Επίπεδο και Χώρος

Σημειώσεις μαθήματος ΜΕΜ100

Αναλυτική Γεωμετρία και Μιγαδικοί Αριθμοί

Χρήστος Κουρουνιώτης

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ και
ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

2019

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Ένα γεωμετρικό σχήμα στο επίπεδο είναι ένα σύνολο από σημεία του επιπέδου. Τα πιο απλά σχήματα είναι τα σημεία και οι ευθείες. Τα σημεία και οι ευθείες του ευκλείδειου επιπέδου ικανοποιούν κάποιες ιδιότητες, τα αξιώματα του ευκλείδειου επιπέδου, τα οποία διατυπώθηκαν από τον Ευκλείδη, και σε σύγχρονη μαθηματική γλώσσα από τον Hilbert. Όλα τα θεωρήματα της ευκλείδειας γεωμετρίας απορρέουν από αυτά τα αξιώματα.

Σε αυτό το μάθημα θα μελετήσουμε τη γεωμετρία σχημάτων του επιπέδου και του χώρου χρησιμοποιώντας τις μεθόδους της Αναλυτικής Γεωμετρίας. Θα αντιστοιχίσουμε τα σημεία του επιπέδου σε σύνολα αριθμών, και θα χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές σχέσεις μεταξύ αυτών των αριθμών για να περιγράψουμε τα σχήματα. Αρχική έννοια σε αυτή τη διαδικασία θα είναι η έννοια του γεωμετρικού διανύσματος.

Στα δύο πρώτα κεφάλαια των σημειώσεων θα εξετάσουμε τα διανύσματα στο επίπεδο και στο χώρο, και θα τα χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε ευθείες στο επίπεδο και επίπεδα ή ευθείες στο χώρο. Στα τελευταία κεφάλαια των σημειώσεων θα επανέλθουμε για να μελετήσουμε καμπύλες στο επίπεδο και επιφάνειες στο χώρο. Ενδιάμεσα, στο κεφάλαιο 3, θα εισαγάγουμε τους μιγαδικούς αριθμούς, που αποτελούν ένα ισχυρό εργαλείο για τη μελέτη της γεωμετρίας του επιπέδου. Θα εξετάσουμε τις βασικές ιδιότητες των μιγαδικών αριθμών και θα τους χρησιμοποιήσουμε για να μελετήσουμε σχήματα και μετασχηματισμούς του επιπέδου.

Αυτές οι σημειώσεις αποτελούν απαραίτητο συμπλήρωμα των διαλέξεων του μαθήματος ΜΕΜ100 Αναλυτική Γεωμετρία και Μιγαδικοί Αριθμοί που διδάσκεται στο Τμήμα Μαθηματικών και Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης.

Οι σημειώσεις κάθε διάλεξης περιλαμβάνουν Δραστηριότητες, οι οποίες στοχεύουν στην καλύτερη κατανόηση των εννοιών και των τεχνικών που αναφέρονται στη διάλεξη. Γι' αυτό είναι απαραίτητο ο φοιτητής ή η φοιτήτρια να αφιερώνει λίγο χρόνο, το συντομότερο δυνατό μετά από κάθε διάλεξη, για να διαβάσει τις σημειώσεις της διάλεξης και να εκτελέσει τις αντίστοιχες δραστηριότητες.

Οι σημειώσεις συμπληρώνονται από ασκήσεις μετά τις διαλέξεις και στο τέλος κάθε κεφαλαίου. Αυτές δίδουν την ευκαιρία για καλύτερη κατανόηση και περαιτέρω διερεύνηση του περιεχομένου των διαλέξεων, καθώς και για επανάληψη πριν την περίοδο των εξετάσεων.

Κεφάλαιο 1

Γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο

Σε αυτό το κεφάλιο ορίζουμε τα γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο και τις πράξεις μεταξύ τους. Εξετάζουμε μία θεμελιώδη ιδιότητα της ευκλείδειας γεωμετρίας, τη δυνατότητα παράλληλης μεταφοράς, που μας επιτρέπει να ορίσουμε ελεύθερα διανύσματα, ανεξάρτητα από κάποιο σημείο εφαρμογής. Στη συνέχεια περιγράφουμε πώς η επιλογή ενός συστήματος αναφοράς ορίζει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του επιπέδου και διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών. Έτσι μπορούμε να περιγράψουμε γεωμετρικά σχήματα μέσω συνόλων τέτοιων ζευγών, και να μελετήσουμε τις ιδιότητές τους χρησιμοποιώντας αλγεβρικές μεθόδους. Εφαρμόζουμε αυτή τη διαδικασία στη μελέτη ευθειών και άλλων σχημάτων στο επίπεδο.

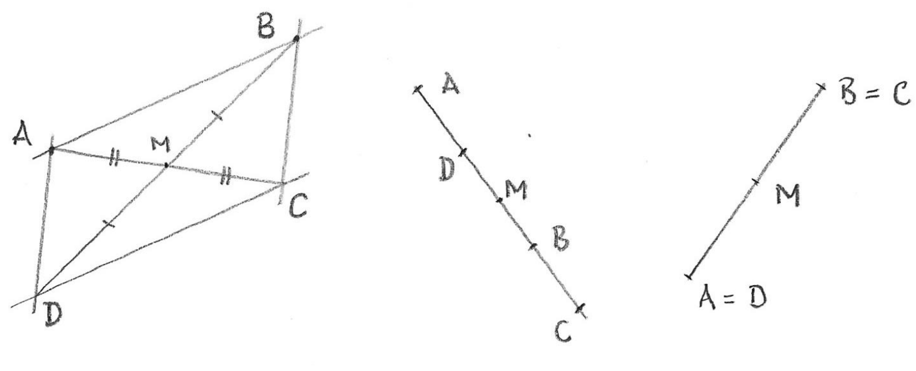
Εβδομάδα 1

1.1 Παραλληλόγραμμα στο ευκλείδειο επίπεδο

Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία του Λυκείου γνωρίζουμε οτι ένα παραλληλόγραμμο $ABCD$ είναι ένα σχήμα που αποτελείται από τέσσερα σημεία A, B, C, D και τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA, τέτοια ώστε η ευθεία AB είναι παράλληλη προς την ευθεία DC και η ευθεία BC είναι παράλληλη προς την ευθεία AD. Γνωρίζουμε επίσης οτι $ABCD$ είναι παραλληλόγραμμο εάν και μόνον εάν οι διαγώνιες AC και BD διχοτομούνται.

Σε αυτό το μάθημα θα χρησιμοποιήσουμε ως ορισμό ενός παραλληλογράμμου αυτή την ιδιότητα. Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε ταυτόχρονα την περίπτωση που τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA βρίσκονται σε διαφορετικές παράλληλες ευθείες (γνήσιο παραλληλόγραμμο) καθώς και τις *εκφυλισμένες* περιπτώσεις όπου τα τέσσερα σημεία βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Ορισμός 1.1. Ένα σχήμα που αποτελείται από τέσσερα σημεία A, B, C, D και τα τμήματα των ευθειών AB, BC, CD και DA που τα συνδέουν, ονομάζεται **παραλληλόγραμμο** εάν το μέσο M του διαστήματος AC συμπίπτει με το μέσο του BD, (Σχήμα 1.1). Αυτό το παραλληλόγραμμο το συμβολίζουμε $ABCD$. Τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA είναι οι πλευρές του παραλληλογράμμου $ABCD$, ενώ τα σημεία A, B, C, D είναι οι κορυφές του παραλληλογράμμου $ABCD$.



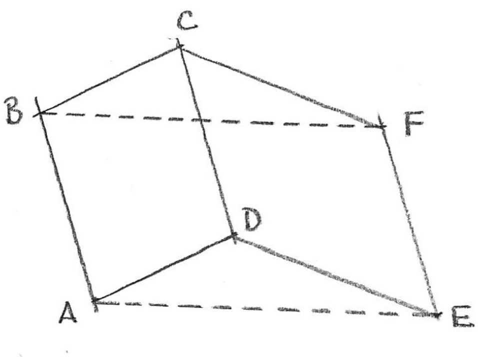
Σχήμα 1.1: Παραλληλόγραμμα.

Τα σύμβολα $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$, $DABC$, $ADCB$, $DCBA$, $CBAD$ και $BADC$ δηλώνουν όλα το ίδιο παραλληλόγραμμο, με διαγωνίους AC και BD. Παρατηρήστε οτι το $ABCD$ και το $ABDC$ είναι και τα δύο παραλληλόγραμμα μόνον όταν $A = B$ και $C = D$.

Δραστηριότητα 1.1 Σημειώστε τρία σημεία στο επίπεδο, A, B, C που να μην βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Πόσα διαφορετικά παραλληλόγραμμα μπορείτε να σχεδιάσετε που να έχουν τα σημεία A, B, C ως τρεις από τις κορυφές τους (όχι υποχρεωτικά με αυτή τη σειρά); Προσπαθήστε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ορισμό.

Από αυτόν τον ορισμό μπορούμε να αποδείξουμε όλες τις γνωστές ιδιότητες των παραλληλογράμμων. Θα χρησιμοποιήσουμε χωρίς απόδειξη το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 1.1 *Εάν τα σχήματα $ABCD$ και $CDEF$ είναι παραλληλόγραμμα, τότε παραλληλόγραμμο είναι και το σχήμα $ABFE$.*



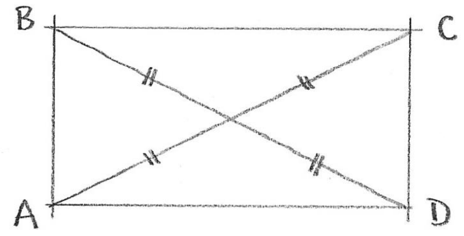
Σχήμα 1.2: Πρόταση 1.1.

Θα ορίσουμε επίσης το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Αυτό θα μας επιτρέπει να μιλήσουμε για ευθείες που τέμνονται κάθετα, πριν δώσουμε το γενικό ορισμό της γωνίας μεταξύ δύο ευθειών.

Ορισμός 1.2. Ένα παραλληλόγραμμο $ABCD$ ονομάζεται **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** εάν το μήκος της διαγωνίου AC είναι ίσο με το μήκος της διαγωνίου BD. Σε ένα μη εκφυλισμένο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, οι ευθείες που περιέχουν τις πλευρές AB και AD λέμε οτι είναι **κάθετες** ή οτι σχηματίζουν **ορθή γωνία**.

Δραστηριότητα 1.2 Πότε είναι ένα εκφυλισμένο παραλληλόγραμμο ''ορθογώνιο'' σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό; Μπορούμε σε αυτή την περίπτωση να μιλήσουμε για κάθετες ευθείες;

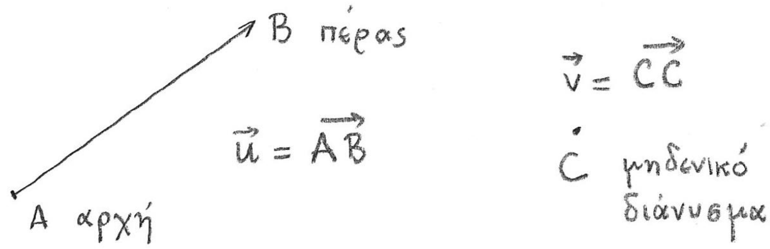
Δραστηριότητα 1.3 Σχεδιάστε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ABCD$. Είναι κάποιο από τα άλλα παραληλλόγραμμα με κορυφές A, B, C (όπως στη Δραστηριότητα 1.1) ορθογώνιο;



Σχήμα 1.3: Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

1.2 Γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο.

Ένα **γεωμετρικό διάνυσμα** είναι ένα βέλος, ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στο οποίο διακρίνουμε τα δύο άκρα, και ονομάζουμε το ένα **αρχή** και το άλλο **πέρας**, (Σχήμα 1.4). Θεωρούμε επίσης **μηδενικά διανύσματα**, στα οποία η αρχή και το πέρας συμπίπτουν. Χρησιμοποιούμε γράμματα του λατινικού αλφαβήτου επιγραμμισμένα με βέλος για να συμβολίσουμε διανύσματα: $\vec{u}$, $\vec{v}$, ...



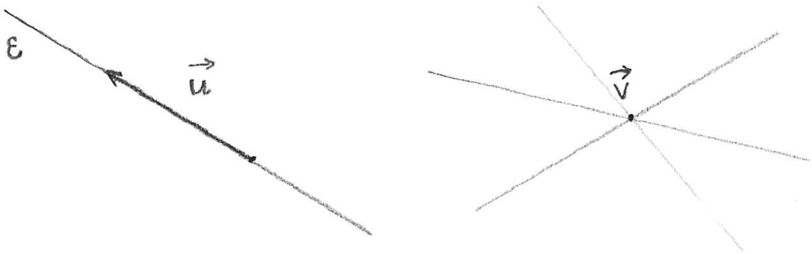
Σχήμα 1.4: Διανύσματα.

Αρχικά θα εξετάσουμε γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο, δηλαδή βέλη που εφάπτονται στην επιφάνεια ενός επιπέδου. Το σημείο του επιπέδου στο οποίο βρίσκεται η αρχή του διανύσματος το ονομάζουμε **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος. (Τα γεωμετρικά διανύσματα ονομάζονται επίσης *εφαρμοστά* διανύσματα, ή *εφαπτόμενα* διανύσματα).

Εάν η αρχή του γεωμετρικού διανύσματος $\vec{u}$ βρίσκεται στο σημείο A και το πέρας του βρίσκεται στο σημείο B του επιπέδου, συμβολίζουμε εναλλακτικά το διάνυσμα με $\overrightarrow{AB}$. Το μηδενικό διάνυσμα με σημείο εφαρμογής το A, το συμβολίζουμε $\overrightarrow{AA}$. Προσέξτε οτι έχουμε ένα διαφορετικό μηδενικό γεωμετρικό διάνυσμα σε κάθε σημείο του επιπέδου.

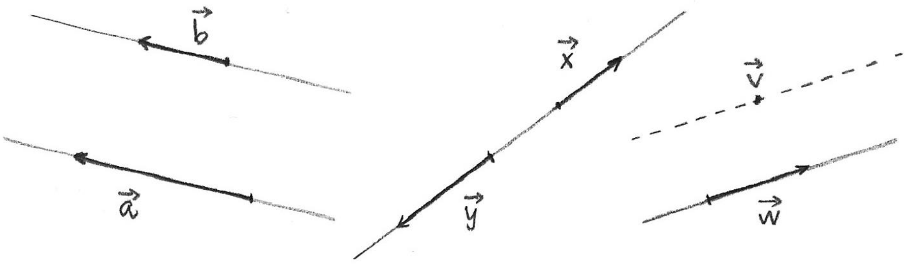
Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ ονομάζουμε **μέτρο** (ή **μήκος**) του διανύσματος $\vec{u}$ την απόσταση μεταξύ των άκρων του ευθύγραμμου τμήματος AB. Το μέτρο του $\vec{u}$ συμβολίζεται $|\vec{u}|$:

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= |AB| \\ &= \text{απόσταση από το } A \text{ στο } B. \end{aligned}$$



Σχήμα 1.5: Φορέας διανύσματος.

