Ομολογικη αλγεβρα και κατηγοριες (Εαρινο 2021-22)
Φυλλαδιο Ασκησεων 3
καταληκτικη ημερομηνια υποβολης: 21.06.2022 (Ημερα εξετασης)

Άσκηση 1. Έστω R μεταθετικός δακτύλιος και a, b δύο στοιχεία του R για τα οποία ισχύει ότι το a δεν είναι διαιρέτης του μηδενός στον R και το $b + aR$ δεν είναι διαιρέτης του μηδενός στον R/aR. Δείξτε ότι το αλυσωτό σύμπλεγμα

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{d_2} R \oplus R \xrightarrow{d_1} R \xrightarrow{\pi} R/(a, b) \longrightarrow 0$$

όπου π είναι η κανονική απεικόνιση προβολής, $d_1 := (a \ \ b)$ και $d_2 := \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ είναι προβολική επίλυση του $R/(a, b)$ πάνω από τον R.

Άσκηση 2. Έστω R δακτύλιος. Δίνεται ακριβές αλυσωτό σύμπλεγμα προβολικών R–προτύπων,

$$P := \ \cdots \xrightarrow{\partial_3^P} P_2 \xrightarrow{\partial_2^P} P_1 \xrightarrow{\partial_1^P} P_0 \to 0.$$

Να δείξετε (κατά προτίμηση με επαγωγή) ότι $\mathrm{id}_P \sim 0$, όπου με $\sim$ συμβολίζουμε τη σχέση ομοτοπίας μεταξύ μορφισμών συμπλεγμάτων.

Υπόδειξη: Για το επαγωγικό βήμα, έαν για $i < n$ έχουν κατασκευαστεί οι διαγώνιες απεικονίσεις $\delta_i \colon P_i \to P_{i+1}$ όπως στον ορισμό της ομοτοπίας, θεωρήστε το διάγραμμα

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^P"] \arrow[d, equal] & P_n \arrow[r, "\partial_n^P"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, dashed, "?"'] & P_{n-1} \arrow[d, equal] \arrow[dl, "\delta_{n-1}"'] \\
P_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}^P"] & P_n \arrow[r, "\partial_n^P"] & P_{n-1}
\end{tikzcd}$$

και δείξτε αρχικά ότι $\partial_n^P(\mathrm{id}_{\mathrm{P_n}} - \delta_{n-1} \circ \partial_n^P) = 0$ χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση.

Άσκηση 3. Έστω R δακτύλιος και $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ βραχεία ακριβής ακολουθία R–προτύπων.

(i) Έστω ότι το C είναι επίπεδο. Να δείξετε ότι το A είναι επίπεδο αν και μόνο αν το B είναι επίπεδο.
(ii) Έστω ότι το C είναι προβολικό. Να δείξετε ότι το A είναι προβολικό αν και μόνο αν το B είναι προβολικό.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε κατάλληλα την μακρά ακριβή ακολουθία των $\mathrm{Tor}_*^R(-,-)$ και $\mathrm{Ext}_R^*(-,-)$ για να απαντήσετε τα (i) και (ii) αντιστοίχως.

Άσκηση 4. Έστω R δακτύλιος και I, J ιδεώδη του R. Δείξτε ότι υπάρχουν ισομορφισμοί:

(i) $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/J) \cong (I \cap J)/IJ$.
(ii) Για κάθε $i > 1$, $\mathrm{Tor}_i^R(R/I, R/J) \cong \mathrm{Tor}_{i-1}^R(I, R/J)$.

Άσκηση 5. Έστω A αβελιανή ομάδα όπου κάθε στοιχείο της έχει πεπερασμένη τάξη. Δείξτε ότι υπάρχει ισομορφισμός $A \cong \mathrm{Tor}_1^R(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.