η κατηγορία των ομάδων και των ομομορφισμών μεταξύ τους. Για κάθε ομάδα G, συμβολίζουμε με $\mathbb{Z}[G]$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων τυπικών αθροισμάτων $\sum_{g \in G} \lambda_g g$, όπου $\lambda_g \in \mathbb{Z}$. Θεωρήστε δεδομένο ότι το $\mathbb{Z}[G]$ γίνεται δακτύλιος με πράξη πολλαπλασιαμού

$$\left(\sum_{g \in G} \lambda_g g \right) \cdot \left(\sum_{g' \in G} \lambda'_{g'} g' \right) := \sum_{g, g' \in G} (\lambda_g \lambda'_{g'}) g g'.$$

Να δείξετε τα ακόλουθα:

(i) Η αντιστοίχιση $G \mapsto \mathbb{Z}[G]$ ορίζει συναρτητή $\mathbb{Z}[-] \colon \mathrm{Group} \to \mathrm{Ring}$. Στην αντίθετη κατεύθυνση, η αντιστοίχιση

$$R \mapsto U(R) := \{ r \in R \,|\, r \text{ αντιστρέψιμο στοιχείο του } R \}$$

ορίζει συναρτητή $U \colon \mathrm{Ring} \to \mathrm{Group}$.

(ii) Για κάθε ομάδα G, δακτύλιο R και ομομορφισμό ομάδων $f \colon G \to U(R)$, υπάρχει μοναδικός ομομορφισμός δακτυλίων $\phi \colon \mathbb{Z}[G] \to R$ έτσι ώστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & U(R) \\ U(\mathbb{Z}[G]) \arrow[ur, "U(\phi)"'] & \end{tikzcd}$$

όπου $\eta(g) := 1_{\mathbb{Z}} \cdot g$ για $g \in G$, να είναι μεταθετικό στην κατηγορία των ομάδων.

(iii) Το ζεύγος $\mathbb{Z}[-] \colon \mathrm{Group} \rightleftarrows \mathrm{Ring} \colon U$ είναι ζεύγος προσαρτημένων συναρτητών, όπου $\mathbb{Z}[-]$ ο αριστερά προσαρτημένος.

(iv) Έστω M ένα (αριστερό) $\mathbb{Z}[G]$–πρότυπο. Η αντιστοίχιση

$$M \mapsto M^G := \{ m \in M \,|\, \forall g \in G \;\; g \cdot m = m \}$$

ορίζει συναρτητή $(-)^G \colon \mathbb{Z}[G]-\mathrm{Mod} \to \mathrm{Ab}$.

(v) Θεωρήστε το $\mathbb{Z}$ ως $\mathbb{Z}[G]$–πρότυπο με την 'τετριμμένη' δράση, δηλαδή για κάθε $x = \sum_{g \in G} \lambda_g g$ και z ακέραιο, $x \cdot z := z$. Αποδείξτε ότι υπάρχει φυσικός ισομορφισμός $(-)^G \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, -)$. Συμπεράνετε ότι ο συναρτητής των σταθερών σημείων $(-)^G$ είναι αριστερά ακριβής.

Άσκηση 2. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος. Δείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός δακτυλίων $R[x] \otimes_R R[y] \cong R[x, y]$.

Άσκηση 3. Έστω CRing η κατηγορία των μεταθετικών δακτυλίων και των ομομορφισμών μεταξύ τους. Δείξτε ότι η αντιστοίχιση $R \mapsto \mathrm{Spec}(R) := \{ \mathfrak{p} \,|\, \mathfrak{p} \text{ πρώτο ιδεώδες του } R \}$ ορίζει έναν ανταλλοίωτο συναρτητή $\mathrm{Spec}(-)$ από την CRing στην κατηγορία των συνόλων (προσέξτε ότι πρέπει ο συναρτητής αυτός να αντιστρέφει τα βέλη).

Άσκηση 4. Έστω $\mathcal{C}$ κατηγορία και $f\colon X \to X'$ ένας μορφισμός στην $\mathcal{C}$. Δείξτε ότι ο f είναι μονομορφισμός αν και μόνο αν το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] \arrow[d, "\mathrm{id}_X"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"] & X' \end{tikzcd}$$

είναι διάγραμμα εφέλκυσης. Διατυπώστε και αποδείξτε τη δυϊκή πρόταση.

Άσκηση 5. Θεωρούμε το $\mathbb{N}$ με τη φυσική του διάταξη ως κατηγορία και έναν συναρτητή $X : \mathbb{N} \to \mathrm{Ab}$, ή ισοδύναμα, εάν προτιμάτε, θεωρούμε μια ακολουθία αβελιανών ομάδων και ομομορφισμών:

$$X_0 \xrightarrow{f_0} X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_3} X_3 \to \cdots .$$

Θεωρούμε επίσης τον ομομορφισμό $s\colon \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i \to \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i$,

$$s(x_0, x_1, x_2, \cdots) := (0, f_0(x_0), f_1(x_1), f_2(x_2), \cdots),$$

και θέτουμε $\tau := \mathrm{id} - s$, όπου id η ταυτοτική απεικόνιση του $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i$.

Να δείξετε τα ακόλουθα:

(i) Υπάρχει βραχεία ακριβής ακολουθία αβελιανών ομάδων

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i \xrightarrow{\ \tau\ } \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} X_i \longrightarrow \mathrm{coker}(\tau) \longrightarrow 0.$$

(ii) $\mathrm{colim}_{\mathbb{N}} X \cong \mathrm{coker}(\tau)$.