Εάν $\vec{u}$ δεν είναι μηδενικό διάνυσμα, τότε υπάρχει μοναδική ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται το $\vec{u}$, η οποία ονομάζεται **φορέας** του $\vec{u}$, (Σχήμα 1.5). Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το σημείο εφαρμογής του.



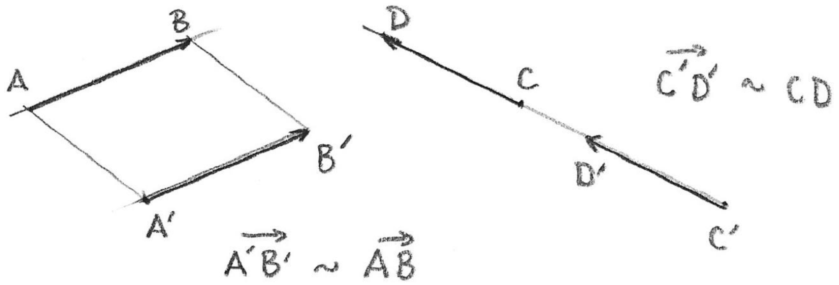
Σχήμα 1.6: Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα.

Δύο διανύσματα που έχουν το ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, ονομάζονται **παράλληλα** ή **συγγραμμικά,** (Σχήμα 1.6). Προσέξτε οτι δεν διακρίνουμε τις δύο περιπτώσεις, και ο όρος συγγραμμικά χρησιμοποιείται τόσο όταν τα διανύσματα βρίσκονται στην ίδια ευθεία όσο και όταν βρίσκονται σε παράλληλες ευθείες. Παρατηρούμε οτι ένα μηδενικό διάνυσμα είναι παράλληλο προς οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου. Όταν δύο διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ είναι παράλληλα λέμε οτι έχουν την **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

1.3 Παράλληλη μεταφορά

Μία σημαντική ιδιότητα των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο είναι οτι μπορούμε να τα μεταφέρουμε παράλληλα. Η διαισθητική έννοια είναι οτι μετακινούμε το διάνυσμα σε ένα άλλο σημείο εφαρμογής, χωρίς να το περιστρέψουμε.

Ορισμός 1.3. Θεωρούμε το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, και ένα σημείο A' του επιπέδου, (Σχήμα 1.7). Λέμε οτι το διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ προκύπτει με **παράλληλη μεταφορά** του $\overrightarrow{AB}$ στο A', εάν το σημείο B' είναι τέτοιο ώστε $ABB'A'$ είναι παραλληλόγραμμο.
Εάν το διάνυσμα $\overrightarrow{CD}$ προκύπτει από το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με παράλληλη μεταφορά, λέμε οτι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ είναι **ισοδύναμα**, και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$. Όλα τα μηδενικά διανύσματα είναι ισοδύναμα μεταξύ τους.



Σχήμα 1.7: Παράλληλη μεταφορά διανυσμάτων.

Παρατηρήστε οτι εάν το A' βρίσκεται στο φορέα του $\overrightarrow{AB}$, τότε το παραλληλόγραμμο $ABB'A'$ είναι εκφυλισμένο και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A'B'}$ έχουν τον ίδιο φορέα.

Μία απλή αλλά σημαντική συνέπεια της Πρότασης 1.1 είναι οτι εάν δύο διανύσματα είναι ισοδύναμα με ένα τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα. Πιο συγκεκριμένα:

Λήμμα 1.2 *Εάν το διάνυσμα $\vec{u}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά από το $\vec{v}$, και το $\vec{w}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά από το $\vec{u}$, τότε το $\vec{w}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά από το $\vec{v}$,*

$$\vec{v} \sim \vec{u} \text{ και } \vec{u} \sim \vec{w} \Longrightarrow \vec{v} \sim \vec{w}\,.$$

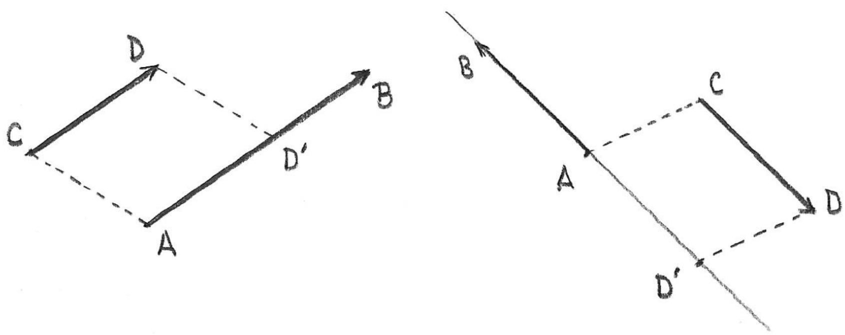
Δραστηριότητα 1.4 Σημειώστε τέσσερα τυχαία σημεία A, B, C, D στο επίπεδο (λέγοντας 'τυχαία' εδώ εννοούμε οτι είναι όλα διαφορετικά, και τα διανύσματα που σχηματίζονται με αρχή σε ένα από τα 4 σημεία και πέρας σε ένα άλλο από αυτά δεν είναι παράλληλα και έχουν όλα διαφορετικά μέτρα).

α'. Καταγράψτε όλα (τα 16) διαφορετικά διανύσματα με άκρα στα σημεία A, B, C, D.

β'. Σχεδιάστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και το διάνυσμα $\overrightarrow{CE}$ που είναι ισοδύναμο με το $\overrightarrow{AB}$. Σχεδιάστε και το $\overrightarrow{DF} \sim \overrightarrow{AC}$.

1.4 Ομόρροπα διανύσματα

Ένα μη μηδενικό διάνυσμα καθορίζει μία *φορά*, έναν *προσανατολισμό*, πάνω στο φορέα του.



Σχήμα 1.8: Ομόρροπα και αντίρροπα διανύσματα.

Ορισμός 1.4. Θεωρούμε δύο μη μηδενικά παράλληλα διανύσματα, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ και μεταφέρουμε παράλληλα το $\overrightarrow{CD}$ στο $\overrightarrow{AD'}$, (Σχήμα 1.8).

α'. Εάν το σημείο D' βρίσκεται στην ημιευθεία από το A που περιέχει το B, λέμε οτι τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι **ομόρροπα**, ή οτι **έχουν την ίδια φορά**

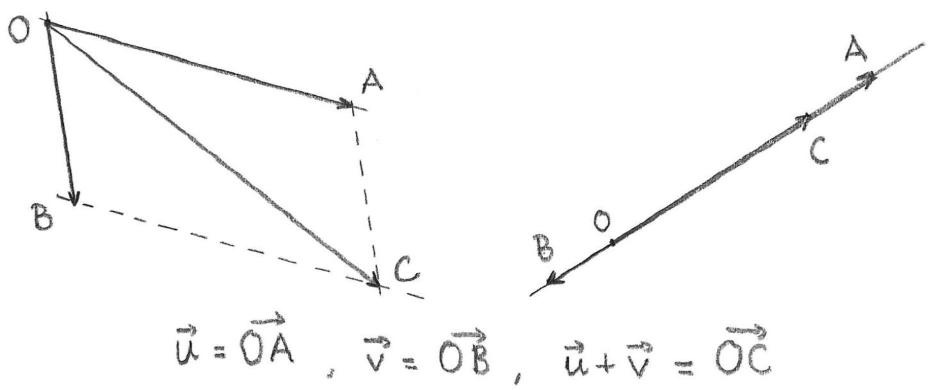
β'. Εάν το σημείο D' δεν βρίσκεται στην ημιευθεία από το A που περιέχει το B, λέμε οτι τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι **αντίρροπα**, ή οτι **έχουν αντίθετη φορά**

Δραστηριότητα 1.5 Σχεδιάστε ένα (γνήσιο) παραλληλόγραμμο $ABCD$ και καταγράψτε τα 12 μη μηδενικά διανύσματα με άκρα στις κορυφές του παραλληλογράμμου. Βρείτε δύο ζεύγη τέτοιων διανυσμάτων που είναι παράλληλα και ομόρροπα. Βρείτε δύο ζεύγη τέτοιων διανυσμάτων που είναι παράλληλα και αντίρροπα.

1.5 Πράξεις με διανύσματα

Σε αυτήν και τις επόμενες παραγράφους θα δούμε πώς μπορούμε να ορίσουμε πράξεις με διανύσματα. Ο κανόνας του παραλληλόγραμμου για τη σύνθεση δύο κινήσεων ή δύο δυνάμεων είναι γνωστός από την αρχαιότητα. Δίδει μια χρήσιμη πράξη στο σύνολο των γεωμετρικών διανυσμάτων με το ίδιο σημείο εφαρμογής.

Αρχικά θα ορίσουμε τις πράξεις μόνο για διανύσματα με το ίδιο σημείο εφαρμογής, (προσθέτουμε 'ομοειδή' αντικείμενα), ενώ αργότερα θα δούμε πώς να αποτινάξουμε αυτόν τον περιορισμό. Θεωρούμε λοιπόν ένα σημείο O του επιπέδου, και περιοριζόμαστε σε γεωμετρικά διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O.



Σχήμα 1.9: Άθροισμα διανυσμάτων.

Ορισμός 1.5. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ είναι διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O, ορίζουμε το **άθροισμα** $\vec{u} + \vec{v}$ να είναι το γεωμετρικό διάνυσμα με αρχή στο O και πέρας στο σημείο C για το οποίο $OACB$ είναι παραλληλόγραμμο, (Σχήμα 1.9).

Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ είναι συγγραμμικά, τότε το σημείο C για το οποίο $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OC}$, προσδιορίζεται και από τις σχέσεις $|AC| = |OB|$ και $|BC| = |OA|$.

Δραστηριότητα 1.6 Σχεδιάστε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και θεωρήστε D, D', ... τις κορυφές των παραλληλογράμμων που βρήκατε στη Δραστηριότητα 1.1. Για κάθε ένα από αυτά τα παραλληλόγραμμα γράψτε το άθροισμα των δύο διανυσμάτων που αντιστοιχούν στις πλευρές του παραλληλογράμμου που έχουν κοινή αρχή στο σημείο A. Για παράδειγμα, εάν $ABCD$ είναι ένα από τα παραλληλόγραμμα, το αντίστοιχο άθροισμα είναι $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Παρατηρούμε οτι το άθροισμα $\vec{u} + \vec{u}$ έχει το ίδιο σημείο εφαρμογής και την ίδια φορά με το $\vec{u}$, αλλά διπλάσιο μήκος. Μπορούμε να γενικεύσουμε αυτή την έννοια του πολλαπλασίου, με τρόπο που να είναι συμβατός με την πράξη της πρόσθεσης.

Ορισμός 1.6. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και a είναι πραγματικός αριθμός, $a \in \mathbb{R}$, ορίζουμε το **πολλαπλάσιο** $a\,\vec{u}$ να είναι το διάνυσμα με σημείο εφαρμογής O, μήκος $|a|\,|\vec{u}|$ και τον ίδιο φορέα με το $\vec{u}$, ($|a|$ είναι η απόλυτη τιμή του a). Η φορά του $a\,\vec{u}$ είναι η ίδια με αυτήν του $\vec{u}$ εάν $a > 0$, και η αντίθετη εάν $a < 0$.

Δραστηριότητα 1.7 Σημειώστε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και σχεδιάστε τα διανύσματα

$$\begin{array}{llllll} \alpha') & \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}, & \beta') & 2\,\overrightarrow{AB}, & \gamma') & (-1)\overrightarrow{AB}), \\ \delta') & \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}, & \varepsilon') & 2\,\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}, & \varsigma') & \overrightarrow{AC}+(-1)\,\overrightarrow{AB}\,. \end{array}$$

Παρατηρούμε οτι το διάνυσμα $(-1)\,\overrightarrow{AB}$, το οποίο συνήθως συμβλίζουμε $-\overrightarrow{AB}$, έχει σημείο εφαρμογής το A και είναι ισοδύναμο με το διάνυσμα $\overrightarrow{BA}$, αλλά ως εφαρμοστό διάνυσμα δεν είναι ίσο με το $\overrightarrow{BA}$. Η ακόλουθη πρόταση συνοψίζει τις βασικές ιδιότητες των πράξεων που ορίσαμε.

Πρόταση 1.3 *Θεωρούμε τα γεωμετρικά διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ με σημείο εφαρμογής το O, και τους αριθμούς a, $b \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

α΄. $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

β΄. $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$

γ΄. $\vec{u}+\overrightarrow{OO}=\vec{u}$

δ΄. $1\,\vec{u}=\vec{u}$ *και* $0\,\vec{u}=\overrightarrow{OO}$

ε΄. $(ab)\,\vec{u}=a\,(b\,\vec{u})$

ϛ΄. $(a+b)\,\vec{u}=a\,\vec{u}+b\,\vec{u}$

ζ΄. $a\,(\vec{u}+\vec{v})=a\,\vec{u}+a\,\vec{v}$

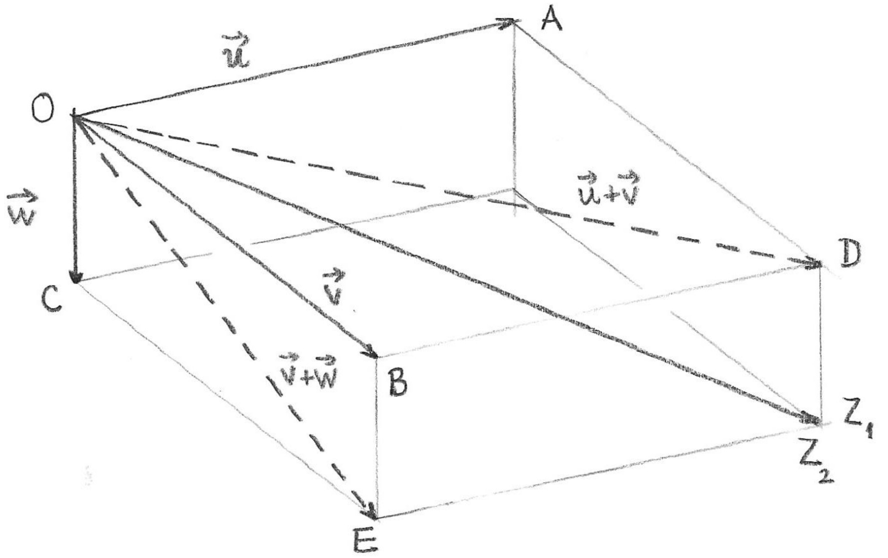
Απόδειξη. Η απόδειξη των περισσοτέρων ιδιοτήτων είναι απλή. Θα δώσουμε μόνο την απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας. Εάν $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ και $\vec{w}=\overrightarrow{OC}$, τότε D, E, Z_1 και Z_2 είναι τα σημεία που προσδιορίζονται από τις ακόλουθες ισότητες, (Σχήμα 1.10):

$$\begin{array}{ll} \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD} & \overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OZ_1} \\ \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE} & \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OZ_2} \end{array}$$

και έχουμε

$$(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\overrightarrow{OZ_1}, \quad \text{και} \quad \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=\overrightarrow{OZ_2}\,.$$

Το σημείο Z_2 χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα οτι το τετράπλευρο OAZ_2E είναι παραλληλόγραμμο. Συνεπώς για να δείξουμε οτι $\overrightarrow{OZ_1}=\overrightarrow{OZ_2}$, αρκεί να δείξουμε οτι OAZ_1E είναι επίσης παραλληλόγραμμο, δηλαδή να δείξουμε οτι το μέσο του OZ_1 συμπίπτει με το μέσο του



Σχήμα 1.10: Η προσεταιριστική ιδιότητα.

AE. Αλλά ODZ_1C είναι παραλληλόγραμμο, από τον ορισμό του Z_1, άρα το μέσο του OZ_1 συμπίπτει με το μέσο του CD. Άρκεί λοιπόν να δείξουμε οτι το μέσο του CD συμπίπτει με το μέσο του AE, δηλαδή οτι $ACED$ είναι παραλληλόγραμμο. Αλλά $OCEB$ και $OBDA$ είναι παραλληλόγραμμα, από τον ορισμό των E και D αντίστοιχα. Συνεπώς, από την Πρόταση 1.1, $ACED$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο.

□

Το διάνυσμα $(-1)\vec{u}$ ικανοποιεί τη σχέση $\vec{u}+(-1)\vec{u}=\overrightarrow{OO}$. Ονομάζεται **αντίθετο** του $\vec{u}$, και συμβολίζεται $-\vec{u}$. Χρησιμοποιούμε επίσης το συμβολισμό της αφαίρεσης, $\vec{v}-\vec{u}=\vec{v}+(-\vec{u})$.

Δραστηριότητα 1.8 Σημειώστε τρία σημεία A, B, C που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, και σχεδιάστε τα διανύσματα

$$\alpha')\ \ \overrightarrow{AB}-2\,\overrightarrow{AC}, \qquad \beta')\ \ \overrightarrow{AC}+(2\,\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}), \qquad \gamma')\ \ 3\,\overrightarrow{AC}-2\,\overrightarrow{AB}\,.$$

Εάν μεταφέρουμε παράλληλα δύο γεωμετρικά διανύσματα με κοινή αρχή, τότε το παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν μεταφέρεται στο νέο σημείο εφαρμογής, και το άθροισμά τους, που προκύπτει από τον κανόνα του παραλληλογράμμου, μεταφέρεται επίσης παράλληλα, όπως ελέγχουμε στην ακόλουθη Δραστηριότητα.

Δραστηριότητα 1.9 Σημειώστε 4 σημεία O, A, B, C και σχεδιάστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ και το άθροισμα $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. Μεταφέρετε παράλληλα τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AC}$ στο σημείο O, δηλαδή σχεδιάστε τα διανύσματα $\overrightarrow{OB'}$ και $\overrightarrow{OC'}$ τα οποία είναι ισοδύναμα προς τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AC}$ αντίστοιχα, (θα πρέπει να σχηματίζονται παραλληλόγραμμα $ABB'O$ και $ACC'O$). Σχεδιάστε το άθροισμα $\overrightarrow{OD'}=\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}$ και ελέγξτε οτι αυτό είναι ισοδύναμο με το $\overrightarrow{AD}$.

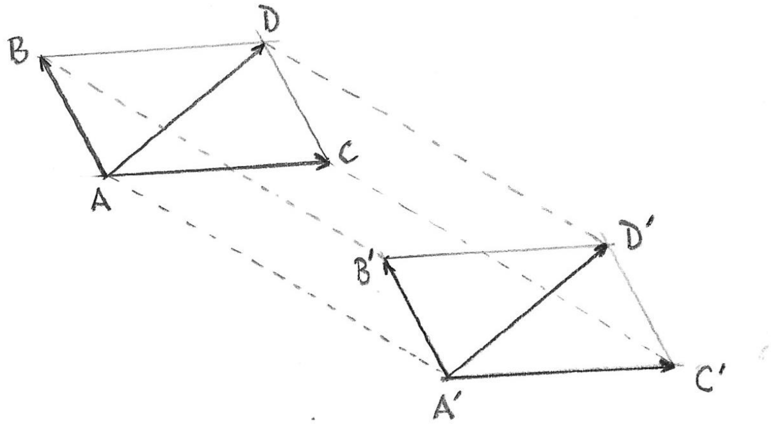
Θα διατυπώσουμε αυτή την παρατήρηση στο επόμενο Λήμμα.

Λήμμα 1.4 *Η παράλληλη μεταφορά είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων, και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με αριθμό. Πιο συγκεκριμένα, εάν* $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{A'B'}$ *και* $\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{A'C'}$, *τότε*

$$\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'} \sim \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

και για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$a\,\overrightarrow{A'B'} \sim a\,\overrightarrow{AB}.$$



Σχήμα 1.11: Πρόσθεση και παράλληλη μεταφορά

Απόδειξη. Για την πρόσθεση, (Σχήμα 1.11), αρκεί να δείξουμε οτι εάν $ABB'A'$, $ACC'A'$, $ABDC$ και $A'B'D'C'$ είναι παραλληλόγραμμα, τότε $ADD'A'$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1, πρώτα στα παραλληλόγραμμα $ABDC$ και $ACC'A'$, για να δείξουμε οτι $BDC'A'$ είναι παραλληλόγραμμο, κατόπιν στα $BDC'A'$ και $A'B'D'C'$ για να δείξουμε οτι $BDD'B'$ είναι παραλληλόγραμμο, και τέλος στα $BDD'B'$ και $ABB'A'$ για να δείξουμε οτι $ADD'A'$ είναι παραλληλόγραμμο. Η απόδειξη για τον πολλαπλασιασμό είναι ανάλογη.

□

Αυτή η ιδιότητα θα μας επιτρέψει να επεκτείνουμε τον ορισμό των πράξεων και μεταξύ διανυσμάτων με διαφορετικό σημείο εφαρμογής, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

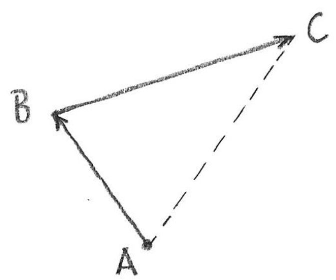
Δραστηριότητα 1.10 Σημειώστε τρία σημεία στο επίπεδο, A, B, C, και σχεδιάστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BC}$. Σχεδιάστε το διάνυσμα $\overrightarrow{AC'}$ που προκύπτει με παράλληλη μεταφορά του διανύσματος $\overrightarrow{BC}$ στο A. Εφαρμόστε τον κανόνα του παραλληλογράμμου για να βρείτε το άθροισμα $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC'}$. Τι παρατηρείτε;

1.6 Ελεύθερα διανύσματα

Στηριζόμενοι στην αρχή οτι ''προσθέτουμε ομοειδή αντικείμενα'', μέχρι τώρα περιοριστήκαμε να ορίσουμε τις πράξεις σε διανύσματα με ένα κοινό σημείο εφαρμογής, το O. Αν όμως στις πρώτες τάξεις του Δημοτικού προβληματίζει η πρόσθεση 2 μήλα + 3 πορτοκάλια, αργότερα το πρόβλημα ξεπεράστηκε, βάζοντας ''μήλα'' και ''πορτοκάλια'' στην κοινή κατηγορία ''φρούτα''. Κάτι ανάλογο θα κάνουμε τώρα, ώστε να μπορούμε να προσθέτουμε διανύσματα με διαφορετικά σημεία εφαρμογής.

Ας δούμε πρώτα κάποια φυσικά προβλήματα στα οποία χρειάζεται να συνθέσουμε διανύσματα με διαφορετικά σημεία εφαρμογής.

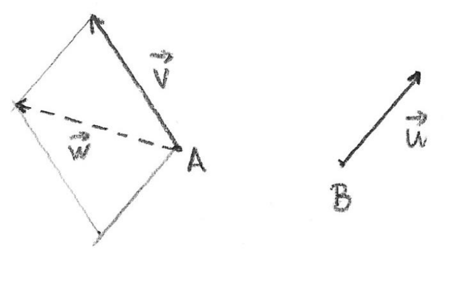
Παράδειγμα 1.1 Μία φυσική ερμηνεία των διανυσμάτων είναι η μετατόπιση, Σχήμα 1.12.



Σχήμα 1.12: Σύνθεση μετατοπίσεων.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ περιγράφει τη μετατόπιση ενός αντικειμένου από το σημείο A στο σημείο B. Εάν κατόπιν το αντικείμενο μετατοπισθεί από το B στο C, θα θέλαμε να μπορούμε να εκφράσουμε τη συνολική μετατόπιση ως σύνθεση των μετατοπίσεων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AC}$, δηλαδή ως το ''άθροισμα'' $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, αλλά τα δύο διανύσματα δεν έχουν κοινό σημείο εφαρμογής.

Παράδειγμα 1.2 Μία άλλη φυσική ερμηνεία των διανυσμάτων είναι η ταχύτητα. Το διά-



Σχήμα 1.13: Σχετική ταχύτητα του A ως προς το B.

νυσμα $\vec{v}$ με σημείο εφαρμογής A παριστάνει την ταχύτητα ενός αντικειμένου τη στιγμή που βρίσκεται στο σημείο A. Εάν ένα άλλο αντικείμενο την ίδια στιγμή βρίσκεται στο σημείο B

και κινείται με ταχύτητα $\vec{u}$, η σχετική ταχύτητα του A ως προς το B φυσιολογικά δίδεται από τη διαφορά των ταχυτήτων, $\vec{v} - \vec{u}$, Σχήμα 1.13. Πάλι, χρειάζεται να συνθέσουμε διανύσματα με διαφορετικά σημεία εφαρμογής.

Παράδειγμα 1.3 Μία τρίτη φυσική έννοια που παριστάνεται με διανύσματα είναι η δύναμη. Η δύναμη $\vec{F}_1$ δρά σε ένα στερεό σώμα στο σημείο A, ενώ η δύναμη $\vec{F}_2$ δρά στο σημείο B. Ποιό θα είναι το συνολικό αποτέλεσμα, η συνισταμένη δύναμη; Θα θέλαμε αυτό να εκφράζεται με κάποιο τρόπο από το άθροισμα των δύο διανυσμάτων $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Σε αυτές τις περιπτώσεις θέλουμε να εξετάσουμε διανύσματα χωρίς να λαμβάνουμε υπ' όψιν το ακριβές σημείο στο οποίο εφαρμόζονται. Για να πετύχουμε αυτό ορίζουμε μία καινούργια έννοια, το ελεύθερο διάνυσμα.

Ορισμός 1.7. Το **ελεύθερο διάνυσμα** που αντιστοιχεί στο εφαρμοστό γεωμετρικό διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων που είναι ισοδύναμα με το $\vec{u}$, δηλαδή που προκύπτουν από το $\vec{u}$ με παράλληλη μεταφορά.

Προς το παρόν θα συμβολίζουμε το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{u}$ με $[\vec{u}]$, δηλαδή

$$[\vec{u}] = \{\vec{z} \text{ διανύσμα στο επίπεδο, τέτοιο ώστε } \vec{z} \sim \vec{u}\}.$$

Έτσι, το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{u}$ είναι **ίσο** με το ελεύθερο διάνυσμα που αντιστοιχεί στο $\vec{v}$ εάν και μόνον εάν το $\vec{u}$ προκύπτει από το $\vec{v}$ με παράλληλη μεταφορά,

$$[\vec{u}] = [\vec{v}] \qquad \text{εάν και μόνον εάν} \qquad \vec{u} \sim \vec{v}\,.$$

Από το Λήμμα 1.2 γνωρίζουμε οτι εάν δύο διανύσματα είναι ισοδύναμα με ένα τρίτο, τότε είναι και μεταξύ τους ισοδύναμα, και συνεπώς εάν $[\vec{u}] = [\vec{v}]$ και $[\vec{v}] = [\vec{w}]$, τότε $[\vec{u}] = [\vec{w}]$, όπως θα περιμέναμε.

Δραστηριότητα 1.11 Σχεδιάστε ένα παραλληλόγραμμο $ABCD$. Ποιές από τις ακόλουθες σχέσεις είναι αληθείς για εφαρμοστά διανύσματα; Είναι η ισότητα (β′) αληθής για ελεύθερα διανύσματα;

$$\text{α}'.\quad \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}\,, \qquad \text{β}'.\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\,, \qquad \text{γ}'.\quad \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}\,.$$

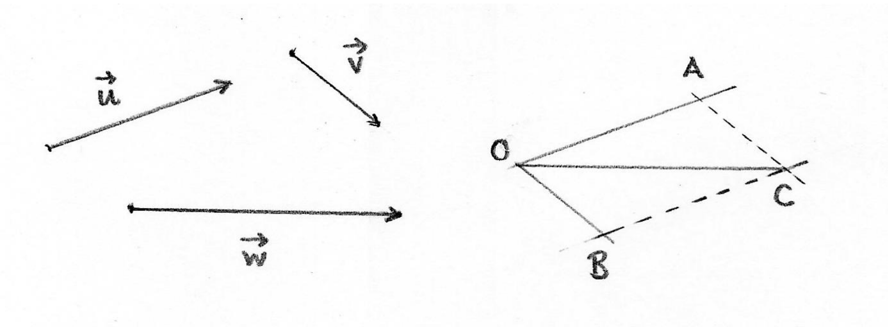
1.7 Πράξεις με ελεύθερα διανύσματα

Για να προσθέσουμε ελεύθερα διανύσματα χρησιμοποιούμε **αντιπροσώπους** των συνόλων, με κοινό σημείο εφαρμογής. Αυτή η ιδέα δεν είναι τόσο παράξενη όσο ίσως φαίνεται αρχικά. Το ίδιο πράγμα κάνουμε όταν προσθέτουμε κλάσματα: Ένας ρητός αριθμός αντιστοιχεί σε ένα σύνολο κλασμάτων που τον παριστάνουν, για παράδειγμα τα κλάσματα $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{5}{10}$, $\frac{342}{684}$ όλα παριστάνουν τον ίδιο ρητό αριθμό. Για να προσθέσουμε $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{3}$ χρησιμοποιούμε αντιπροσώπους που ταιριάζουν καλύτερα, σε αυτή την περίπτωση αυτούς που έχουν τον ίδιο παρονομαστή, και γράφουμε $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$.

Ανάλογα, για να προσθέσουμε τα ελεύθερα διανύσματα $[\vec{u}]$ και $[\vec{v}]$ χρησιμοποιούμε αντιπροσώπους που ταιριάζουν καλύτερα, δηλαδή που έχουν κοινό σημείο εφαρμογής.

Θεωρούμε τα ελεύθερα διανύσματα $[\vec{u}]$ και $[\vec{v}]$. Στο σημείο O θεωρούμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$, για τα οποία $\overrightarrow{OA} \sim \vec{u}$ και $\overrightarrow{OB} \sim \vec{v}$. Προσθέτουμε τα εφαρμοστά διανύσματα, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$. Ορίζουμε το **άθροισμα των ελεύθερων διανυσμάτων** $[\vec{u}]$ και $[\vec{v}]$ να είναι το ελεύθερο διάνυσμα $[\vec{w}]$ για το οποίο $\vec{w} \sim \overrightarrow{OC}$,

$$\begin{aligned} [\vec{u}] + [\vec{v}] &= \left[\overrightarrow{OC}\right] \\ &= [\vec{w}]\,. \end{aligned}$$



Σχήμα 1.14: Το άθροισμα ελεύθερων διανυσμάτων.

Ορίζουμε το πολλαπλάσιο του ελεύθερου διανύσματος $[\vec{u}]$ με τον πραγματικό αριθμό a να είναι το ελεύθερο διάνυσμα $\left[a\,\overrightarrow{OA}\right]$,

$$\begin{aligned} a\,[\vec{u}] &= \left[a\,\overrightarrow{OA}\right] \\ &= [a\,\vec{u}]\,. \end{aligned}$$

Όταν χρησιμοποιούμε αντιπροσώπους για να ορίσουμε μία πράξη πρέπει να είμαστε λίγο προσεκτικοί. Ας δούμε ξανά το άθροισμα των ρητών αριθμών $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Θα μπορούσαμε αντί για τους αντιπροσώπους $\frac{3}{6}$ και $\frac{2}{6}$ να χρησιμοποιήσουμε τους αντιπροσώπους $\frac{342}{684}$ και $\frac{228}{684}$, και να υπολογίσουμε $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{342}{684} + \frac{228}{684} = \frac{570}{684}$. Για να είναι λογικό να ορίσουμε την πρόσθεση ρητών αριθμών με αυτό τον τρόπο πρέπει το τελικό αποτέλεσμα να μην εξαρτάται από τους αντιπροσώπους που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε το συγκεκριμένο κλάσμα, δηλαδή θα πρέπει να ισχύει $\frac{5}{6} = \frac{570}{684}$. Αυτό μπορούμε εύκολα να το ελέγξουμε. Και γενικότερα, εάν τα κλάσματα $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ και $\frac{s}{q} = \frac{s'}{q'}$, τότε ισχύει $\frac{p+s}{q} = \frac{p'+s'}{q'}$. Λέμε οτι η πρόσθεση ρητών αριθμών είναι **καλά ορισμένη** μέσω της πρόσθεσης κλασμάτων με κοινό παρονομαστή.

Σε πολλές περιπτώσεις στα Μαθηματικά χρησιμοποιούμε αυτή τη μέθοδο: ορίζουμε νέα μαθηματικά αντικείμενα ως σύνολα ''ισοδύναμων'' αντικειμένων, και ορίζουμε τις πράξεις μεταξύ των νέων αντικειμένων χρησιμοποιώντας αντιπροσώπους από αυτά τα σύνολα. Σε κάθε τέτοια περίπτωση πρέπει να ελέγξουμε οτι η πράξη που προσπαθούμε να ορίσουμε είναι **καλά**

ορισμένη, δηλαδή το τελικό αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους που επιλέγουμε. Περισσότερα για αυτό το ζήτημα θα δείτε στο μάθημα "Θεμέλια των Μαθηματικών".

Και στην περίπτωση των πράξεων με ελεύθερα διανύσματα, πρέπει να ελέγξουμε οτι είναι **καλά ορισμένες**, δηλαδή οτι το ελεύθερο διάνυσμα που παίρνουμε ως αποτέλεσμα δεν εξαρτάται από τους συγκεκριμένους αντιπροσώπους που επιλέξαμε, $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$. Αυτό ισχύει, και η επαλήθευση βασίζεται στις ιδιότητες της παράλληλης μεταφοράς. Ας δούμε την περίπτωση του αθροίσματος.

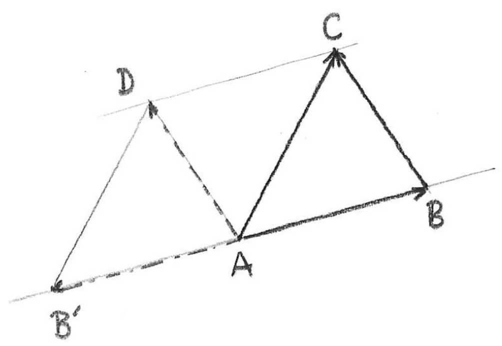
Εάν επιλέξουμε αντιπροσώπους με ένα άλλο σημείο εφαρμογής, $\overrightarrow{O'A'}$ και $\overrightarrow{O'B'}$, τότε $\overrightarrow{OA} \sim \overrightarrow{O'A'}$ και $\overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'B'}$, και από το Λήμμα 1.4, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \sim \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'}$. Άρα το ελεύθερο διάνυσμα $[\vec{u}] + [\vec{v}]$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου εφαρμογής. Ανάλογα αποδεικνύουμε οτι ο πολλαπλασιασμός με αριθμό είναι καλά ορισμένος.

Στη συνέχεια θα θεωρούμε όλα τα διανύσματα που χρησιμοποιούμε ως ελεύθερα διανύσματα, εκτός εάν αναφέρεται ρητά το αντίθετο. Για να απλοποιήσουμε το συμβολισμό, και να ακολουθήσουμε τη συνήθη μαθηματική πρακτική, θα παραλείπουμε τις αγκύλες [ ], και θα συμβολίζουμε με $\vec{u}$ ή $\overrightarrow{AB}$ το ελεύθερο διάνυσμα ή οποιοδήποτε γεωμετρικό διάνυσμα ισοδύναμο με το $\vec{u}$ ή το $\overrightarrow{AB}$.

Παράδειγμα 1.4 Σχεδιάζουμε τρία σημεία A, B, C και τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, Σχήμα 1.15. Η διαφορά $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'}$ είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{AD}$. Αλλά αφού $CDB'A$ είναι παραλληλόγραμμο και $B'ABA$ είναι (εκφυλισμένο) παραλληλόγραμμο, από την Πρόταση 1.1, $CDAB$ είναι επίσης παραλληλόγραμμο. Άρα τα διανύσματα $\overrightarrow{BC}$ και $\overrightarrow{AD}$ είναι ισοδύναμα. Συμπεραίνουμε οτι, ως ελεύθερα διανύσματα,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\,.$$

Αυτή η σχέση μας επιτρέπει να εκφράζουμε οποιοδήποτε διάνυσμα $\vec{u}$ ως διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή, και πέρατα το πέρας και την αρχή του $\vec{u}$ αντίστοιχα.



Σχήμα 1.15: Το διάνυσμα $\vec{BC}$ ως διαφορά των $\vec{AC}$ και $\vec{AB}$.

Δραστηριότητα 1.12 Σημειώστε τα σημεία A, B, C, D στις κορυφές ενός τετραγώνου, και το O στο κέντρο του τετραγώνου. Εάν $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$, εκφράστε τα $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ και $\overrightarrow{BD}$ ως αθροίσματα ή διαφορές των $\vec{u}$ και $\vec{w}$.

1.8 Γραμμικοί συνδυασμοί, γραμμική ανεξαρτησία

Είναι ενδιαφέρον να δούμε ποια διανύσματα μπορούμε να πάρουμε όταν εφαρμόσουμε τις πράξεις που έχουμε ορίσει σε ένα δεδομένο σύνολο διανυσμάτων.

Εάν έχουμε ένα διάνυσμα, εφαρμόζοντας τον πολλαπλασιασμό με αριθμό παίρνουμε υποχρεωτικά διανύσματα συγγραμμικά με το δοθέν. Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει οτι με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε όλα τα συγγραμμικά διανύσματα.

Πρόταση 1.5 *Θεωρούμε ένα μη μηδενικό γεωμετρικό διάνυσμα $\vec{u}$. Εάν το διάνυσμα $\vec{v}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{u}$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε*

$$\vec{v} \sim a\,\vec{u}\,.$$

Απόδειξη. Αφού τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ είναι συγγραμμικά, ο φορέας του $\vec{v}$ είναι παράλληλος προς το φορέα του $\vec{u}$. Έστω a ο λόγος των μηκών των $\vec{v}$ και $\vec{u}$, $a = \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$. Τότε, εάν $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι ομόρροπα, $\vec{v} \sim a\,\vec{u}$, ενώ εάν $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα, $\vec{v} \sim -a\,\vec{u}$.

□

Δύο ελεύθερα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι συγγραμμικά εάν υπάρχουν αντιπρόσωποι $\overrightarrow{OA}$ του $\vec{u}$ και $\overrightarrow{PB}$ του $\vec{v}$ τέτοιοι ώστε ο φορέας του $\overrightarrow{OA}$ να είναι ίσος ή παράλληλος προς το φορέα του $\overrightarrow{PB}$.

Πρόταση 1.6 *Εάν $\vec{u}$ είναι μη μηδενικό ελεύθερο διάνυσμα και $\vec{v}$ είναι συγγραμμικό προς το $\vec{u}$, τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $a \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε*

$$\vec{v} = a\,\vec{u}\,.$$

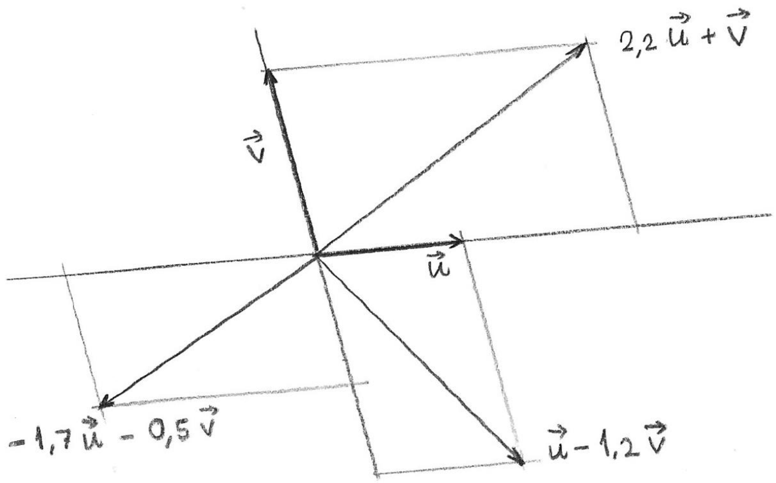
Εάν έχουμε δύο συγγραμμικά διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$, από την Πρόταση 1.6, $\vec{v} = a\,\vec{u}$ και $\vec{u} + \vec{v} = (1 + a)\,\vec{u}$. Συνεπώς όλα τα διανύσματα που παίρνουμε εφαρμόζοντας τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό είναι επίσης συγγραμμικά.

Εάν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ τα οποία δεν είναι συγγραμμικά, τότε έχουμε περισσότερες δυνατότητες, (Σχήμα 1.16). Θα δείξουμε οτι μπορούμε να πάρουμε κάθε διάνυσμα του επιπέδου εφαρμόζοντας τις πράξεις στα $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

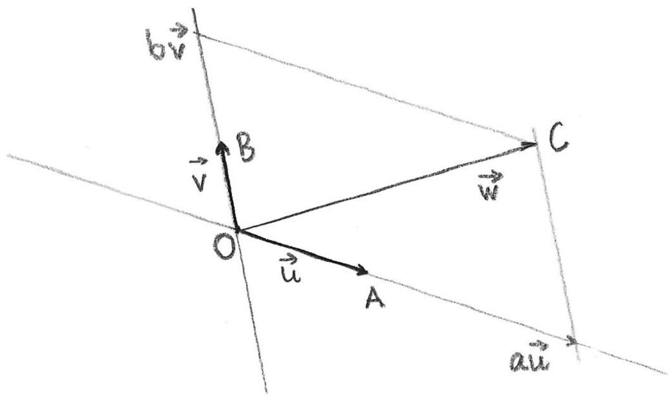
Πρόταση 1.7 *Εάν τα γεωμετρικά διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ δεν είναι συγγραμμικά, τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{w}$ του επιπέδου, με αρχή στο O, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $a, b \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}\,.$$

Απόδειξη. Αφού τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά, τα σημεία O, A, B δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Από το άκρο C του $\vec{w}$, φέρουμε παράλληλο προς την OB,



Σχήμα 1.16: Γραμμικοί συνδυασμοί διανυσμάτων.



Σχήμα 1.17: Ανάλυση διανύσματος σε γραμμικό συνδυασμό.

(Σχήμα 1.17), και αυτή τέμνει την ευθεία OA στο A'. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OA'}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{u}$, και από την Πρόταση 1.5, $\overrightarrow{OA'} = a\,\vec{u}$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}$. Παρόμοια, φέρουμε από το C παράλληλο προς την OA, η οποία τέμνει την OB στο B', και $\overrightarrow{OB'} = b\,\vec{v}$ για κάποιο $b \in \mathbb{R}$. Από την κατασκευή, το τετράπλευρο $OA'CB'$ είναι παραλληλόγραμμο, και συνεπώς

$$\begin{aligned} \vec{w} = \overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} \\ &= a\vec{u} + b\vec{v}\,. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.8 *Εάν $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι μη συγγραμμικά ελεύθερα διανύσματα, τότε για κάθε ελεύθερο διάνυσμα $\vec{w}$ του επιπέδου, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a, $b \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}\,.$$

Ορισμός 1.8. Εάν $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$ είναι διανύσματα, με αρχή στο O, ονομάζουμε **γραμμικό συνδυασμό** των $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$ κάθε έκφραση της μορφής

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \ldots + a_n\vec{u}_n$$

όπου a_1, a_2, …, a_n είναι πραγματικοί αριθμοί.

Λέμε οτι ένα διάνυσμα *εκφράζεται* ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$ εάν μπορούμε να το κατασκευάσουμε εφαρμόζοντας τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό στα διανύσματα $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$. Στην Πρόταση 1.7 δείξαμε οτι κάθε διάνυσμα του επιπέδου εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο δοθέντων μη συγγραμμικών διανυσμάτων.

Όταν εξετάζουμε μια συλλογή διανυσμάτων, συχνά μας ενδιαφέρει να γνωρίζουμε εάν κάποιο από τα διανύσματα μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Εάν συμβαίνει αυτό, θεωρούμε οτι η συλλογή περιέχει, με κάποια έννοια, περιττά στοιχεία. Αυτή την έννοια αποτυπώνει ο ακόλουθος ορισμός.

Ορισμός 1.9. Λέμε οτι τα διανύσματα $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$, είναι **γραμμικά εξαρτημένα** εάν κάποιο από αυτά μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων, δηλαδή εάν υπάρχει κάποιο i, $1 \leq i \leq n$, και πραγματικοί αριθμοί a_1, …, a_{i-1}, a_{i+1}, …, a_n τέτοιοι ώστε

$$\vec{u}_i = a_i\vec{u}_1 + \ldots + a_{i-1}\vec{u}_{i-1} + a_{i+1}\vec{u}_{i+1} + \ldots + a_n\vec{u}_n$$

Εάν τα διανύσματα $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, …, $\vec{u}_n$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα, λέμε οτι είναι **γραμμικά ανεξάρτητα**.

Οι παραπάνω ορισμοί έχουν νόημα μόνον όταν έχουμε περισσότερα από ένα διανύσματα στη συλλογή. Συμπληρώνουμε τον ορισμό για την περίπτωση ενός διανύσματος, λέγοντας οτι το διάνυσμα $\vec{u}_1$ είναι γραμμικά εξαρτημένο εάν είναι μηδενικό, και γραμμικά ανεξάρτητο εάν δεν είναι μηδενικό.

Οι Προτάσεις 1.5 και 1.7 δείχνουν οτι κάθε συλλογή που περιέχει δύο συγγραμμικά διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένη, και κάθε συλλογή που περιέχει περισσότερα από δύο διανύσματα στο επίπεδο είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Παρατηρούμε οτι δύο μη συγγραμμικά διανύσματα στο επίπεδο είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και κάθε άλλο διάνυσμα του επιπέδου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο διανυσμάτων. Ένα ζεύγος διανυσμάτων με αυτές τις ιδιότητες ονομάζεται **βάση** των διανυσμάτων του επιπέδου.

Δραστηριότητα 1.13 Σημειώστε τα σημεία A, B, C, D, E, F στις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου, και το O στο κέντρο του εξαγώνου. Εκφράστε τα $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

1.9 Άξονας, προσημασμένο μέτρο διανύσματος

Ορισμός 1.10. **Άξονα** ονομάζουμε μία ευθεία ε στην οποία έχουμε επιλέξει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v}$ με φορέα ε. Η επιλογή του $\vec{v}$ καθορίζει έναν **προσανατολισμό** πάνω στην ε και στα διανύσματα που έχουν φορέα ε: τα διανύσματα που είναι ομόρροπα με το $\vec{v}$ έχουν θετικό προσανατολισμό, ενώ τα διανύσματα που είναι αντίρροπα προς το $\vec{v}$ έχουν αρνητικό προσανατολισμό.
Εάν $\vec{w}$ είναι διάνυσμα συγγραμμικό με το $\vec{v}$, ονομάζουμε **προσημασμένο μέτρο** (ή **αλγεβρική τιμή**) του $\vec{u}$ ως προς τον άξονα $(\varepsilon, \vec{v})$ τον πραγματικό αριθμό $a \in \mathbb{R}$ ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση

$$\vec{w} = \frac{a}{|\vec{v}|}\,\vec{v}\,.$$

Παρατηρούμε οτι $|a| = |\vec{w}|$, και εάν $\vec{w}$ δεν είναι μηδενικό, τότε $a > 0$ εάν $\vec{w}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{v}$, ενώ $a < 0$ εάν $\vec{w}$ είναι αντίρροπο πρός το $\vec{v}$. Το προσημασμένο μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{OB}$ συμβολίζουμε (OB). Δεν θα χρησιμοποιούμε συχνά το συμβολισμό $(\vec{u})$ για το προσημασμένο μέτρο του $\vec{u}$, καθώς αυτός ο συμβολισμός μπορεί να παρερμηνευτεί.

Λήμμα 1.9 ***(Κανόνας του Chasles)*** *Εάν A, B, C είναι συγγραμμικά σημεία πάνω σε άξονα $(\varepsilon, \vec{v})$, τότε*

$$(AB) + (BC) = (AC)\,.$$

Δραστηριότητα 1.14 Σημειώστε τρία σημεία A, C, B πάνω σε μία ευθεία ε, έτσι ώστε το C να βρίσκεται μεταξύ του A και του B. Επιλέξτε ένα διάνυσμα $\vec{v}$ με φορέα την ε, και χρησιμοποιήστε το για να ορίσετε προσανατολισμό. Μετρήστε το μήκος των διανυσμάτων, υπολογίστε τα προσημασμένα μέτρα (AB), (BC), (AC) και ελέγξτε οτι $(AB) + (BC) = (AC)$.
Εάν χρησιμοποιήσετε τον αντίθετο προσανατολισμό, όλα τα μέτρα αλλάζουν πρόσημο, άρα η ισότητα διατηρείται.

1.10 Απλός λόγος τριών σημείων

Ο απλός λόγος είναι ένας πραγματικός αριθμός $\mu \neq -1$, ο οποίος περιγράφει τη σχετική θέση τριών διαφορετικών σημείων πάνω σε μία ευθεία.

Ορισμός 1.11. Θεωρούμε τρία σημεία P_1, P_2, P πάνω σε μία ευθεία. Τα διανύσματα $\overrightarrow{P_1P}$ και $\overrightarrow{PP_2}$ είναι συγγραμμικά, και εάν $P \neq P_2$ υπάρχει ένας αριθμός μ τέτοιος ώστε

$$\overrightarrow{P_1P} = \mu\overrightarrow{PP_2}.$$

Ο αριθμός μ ονομάζεται **απλός λόγος** των τριών σημείων, και συμβολίζεται $(P_1\, P_2\, P)$.

Παρατηρούμε οτι $(P_1\, P_2\, P) = \dfrac{(P_1P)}{(PP_2)}$, και οτι η αλλαγή του προσανατολισμού της ευθείας δεν επηρεάζει τον απλό λόγο. Εάν θεωρήσουμε τα P_1, P_2 σταθερά, και το P να κινείται πάνω στην ευθεία, η τιμή του απλού λόγου μεταβάλλεται όπως στο Σχήμα 1.18.

Σχήμα 1.18: Η τιμή του απλού λόγου καθώς το σημείο P κινείται πάνω στην ευθεία P_1P_2.

Δραστηριότητα 1.15 Για τα σημεία A, B, C της Δραστηριότητας 1.14 υπολογίστε τους απλούς λόγους $(A\,B\,C)$, $(B\,C\,A)$ και $(C\,A\,B)$.

Δραστηριότητα 1.16 Σημειώστε δύο σημεία P_1 και P_2 πάνω σε μία ευθεία ε. Βρείτε σημεία R, S, T πάνω στην ε τέτοια ώστε $(P_1\,P_2\,R) = 2$, $(P_1\,P_2\,S) = -\frac{1}{4}$ και $(P_2\,P_1\,T) = -\frac{1}{4}$.

1.11 Ασκήσεις

Άσκηση 1.1 Έστω $ABCD$ παραλληλόγραμμο, E σημείο στην πλευρά AB και F σημείο στην πλευρά CD τέτοια ώστε $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{FC}$. Έστω, επίσης σημείο G στην πλευρά AD και H σημείο στην πλευρά BC, τέτοια ώστε $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{HC}$. Αποδείξτε οτι το $EGFH$ είναι παραλληλόγραμμο.
Υπόδειξη: Μπορείτε να προσεγγίσετε αυτή την άσκηση με πολλούς τρόπους. Προσπαθήστε αρχικά να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του παραλληλογράμμου που δώσαμε στο μάθημα.

Άσκηση 1.2 Σχεδιάστε τρία σημεία A, B, C, που δεν βρίσκονται όλα στην ίδια ευθεία, τέτοια ώστε $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}|$.

Άσκηση 1.3 Αποδείξτε με χρήση διανυσμάτων οτι η ευθεία που ενώνει τα μέσα M, N των πλευρών AB και AC ενός τριγώνου ABC είναι παράλληλη προς την πλευρά BC και έχει μήκος το μισό της BC.

Άσκηση 1.4 Σχεδιάστε το τραπέζιο $ABCD$ με βάσεις AD και BC. Έστω M, N τα μέσα των πλαγίων πλευρών AB και CD. Αποδείξτε οτι

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right) .$$

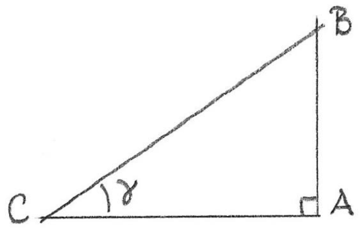
Άσκηση 1.5 Σημειώστε τρία σημεία O, A, B που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Γνωρίζουμε οτι για κάθε σημείο X του επιπέδου το διάνυσμα $\overrightarrow{OX}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός $\overrightarrow{OX} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB}$. Δείξτε οτι το σημείο X βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα A και B εάν και μόνον εάν $a + b = 1$.
Πού νομίζετε οτι βρίσκεται το X εάν $a + b = 3$;

Εβδομάδα 2

1.12 Προβολή διανύσματος, εσωτερικό γινόμενο

Στην Αναλυτική Γεωμετρία χρησιμοποιούμε το εσωτερικό γινόμενο για να προσδιορίσουμε τη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων. Από το σχολείο γνωρίζουμε τον ορισμό του ημιτόνου και του συνημιτόνου γωνίας στο πλαίσιο ενός ορθογωνίου τριγώνου, Σχήμα 1.19.

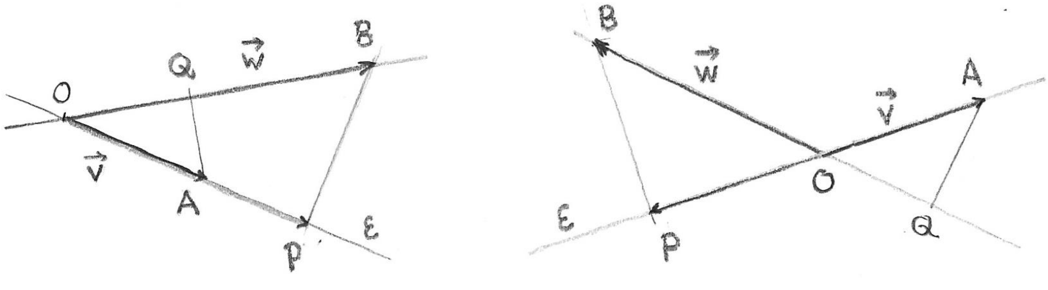
$$\cos\gamma = \frac{|CA|}{|CB|}, \qquad \sin\gamma = \frac{|AB|}{|CB|}.$$



Σχήμα 1.19: Ημίτονο και συνημίτονο γωνίας.

Το πρώτο βήμα για να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο γεωμετρικών διανυσμάτων είναι να προσδιορίσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Αυτό γίνεται μέσω της ‘‘ορθογώνιας προβολής’’.

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά γεωμετρικά διανύσματα με κοινή αρχή στο O, $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$. Έστω ε ο φορέας του $\vec{v}$. Από το πέρας του $\vec{w}$ φέρουμε κάθετο προς την ε, και σημειώνουμε P το σημείο όπου αυτή τέμνει την ε, έτσι ώστε η OA και η BP να τέμνονται σε ορθή γωνία, Σχήμα 1.20. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$ είναι η προβολή του διανύσματος $\vec{w}$ στο διάνυσμα $\vec{v}$.



Σχήμα 1.20: Ορθογώνια προβολή διανύσματος σε άξονα.

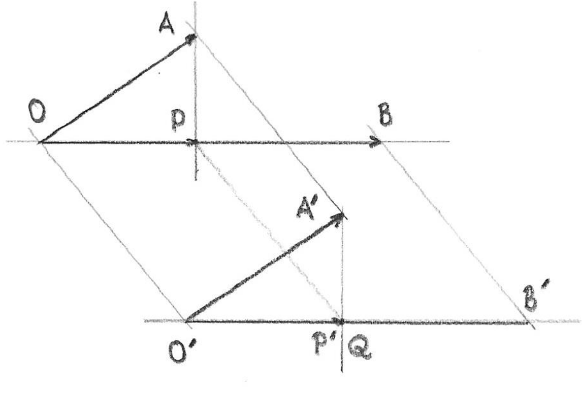
Ανάλογα ορίζουμε την προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{w}$. Από το πέρας του $\vec{v}$ φέρουμε κάθετο προς τον φορέα του $\vec{w}$ και σημειώνουμε Q το σημείο τομής. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OQ}$ είναι η προβολή του διανύσματος $\vec{v}$ στο διάνυσμα $\vec{w}$.

Ορισμός 1.12. Θεωρούμε μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$ και διάνυσμα $\vec{w} = \overrightarrow{OB}$. Ονομάζουμε (**ορθογώνια**) **προβολή του $\vec{w}$ στο $\vec{v}$**, και συμβολίζουμε $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$, το διάνυσμα $\overrightarrow{OP}$, όπου P είναι το σημείο τομής της καθέτου από το B προς την OA.

Σημειώνουμε οτι ορισμένοι συγγραφείς ονομάζουν προβολή το προσημασμένο μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{OP}$ ως προς τον άξονα $(\varepsilon, \vec{v})$, και όχι το ίδιο το διάνυσμα. Από τα συμφραζόμενα είναι συνήθως σαφές ποια σύμβαση χρησιμοποιείται.

Παρατηρούμε οτι εάν τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, τότε το σημείο P συμπίπτει με το O και η ορθογώνια προβολή του $\vec{w}$ στο $\vec{v}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Για να εφαρμόσουμε αυτό τον ορισμό σε ελεύθερα διανύσματα, αρκεί να δείξουμε οτι η κατασκευή της προβολής είναι συμβατή με την παράλληλη μεταφορά: εάν $\overrightarrow{O'A'}$ και $\overrightarrow{O'B'}$ προκύπτουν με παράλληλη μεταφορά του $\overrightarrow{OA}$ και του $\overrightarrow{OB}$ στο O', και $\overrightarrow{O'Q}$ είναι η προβολή του $\overrightarrow{O'A'}$ στο $\overrightarrow{O'B'}$, Σχήμα 1.21, θέλουμε να δείξουμε οτι $\overrightarrow{O'Q}$ συμπίπτει με την παράλληλη μεταφορά $\overrightarrow{O'P'}$ του $\overrightarrow{OP}$. Αλλά οι κάθετες ευθείες OP και AP μεταφέρονται σε κάθετες ευθείες $O'P'$ και $A'P'$, και συνεπώς $P' = Q$. Άρα το ελεύθερο διάνυσμα $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ δεν εξαρτάται από τους αντιπροσώπους των $\vec{v}$ και $\vec{w}$ που χρησιμοποιούμε στην κατασκευή. Καταλήγουμε οτι η προβολή είναι καλά ορισμένη σε ελεύθερα διανύσματα.



Σχήμα 1.21: Ορθογώνια προβολή και παράλληλη μεταφορά.

Δραστηριότητα 1.17 Σημειώστε τα σημεία A, B, C στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου, και θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ και $\vec{u} = \overrightarrow{CB}$. Κατασκευάστε την προβολή $\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$. Μεταφέρατε παράλληλα το $\vec{u}$ στο A και κατασκευάστε την προβολή $\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{u}$. Ποιά είναι η σχέση των δύο προβολών; (Δεν είναι ίσες!) Βρείτε τα προσημασμένα μέτρα των δύο προβολών, εάν το μήκος της πλευράς του τριγώνου είναι 1.

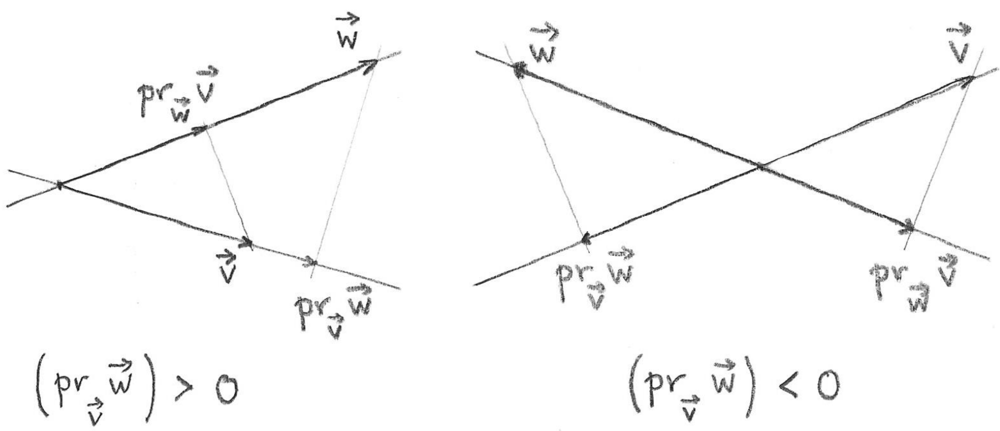
Παρατηρούμε οτι εάν τα $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι και τα δύο μη μηδενικά, Σχήμα 1.22,

α'. το διάνυσμα $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{v}$, και μπορεί να είναι ομόρροπο ή αντίρροπο με το $\vec{v}$, β′. το διάνυσμα $\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{w}$, και μπορεί να είναι ομόρροπο ή αντίρροπο με το $\vec{w}$,

γ′. το διάνυσμα $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{v}$ ακριβώς όταν το διάνυσμα $\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{w}$,

δ′. το διάνυσμα $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ είναι αντίρροπο προς το $\vec{v}$ ακριβώς όταν το διάνυσμα $\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ είναι αντίρροπο προς το $\vec{w}$.

Πράγματι η προβολή $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ είναι ομόρροπη με το $\vec{v}$ μόνον όταν το $\vec{w}$ και το $\vec{v}$ βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την κάθετο από το O στο φορέα του $\vec{v}$, Σχήμα 1.22. Όμως σε αυτήν την περίπτωση τα $\vec{w}$ και $\vec{v}$ βρίσκονται επίσης στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την κάθετο από το O στο φορέα του $\vec{w}$, και συνεπώς $\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ είναι ομόρροπη με το $\vec{w}$.



Σχήμα 1.22: Προσημασμένο μήκος ορθογώνιας προβολής.

Τώρα θέλουμε να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ των προβολών $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ και $\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$. Αυτές είναι εν γένει διαφορετικές. Παρατηρούμε όμως οτι τα τρίγωνα OBP και OAQ στο Σχήμα 1.20 είναι όμοια, και συνεπώς $|OA|\,|OP| = |OB|\,|OQ|$, δηλαδή

$$|\vec{v}|\,|\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}| = |\vec{w}|\,|\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{v}|\,.$$

Εάν θεωρήσουμε αντί των μέτρων $|\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}|$ και $|\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{v}|$ τα προσημασμένα μέτρα $(\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w})$ και $(\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{v})$ ως προς τον προσανατολισμό που ορίζουν στον φορέα τους τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ έχουμε πάλι ισότητα: το πρόσημο είναι το ίδιο, αφού τα $\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι αντίρροπα ακριβώς όταν και τα $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$ και $\vec{v}$ είναι αντίρροπα. Συμπεραίνουμε οτι η προβολή του $\vec{w}$ στο $\vec{v}$ και η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{w}$ ικανοποιούν τη σχέση

$$|\vec{v}|\,(\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}) = |\vec{w}|\,(\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{v})\,. \tag{1.1}$$

Αυτός ο αριθμός, που δεν εξαρτάται από το εάν προβάλλουμε το $\vec{w}$ στο $\vec{v}$ ή το $\vec{v}$ στο $\vec{w}$, είναι το εσωτερικό γινόμενο των γεωμετρικών διανυσμάτων $\vec{v}$ και $\vec{w}$.

Ορισμός 1.13. Εάν $\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα, ονομάζουμε τον πραγματικό αριθμό $|\vec{v}|\,(\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w})$ **εσωτερικό γινόμενο** του $\vec{v}$ και του $\vec{w}$, και το συμβολίζουμε

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = |\vec{v}|\,(\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}).$$

Εάν ένα από τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι μηδενικό, ορίζουμε $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$.

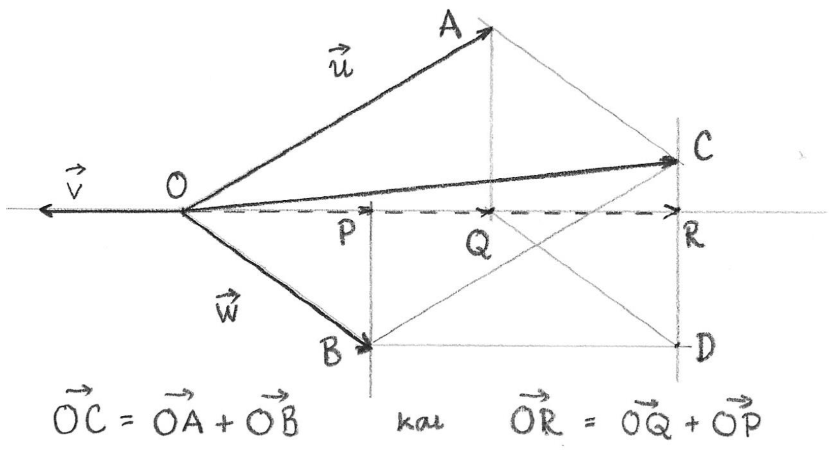
Παρατηρούμε οτι το εσωτερικό γινόμενο είναι καλά ορισμένο σε ελεύθερα διανύσματα, αφού αυτό ισχύει για το μέτρο και την προβολή.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τη σχέση της προβολής και του εσωτερικού γινομένου με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού με αριθμό.

Λήμμα 1.10 *Η προβολή είναι συμβατή με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με αριθμό. Συγκεκριμένα, εάν $\vec{v}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα, $\vec{u}$, $\vec{w}$ είναι διανύσματα και $a \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι ισότητες*

α΄. $\mathrm{pr}_{\vec{v}}(\vec{u}+\vec{w}) = \mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u} + \mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$

β΄. $\mathrm{pr}_{\vec{v}}(a\,\vec{w}) = a\,\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$



Σχήμα 1.23: Προβολή αθροίσματος.

Απόδειξη. Παραπέμπουμε στο Σχήμα 1.23. Αποδεικνύουμε το α΄. Θέτουμε $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u} = \overrightarrow{OQ}$, $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w} = \overrightarrow{OP}$ και $\mathrm{pr}_{\vec{v}}(\vec{u}+\vec{w}) = \overrightarrow{OR}$. Η παράλληλος προς την ε απο το B τέμνει την κάθετο προς την ε απο το C στο σημείο D. Τα τρίγωνα OAQ και BCD είναι ίσα. Άρα $(OQ) = (BD) = (PR)$. Από τον κανόνα του Chasles $(OR) = (OP) + (PR)$, και συνεπώς $(OR) = (OP) + (OQ)$. Άρα $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OP}$.

Το β΄ αποδεικνύεται ανάλογα.

□

Δραστηριότητα 1.18 Τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{w}$ και $\vec{u}$ της Δραστηριότητας 1.17 ικανοποιούν τη σχέση $\vec{u} = \vec{v} - \vec{w}$. Χρησιμοποιήστε αυτή τη σχέση για να υπολογίσετε την προβολή $\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{u}$. Βρίσκετε την ίδια σχέση που βρήκατε στη Δραστηριότητα 1.17;

Οι κυριότερες ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου συνοψίζονται στην ακόλουθη πρόταση

Πρόταση 1.11 *Εάν $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι διανύσματα και $a \in \mathbb{R}$, ισχύουν τα ακόλουθα:*

α′. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$,

β′. $(a\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = a\,(\vec{u} \cdot \vec{v})$,

γ′. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$,

δ′. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ *και* $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

ε′. Εάν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δεν είναι μηδενικά, τότε $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ εάν και μόνο εάν τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Απόδειξη. Το (α′) είναι συνέπεια της (1.1).
Τα (β′) και (γ′) προκύπτουν από το Λήμμα 1.10.
Για το (δ′), παρατηρούμε οτι $\mathrm{pr}_{\vec{u}}\vec{u} = \vec{u}$, και πως εάν το $\vec{u}$ δεν είναι μηδενικό, το προσημασμένο μέτρο του $\vec{u}$ ως προς τον άξονα που ορίζει το ίδιο είναι ίσο με το μέτρο του. Άρα

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|\,(\mathrm{pr}_{\vec{u}}\vec{u}) = |\vec{u}|\,|\vec{u}| = |\vec{u}|^2 \geq 0.$$

Για το (ε′) παρατηρούμε οτι εάν τα διανύσματα είναι κάθετα, τότε η ορθογώνια προβολή είναι το μηδενικό διάνυσμα, και συνεπώς $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Αντίστροφα, εάν τα διανύσματα δεν είναι κάθετα, τότε η κάθετος από το πέρας του $\vec{v}$ τέμνει τον φορέα του $\vec{u}$ σε σημείο διαφορετικό από το O, και συνεπώς η προβολή $\mathrm{pr}_{\vec{u}}\vec{v}$ είναι μη μηδενικό διάνυσμα. Άρα $\vec{u} \cdot \vec{v} \neq 0$.

□

Παρατηρούμε οτι για το εσωτερικό γινόμενο **δεν ισχύει ο κανόνας της διαγραφής**, που ισχύει στον πολλαπλασιασμό αριθμών. Εάν $\vec{u} \neq 0$ και $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε οτι $\vec{v} = \vec{w}$. Το μόνο συμπέρασμα που μπορούμε να βγάλουμε είναι οτι $\vec{v} - \vec{w}$ είναι είτε 0 είτε κάθετο προς το $\vec{u}$.

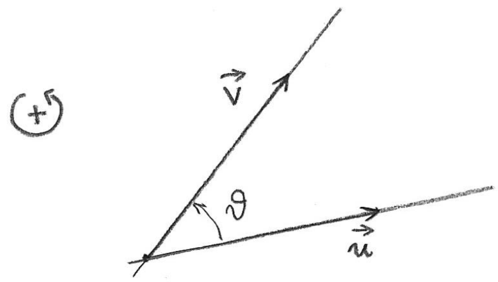
Δραστηριότητα 1.19 Για τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{w}$ και $\vec{u}$ της Δραστηριότητας 1.17 υπολογίσετε τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{v} \cdot \vec{w}$ και $\vec{u} \cdot \vec{w}$, εάν το μήκος της πλευράς του τριγώνου είναι 1.

1.13 Γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων

Δύο μη μηδενικά διανύσματα με την ίδια αρχή σχηματίζουν μία γωνία. Θα χρησιμοποιήσουμε δύο τρόπους να μετρήσουμε αυτή τη γωνία. Είτε ως την κυρτή γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων, που παίρνει τιμές από 0 έως π, είτε ως προσημασμένη γωνία σε προσανατολισμένο επίπεδο, που παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi,\, \pi]$.

Ορισμός 1.14. Η **γωνία** μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ ορίζεται ως η κυρτή γωνία $\widehat{AOB} = \vartheta$, η οποία παίρνει τιμές στο διάστημα $0 \le \vartheta \le \pi$. Θα τη συμβολίζουμε $\angle(\vec{u},\, \vec{v})$.

Εάν έχουμε προσανατολίσει το επίπεδο, επιλέγοντας μία φορά περιστροφής ως θετική[1], τότε η γωνία μπορεί να είναι θετική ή αρνητική.



Σχήμα 1.24: Προσημασμένη γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων.

Ορισμός 1.15. Η **προσημασμένη γωνία** $\measuredangle(\vec{u},\, \vec{v})$ ορίζεται ως η γωνία περιστροφής ϑ, με τιμές στο διάστημα $-\pi < \vartheta \le \pi$, που διαγράφει το διάνυσμα $\vec{u}$ όταν στρέφεται στο επίπεδο για να συμπέσει με το $\vec{v}$, Σχήμα 1.24.

Παρατηρούμε οτι $\angle(\vec{u},\, \vec{v}) = \angle(\vec{v},\, \vec{u})$. Για την προσημασμένη γωνία, εάν $\measuredangle(\vec{u},\, \vec{v}) \neq \pi$, τότε $\measuredangle(\vec{v}, \vec{u}) = -\measuredangle(\vec{u},\, \vec{v})$.

Μπορούμε να ελέγξουμε οτι η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων και ο προσανατολισμός του επιπέδου είναι αμετάβλητα από παράλληλη μεταφορά. Συνεπώς η γωνία και η προσημασμένη γωνία μεταξύ δύο ελεύθερων διανυσμάτων είναι καλά ορισμένες.

> **Δραστηριότητα 1.20** Σημειώστε τα σημεία A, B, C στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου, και υπολογίστε τις γωνίες $\angle(\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC})$, $\angle(\overrightarrow{BC},\, \overrightarrow{AC})$ και $\angle(\overrightarrow{BA},\, \overrightarrow{AC})$. Υπολογίστε επίσης τις προσημασμένες γωνίες $\measuredangle(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, $\measuredangle(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AC})$ και $\measuredangle(\overrightarrow{BA},\, \overrightarrow{AC})$.

Το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων υπολογίζεται συναρτήσει της προβολής του ενός στο άλλο,

$$\cos\angle(\vec{v},\, \vec{w}) = \frac{\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{\mathrm{pr}_{\vec{w}}\vec{v}}{|\vec{v}|}\,,$$

ή συναρτήσει του εσωτερικού γινομένου

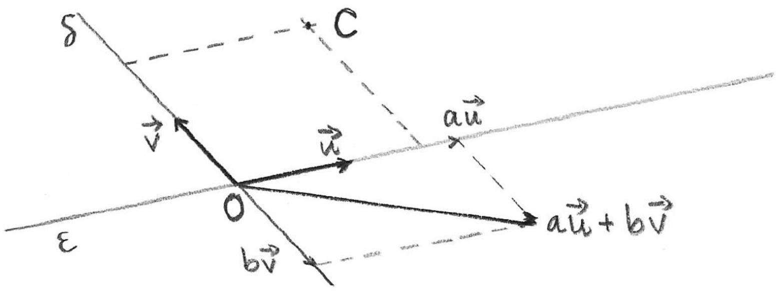
$$\cos\angle(\vec{v},\, \vec{w}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\,|\vec{v}|}\,.$$

[1] Συνήθως θεωρούμε θετική φορά περιστροφής την αντίθετη προς την κίνηση των δεικτών του ρολογιού.

1.14 Σύστημα αναφοράς

Η μέθοδος της Αναλυτικής Γεωμετρίας βασίζεται στην αντιστοίχιση των σημείων του επιπέδου, των διανυσμάτων και άλλων γεωμετρικών αντικειμένων με σύνολα αριθμών, έτσι ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές μεθόδους στη μελέτη τους. Η αντιστοίχιση αυτή προϋποθέτει την επιλογή ενός *συστήματος αναφοράς*.

Ορισμός 1.16. Επιλέγουμε στο επίπεδο E^2, ένα σταθερό σημείο O και δύο μη συγγραμμικά διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ προσδιορίζουν δύο άξονες, $(\varepsilon, \vec{u})$ και $(\zeta, \vec{v})$, οι οποίοι τέμνονται στο σημείο O. Το διατεταγμένο ζεύγος αξόνων $(\varepsilon, \vec{u})$, $(\delta, \vec{v})$ ονομάζεται **σύστημα αναφοράς** και θα το συμβολίζουμε με $(O, \vec{u}, \vec{v})$, Σχήμα 1.25. Λέμε οτι το σημείο O είναι η **αρχή των αξόνων** του συστήματος αναφοράς.



Σχήμα 1.25: Συντεταγμένες διανύσματος και σημείου σε (μη ορθογώνιο) σύστημα αναφοράς.

Εάν $\vec{w}$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα του επιπέδου E^2, έχουμε δεί οτι μπορούμε να εκφράσουμε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό

$$\vec{w} = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}.$$

Ορισμός 1.17. Οι αριθμοί του διατεταγμένου ζεύγους (a, b) ονομάζονται **συντεταγμένες του διανύσματος** $\vec{w}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Τα διανύσματα $a\,\vec{u}$, $b\,\vec{v}$ ονομάζονται **συνιστώσες** του διανύσματος $\vec{w}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Για κάθε σημείο C του επιπέδου, θεωρούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OC}$, το οποίο εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$ και $\vec{v}$, $\overrightarrow{OC} = c_1\vec{u} + c_2\vec{v}$.

Ορισμός 1.18. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OC}$ ονομάζεται **διάνυσμα θέσης** (ή **διανυσματική ακτίνα**) του σημείου C ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{u},\, \vec{v})$.
Οι συντεταγμένες $(c_1,\, c_2)$ του διανύσματος $\overrightarrow{OC}$ ονομάζονται **συντεταγμένες του σημείου** C στο σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{u},\, \vec{v})$.

Δραστηριότητα 1.21 Σημειώστε τα σημεία A, B, C, D, E, F στις κορυφές ενός κανονικού εξαγώνου, και το O στο κέντρο του εξαγώνου. Θεωρήστε το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{u},\, \vec{v})$, με $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων C, D, E, F ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{u},\, \vec{v})$.

Η επιλογή ενός σημείου αναφοράς O στο επίπεδο δίδει μία αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των σημείων του επιπέδου E^2 και του συνόλου $T_O E^2$ των διανυσμάτων με αρχή στο O,

$$E^2 \longleftrightarrow T_O E^2\,,$$

που απεικονίζει το σημείο C στο διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OC}$.

Η επιλογή ενός συστήματος αναφοράς στο επίπεδο μας δίδει επιπλέον μία αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου $T_O E^2$ των διανυσμάτων με αρχή στο O και του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}^2 = \{(x,\, y) : x,\, y \in \mathbb{R}\}$,

$$T_0 E^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2\,,$$

που απεικονίζει κάθε διάνυσμα με αρχή στο O στις συντεταγμένες του ως προς το σύστημα αναφοράς.

Τέλος, η επιλογή ενός συστήματος αναφοράς στο επίπεδο δίδει μία αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου των σημείων του επιπέδου E^2 και του συνόλου των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}^2$,

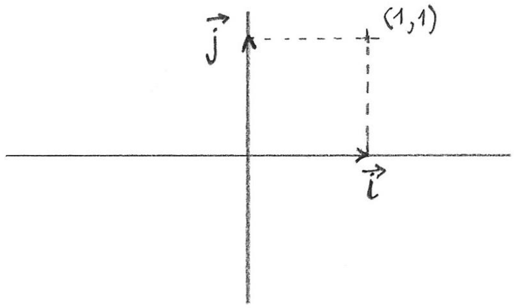
$$E^2 \longleftrightarrow \mathbb{R}^2\,,$$

που απεικονίζει κάθε σημείο του επιπέδου στις συντεταγμένες του ως προς το σύστημα αναφοράς.

Δραστηριότητα 1.22 Για το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{u},\, \vec{v})$ της Δραστηριότητας 1.21, σχεδιάστε τα σημεία με συντεταγμένες $(2,\, 2)$, $(2,\, -1)$ και $(-2,\, 1)$.
Εάν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w}$ ως προς το $(O,\, \vec{u},\, \vec{v})$ είναι $(-1,\, 3)$, βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u} + \vec{w}$, $\vec{w} - \vec{v}$, $2\vec{w} + \vec{u}$, και σχεδιάστε τα σημεία που έχουν αυτά τα διανύσματα ως διανύσματα θέσης.

Στη συνέχεια θα περιοριστούμε σε **ορθογώνια** συστήματα αναφοράς, δηλαδή αυτά στα οποία οι δύο άξονες τέμνονται σε ορθή γωνία. Μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ με τα αντίστοιχα **μοναδιαία** διανύσματα, δηλαδή διανύσματα μήκους 1,

$$\vec{i} = \frac{1}{|\vec{u}|}\,\vec{u}\,, \qquad \vec{j} = \frac{1}{|\vec{v}|}\,\vec{v}\,.$$



Σχήμα 1.26: Ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς.

Ένα σύστημα αναφοράς με ορθογώνιους άξονες και μοναδιαία διανύσματα ονομάζεται **ορθοκανονικό**, Σχήμα 1.26.

Δραστηριότητα 1.23 Σχεδιάστε τα σημεία A, B, C στις κορυφές ενός ορθογωνίου τριγώνου με μήκη πλευρών $|AB| = 3$, $|BC| = 4$ και $|AC| = 5$. Θεωρήστε το σύστημα αναφοράς $(B, \vec{u}, \vec{v})$ με $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$. Σημειώστε το σημείο D με συντεταγμένες $(1, 1)$ ως προς το $(B, \vec{u}, \vec{v})$.
Θεωρήστε το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$, όπου $\vec{i}$ και $\vec{j}$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα που προκύπτουν από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ αντίστοιχα. Σημειώστε το σημείο E με συντεταγμένες $(1, 1)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$. Βρείτε τις συντεταγμένες του D ως προς το σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$.

Το ακόλουθο Λήμμα δείχνει οτι οι συντεταγμένες ενός διανύσματος ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς σχετίζονται με το εσωτερικό γινόμενο.

Λήμμα 1.12 *Έστω $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς. Τότε οι συντεταγμένες (a, b) ενός διανύσματος $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j}$ δίδονται από το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{w}$ με τα αντίστοιχα διανύσματα του συστήματος αναφοράς:*

$$a = \vec{w} \cdot \vec{i}, \qquad b = \vec{w} \cdot \vec{j}$$

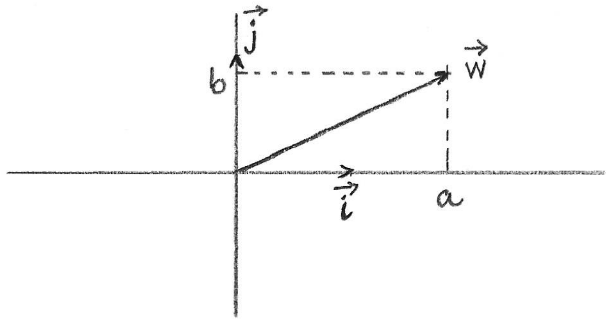
Απόδειξη. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα $\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = 1$ και $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 0$. Υπολογίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα, Σχήμα 1.27,

$$\begin{aligned} \vec{w} \cdot \vec{i} &= (a\vec{i} + b\vec{j}) \cdot \vec{i} \\ &= a\vec{i} \cdot \vec{i} + b\vec{j} \cdot \vec{i} \\ &= a \end{aligned}$$

και παρόμοια,

$$\vec{w} \cdot \vec{j} = b\,.$$

□



Σχήμα 1.27: Συντεταγμένες ως προς ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς.

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ με σημείο εφαρμογής στο O και συντεταγμένες (u_1, u_2), (v_1, v_2) αντίστοιχα (δηλαδή $\vec{u} = u_1\,\vec{i} + u_2\,\vec{j}$ και $\vec{v} = v_1\,\vec{i} + v_2\,\vec{j}$). Τότε το άθροισμα $\vec{u} + \vec{v}$ έχει συντεταγμένες $(u_1 + v_1, u_2 + v_2)$, δηλαδή

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1)\,\vec{i} + (u_2 + v_2)\,\vec{j},$$

και εάν $a \in \mathbb{R}$, το γινόμενο $a\,\vec{u}$ έχει συντεταγμένες (au_1, au_2), δηλαδή

$$a\,\vec{u} = au_1\,\vec{i} + au_2\,\vec{j}.$$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \cdot (v_1\vec{i} + v_2\vec{j}) \\ &= u_1v_1\vec{i} \cdot \vec{i} + u_1v_2\vec{i} \cdot \vec{j} + u_2v_1\vec{j} \cdot \vec{i} + u_2v_2\vec{j} \cdot \vec{j}\,. \end{aligned}$$

Αλλά $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1$ και $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0$, άρα

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2\,.$$

Το μέτρο του διανύσματος $\vec{u}$ είναι

$$\begin{aligned} |\vec{u}| &= \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \\ &= \sqrt{(u_1\vec{i} + u_2\vec{j}) \cdot (u_1\vec{i} + u_2\vec{j})} \\ &= \sqrt{{u_1}^2\vec{i} \cdot \vec{i} + u_1u_2\vec{i} \cdot \vec{j} + u_2u_1\vec{j} \cdot \vec{i} + {u_2}^2\vec{j} \cdot \vec{j}} \\ &= \sqrt{{u_1}^2 + {u_2}^2}. \end{aligned}$$

Δραστηριότητα 1.24 Για τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, τα σημεία D, E και το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$ της Δραστηριότητας 1.23, υπολογίστε:

α΄. τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$, $2\vec{u} + \vec{v}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BE}$,

β΄. το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD}$,

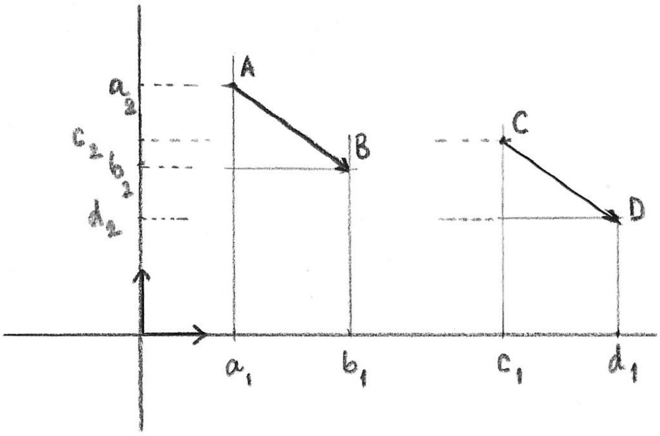
γ΄. το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{BD}$.

Συντεταγμένες ελεύθερου διανύσματος

Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και σημεία A, B, C, D με συντεταγμένες (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) και (d_1, d_2) αντίστοιχα, Σχήμα 1.28. Εάν $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$, τότε, από τα ίσα τρίγωνα ABM και CDN προκύπτει οτι

$$b_1 - a_1 = d_1 - c_1 \quad \text{και} \quad b_2 - a_2 = d_2 - c_2 \tag{1.2}$$

Συμπεραίνουμε οτι οι αριθμοί $v_1 = b_1 - a_1$ και $v_2 = b_2 - a_2$ δεν εξαρτώνται από το συγκεκριμένο αντιπρόσωπο $\overrightarrow{AB}$, αλλά χαρακτηρίζουν το ελεύθερο διάνυσμα $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.



Σχήμα 1.28: Οι συντεταγμένες του ελεύθερου διανύσματος δεν εξαρτώνται από τον αντιπρόσωπο.

Ορισμός 1.19. Συντεταγμένες του ελεύθερου διανύσματος $\vec{v}$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, είναι οι αριθμοί

$$v_1 = b_1 - a_1 \quad \text{και} \quad v_2 = b_2 - a_2,$$

όπου (a_1, a_2) είναι οι συντεταγμένες της αρχής A και (b_1, b_2) είναι οι συντεταγμένες του πέρατος B κάποιου αντιπροσώπου $\overrightarrow{AB}$ του $\vec{v}$.
Εάν $v_1 \neq 0$, ονομάζουμε **συντελεστή διεύθυνσης** του $\vec{v}$ τον αριθμό $\lambda = \dfrac{v_2}{v_1}$.

Από τις εξισώσεις (1.2) βλέπουμε οτι δύο ελεύθερα διανύσματα είναι ίσα εάν και μόνον εάν οι συντεταγμένες τους είναι μία προς μία ίσες.

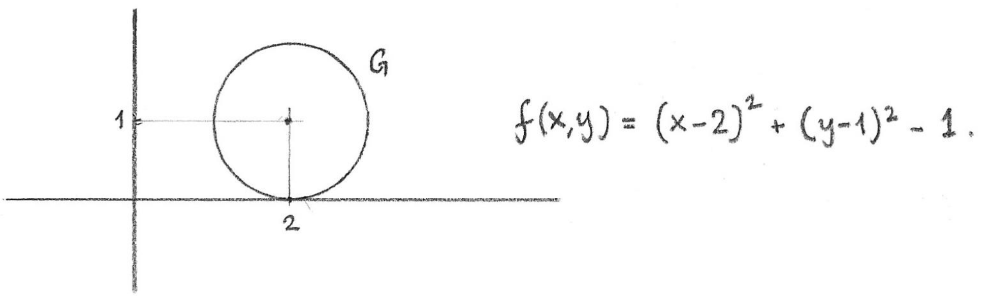
Δραστηριότητα 1.25 Για το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(B, \vec{i}, \vec{j})$ της Δραστηριότητας 1.23, βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{EC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DC}$. Σημειώστε το σημείο F για το οποίο $\overrightarrow{EF}$ έχει συντεταγμένες $(2, 3)$.

1.15 Γεωμετρικοί Τόποι

Έχοντας επιλέξει ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς στο επίπεδο, μπορούμε να περιγράψουμε γεωμετρικά αντικείμενα του επιπέδου μέσω των συνόλων των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών που αντιστοιχούν στα σημεία τους. Υπάρχουν δύο βασικά διαφορετικοί τρόποι περιγραφής ενός συνόλου που αποτελείται από διατεταγμένα ζεύγη αριθμών: με αναλυτικές εξισώσεις ή σε παραμετρική μορφή. Αυτές οι δύο διαφορετικές προσεγγίσεις οδηγούν, σε πιο προχωρημένο επίπεδο, σε δύο διαφορετικούς κλάδους των σύγχρονων μαθηματικών, την Αλγεβρική Γεωμετρία και τη Διαφορική Γεωμετρία.

Αναλυτικές εξισώσεις

Θεωρούμε το επίπεδο με δεδομένο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, έτσι ώστε κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y). Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ που για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών δίδει έναν αριθμό, προσδιορίζει ένα σύνολο στο επίπεδο με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρούμε όλα τα σημεία $P(p_1, p_2)$ του επιπέδου, για τις συντεταγμένες των οποίων ισχύει $f(p_1, p_2) = 0$· δηλαδή τα σημεία του επιπέδου με συντεταγμένες στο σύνολο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$. Αυτό το υποσύνολο G του επιπέδου ονομάζεται *γεωμετρικός τόπος* της εξίσωσης $f(x, y) = 0$, Σχήμα 1.29. Συχνά ταυτίζουμε το υποσύνολο του επιπέδου με το σύνολο των συντεταγμένων, και αναφερόμαστε στο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = 0\}$ ως το γεωμετρικό τόπο της $f(x, y) = 0$. Λέμε επίσης οτι η εξίσωση $f(x, y) = 0$ είναι η *αναλυτική εξίσωση* του υποσυνόλου G του επιπέδου ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Σχήμα 1.29: Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$.

Ορισμός 1.20. Ο **γεωμετρικός τόπος** G της εξίσωσης $f(x, y) = 0$ είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων οι συντεταγμένες ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ικανοποιούν την εξίσωση $f(x, y) = 0$.
Η εξίσωση $f(x, y) = 0$ είναι η **αναλυτική εξίσωση** του συνόλου G.

Παράδειγμα 1.5 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = ax+by+c$. Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $ax + by + c = 0$ είναι το σύνολο (των σημείων του επιπέδου με συντεταγμένες στο) $\{(x, y) : ax + by + c = 0\}$. Γνωρίζουμε οτι αυτό το σύνολο είναι μία ευθεία, τις ιδιότητες της οποίας θα υπενθυμίσουμε στην επόμενη διάλεξη. Η αναλυτική εξίσωση μίας ευθείας, ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, είναι της μορφής $ax + by + c = 0$.

Παράδειγμα 1.6 Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2$, όπου $r > 0$. Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$ αποτελείται από τα σημεία για τα οποία $x^2+y^2 = r^2$, δηλαδή τα σημεία που απέχουν σταθερή απόσταση r από το σημείο $(0, 0)$. Η αναλυτική εξίσωση του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα r, ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, είναι της μορφής $x^2 + y^2 = r^2$.

Παράδειγμα 1.7 Θέλουμε να περιγράψουμε τον κύκλο με κέντρο το σημείο C, με συντεταγμένες (a, b), και ακτίνα 3. Εάν το σημείο P, με συντεταγμένες (x, y), βρίσκεται σε αυτόν τον κύκλο, η απόσταση από το P στο C είναι 3, $|\overrightarrow{CP}| = 3$, και συνεπώς $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = 3$. Συμπεραίνουμε οτι ο δεδομένος κύκλος μπορεί να περιγραφεί από τη συνάρτηση $f(x, y) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} - 3$.

Αφού $|\overrightarrow{CP}| \geq 0$, το ίδιο ακριβώς σύνολο σημείων ικανοποιεί την εξίσωση $|\overrightarrow{CP}|^2 = 9$, σε συντεταγμένες $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 9$. Συνεπώς μία απλούστερη περιγραφή του κύκλου δίδεται από τη συνάρτηση $g(x, y) = (x-a)^2 + (y-b)^2 - 9$. Η αναλυτική εξίσωση του κύκλου με κέντρο $C : (a, b)$ και ακτίνα r, είναι $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$.

Παράδειγμα 1.8 Η εξίσωση $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 0$ ικανοποιείται μόνο από το σημείο P με συντεταγμένες (a, b).

> **Δραστηριότητα 1.26** Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $y = 5$;
> Προσέξτε οτι όταν μία από τις συντεταγμένες δεν εμφανίζεται στην αναλυτική εξίσωση, δεν σημαίνει οτι η συντεταγμένη παίρνει υποχρεωτικά την τιμή μηδέν. Αντιθέτως, σημαίνει οτι δεν υπάρχει κανένας περιορισμός σε αυτή τη συντεταγμένη, και παίρνει οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{R}$.
> Ποιός είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $x^2 = 4$;

Παράδειγμα 1.9 Εάν $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι δύο συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^2$, το γινόμενό τους $f(x, y)g(x, y)$ μηδενίζεται ακριβώς όταν μηδενίζεται τουλάχιστον μία από τις f και g. Έτσι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y)g(x, y) = 0$ είναι η ένωση των γεωμετρικών τόπων των εξισώσεων $f(x, y) = 0$ και $g(x, y) = 0$. Για παράδειγμα, η εξίσωση $y^2 - x^2 = 0$ ισοδυναμεί με $(y+x)(y-x) = 0$, και ο γεωμετρικός τόπος της είναι η ένωση δύο ευθειών ε_1 και ε_2, με εξισώσεις $y + x = 0$ και $y - x = 0$.

Παράδειγμα 1.10 Εάν $f(x, y)$ και $g(x, y)$ είναι δύο συναρτήσεις στο $\mathbb{R}^2$, το άθροισμα των τετραγώνων τους $f(x,y)^2 + g(x,y)^2$ μηδενίζεται ακριβώς όταν μηδενίζονται και οι δύο συναρτήσεις f και g. Έτσι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x,y)^2 + g(x,y)^2 = 0$ είναι η τομή των γεωμετρικών τόπων των εξισώσεων $f(x,y) = 0$ και $g(x,y) = 0$, δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος του συστήματος εξισώσεων

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 0 \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

Παραμετρική περιγραφή

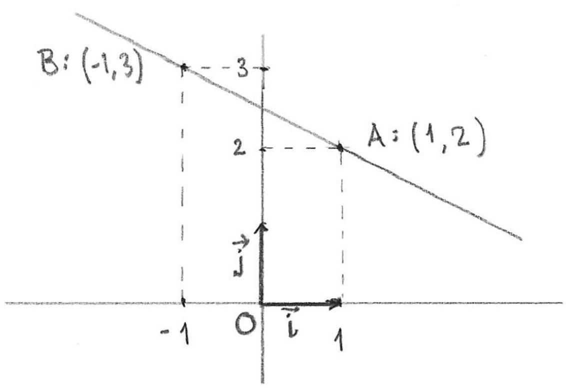
Σε αυτή την περίπτωση περιγράφουμε ένα υποσύνολο του επιπέδου ως την εικόνα μίας απεικόνισης από την ευθεία στο επίπεδο.

Θεωρούμε συναρτήσεις $x(t)$ και $y(t)$, και την απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ η οποία αντιστοιχίζει στον αριθμό t το διατεταγμένο ζεύγος $(x(t), y(t))$. Τότε καθώς η *παράμετρος* t παίρνει διαφορετικές τιμές σε κάποιο διάστημα στο $\mathbb{R}$, το σημείο $P(t)$ με συντεταγμένες $(x(t), y(t))$ διαγράφει μία καμπύλη στο επίπεδο.

Ορισμός 1.21. Οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ αποτελούν **παραμετρική περιγραφή** του συνόλου G του επιπέδου εάν για κάθε σημείο του G υπάρχει τουλάχιστον ένα t τέτοιο ώστε οι συντεταγμένες του σημείου ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$ είναι $(x(t), y(t))$.

Παράδειγμα 1.11 Η ευθεία στο επίπεδο που περνάει από τα σημεία $A : (1, 2)$ και $B : (-1, 3)$ έχει παραμετρική περιγραφή $f(t) = (1-2t, 2+t)$. Πράγματι, εάν το σημείο $X : (x, y)$ βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα A, B, το διάνυσμα $\overrightarrow{AX}$ είναι πολλαπλάσιο του διανύσματος $\overrightarrow{AB} = (-2, 1)$, και συνεπώς $(x-1, y-2) = t(-2, 1)$. Άρα μία παραμετρική περιγραφή της ευθείας AB είναι

$$(x, y) = (1 - 2t, 2 + t)\,.$$



Σχήμα 1.30: Παραμετρική περιγραφή της ευθείας AB.

Μπορούμε να γράψουμε την παραμετρική περιγραφή σε *διανυσματική μορφή*, εκφράζοντας το διάνυσμα θέσης ενός σημείου της ευθείας ως συνάρτηση της παραμέτρου t:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

ή σε συντεταγμένες $(x, y) = (1, 2) + t(-2, 1)$.

Δραστηριότητα 1.27 Βρείτε την παραμετρική περιγραφή της ευθείας που περνάει από τα σημεία $C : (1, 1)$ και $D : (3, 2)$.

Παράδειγμα 1.12 Ο κύκλος με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα r έχει παραμετρική περιγραφή, με παράμετρο ϑ για $0 \leq \theta < 2\pi$,

$$f(\theta) = (r\cos\theta,\, r\sin\theta)\,.$$

Μία διαφορετική παραμετρική περιγραφή του κύκλου ακτίνας r, που δεν χρησιμοποιεί τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είναι η

$$x(t) = t, \qquad y(t) = \sqrt{r^2 - t^2}, \qquad \text{για } -r \leq t \leq r\,.$$

Αυτή η παραμέτρηση καλύπτει μόνο το ημικύκλιο όπου $y \geq 0$. Για να καλύψουμε όλο τον κύκλο χρειαζόμαστε και μία δεύτερη παραμέτρηση,

$$x(t) = t, \qquad y(t) = -\sqrt{r^2 - t^2}, \qquad \text{για } -r \leq t \leq r\,.$$

Δραστηριότητα 1.28 Βρείτε την παραμετρική περιγραφή του κύκλου με κέντρο στο σημείο $(1, 1)$ και ακτίνα 2.

Εάν γνωρίζουμε την παραμετρική περιγραφή ενός συνόλου, μπορούμε να βρούμε τις αναλυτικές εξισώσεις με *απαλοιφή των παραμέτρων*. Θεωρούμε την ευθεία στο επίπεδο, με παραμετρικές συναρτήσεις $x(t) = 1 - t$ και $y(t) = 2 - 3t$. Λύνοντας ως προς t έχουμε

$$t = 1 - x \quad \text{και} \quad t = \frac{2-y}{3}\,.$$

Εξισώνουμε τις δύο εκφράσεις για την παράμετρο t και έχουμε

$$1 - x = \frac{1}{3}(2 - y)$$

απ' όπου παίρνουμε την εξίσωση της ευθείας $3x + y - 5 = 0$.

Δραστηριότητα 1.29 Δίδεται η παραμετρική περιγραφή μίας ευθείας $(x, y) = (-1, 1) + t(1, 1)$. Βρείτε το σημείο της ευθείας που αντιστοιχεί στην τιμή της παραμέτρου $t = 1$.

Βρείτε και το σημείο για $t = -1$.

Απαλείψτε την παραμετρο t για να βρείτε την αναλυτική εξίσωση της ευθείας.

1.16 Ευθείες στο επίπεδο

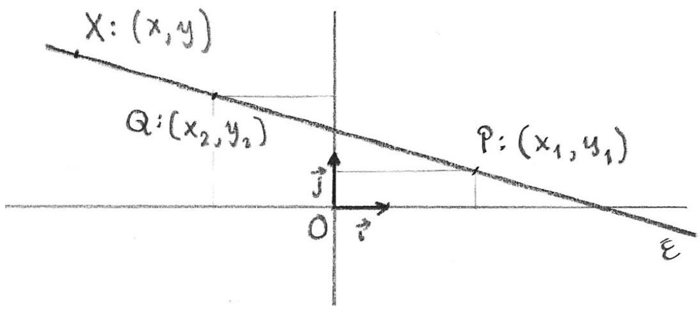
Μία ευθεία ε στο επίπεδο προσδιορίζεται εάν γνωρίζουμε δύο σημεία της, ή εάν γνωρίζουμε ένα σημείο της ευθείας και ένα διάνυσμα στη διεύθυνση της ευθείας.

Θεωρούμε δύο σημεία P και Q, με συντεταγμένες (x_1, y_1) και (x_2, y_2) αντίστοιχα, και ε την ευθεία που περνάει από τα σημεία P και Q. Εάν $X : (x, y)$ είναι το γενικό σημείο πάνω στην ευθεία ε, το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{PQ}$, και συνεπώς $\overrightarrow{PX} = t\overrightarrow{PQ}$ για κάποιο αριθμό t. Έτσι βρίσκουμε την παραμετρική περιγραφή για το διάνυσμα θέσης του σημείου X:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\overrightarrow{PQ}\,,$$

ή σε συντεταγμένες

$$(x, y) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\,. \tag{1.3}$$



Σχήμα 1.31: Η ευθεία από τα σημεία P και Q.

Εάν $x_2 - x_1 = 0$, η 1.3 δίδει την εξίσωση $x = x_1$. Εάν $y_2 - y_1 = 0$, η 1.3 δίδει την εξίσωση $y = y_1$. Υπενθυμίζουμε οτι μία μεταβλητή που δεν εμφανίζεται σε μία εξίσωση, μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή. Έτσι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $x = x_1$ αποτελείται από όλα τα σημεία με συντεταγμένες (x_1, y) για $y \in \mathbb{R}$, δηλαδή μία ευθεία παράλληλη προς τον y-άξονα.

Εάν $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \neq 0$, μπορούμε να απαλείψουμε την παράμετρο t από τις σχέσεις $x - x_1 = t(x_2 - x_1)$ και $y - y_1 = t(y_2 - y_1)$, για να πάρουμε την αναλυτική εξίσωση της ευθείας ε,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}\,,$$

ή

$$(y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - (y_2 - y_1)x_1 + (x_2 - x_1)y_1 = 0\,.$$

Παρατηρούμε οτι η εξίσωση είναι της μορφής $Ax + By + C = 0$. Οι αριθμοί A, B και C προσδιορίζονται από τις συντεταγμένες των σημείων P και Q.

Θεωρούμε το σημείο $P : (x_1, y_1)$ και το διάνυσμα $\vec{a} = (u, v)$. Η ευθεία ε που περνάει από το P και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a}$ έχει γενικό σημείο $X : (x, y)$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ είναι συγγραμμικό με το $\vec{a}$. Συνεπώς $\overrightarrow{PX} = t\vec{a}$ για κάποιο αριθμό t. Έτσι βρίσκουμε την παραμετρική περιγραφή για το διάνυσμα θέσης του σημείου X:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t\vec{a}\,,$$

ή σε συντεταγμένες

$$(x,\, y) = (x_1,\, y_1) + t(u,\, v)\,.$$

Εάν $u = 0$ η ευθεία ε είναι παράλληλη με τον y-άξονα, και έχει αναλυτική εξίσωση $x = x_1$. Εάν $v = 0$ η ευθεία ε είναι παράλληλη με τον x-άξονα, και έχει αναλυτική εξίσωση $y = y_1$

Εάν $uv \neq 0$, μπορούμε να απαλείψουμε την παράμετρο t από τις σχέσεις $x - x_1 = tu$ και $y - y_1 = tv$, για να πάρουμε την αναλυτική εξίσωση της ευθείας ε,

$$\frac{x - x_1}{u} = \frac{y - y_1}{v}\,,$$

ή

$$vx - uy - vx_1 + uy_1 = 0\,.$$

Παρατηρούμε οτι και αυτή η εξίσωση είναι της μορφής $Ax + By + C = 0$.

Θα δείξουμε οτι κάθε εξίσωση της μορφής $Ax + By + C = 0$, όπου τα A, B δεν είναι και τα δύο μηδέν παριστάνει μία ευθεία.

Πρόταση 1.13 *Ο γεωμετρικός τόπος μίας εξίσωσης της μορφής*

$$Ax + By + C = 0\,, \tag{1.4}$$

όπου τα A, B δεν είναι και τα δύο μηδέν, είναι μία ευθεία στο επίπεδο.

Απόδειξη. Εάν $A = 0$, τότε $B \neq 0$, και η εξίσωση $Ax+By+C = 0$ γίνεται $y = -C/B$. Ο γεωμετρικός τόπος αυτής της εξίσωσης είναι όλα τα σημεία με δεύτερη συντεταγμένη $-C/B$, δηλαδή μία ευθεία παράλληλη με τον x-άξονα, που τέμνει τον y-άξονα στο σημείο $(0,\, -C/B)$.

Παρόμοια, εάν $B = 0$ και $A \neq 0$, η εξίσωση 1.4 γίνεται $x = -C/A$, και ο γεωμετρικός τόπος είναι μία ευθεία παράλληλη με τον y-άξονα που τέμνει τον x-άξονα στο σημείο $(-C/A,\, 0)$.

Εάν τώρα $AB \neq 0$, ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης 1.4 περιέχει τα σημεία P : $(-C/A,\, 0)$ και Q : $(1 - (C/A),\, -A/B)$. Θα δείξουμε οτι εάν X : $(x,\, y)$ είναι οποιοδήποτε άλλο σημείο που ικανοποιεί την εξίσωση, το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{PQ}$, και συνεπώς το σημείο X βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα P και Q.

Το διάνυσμα $\overrightarrow{PQ}$ έχει συντεταγμένες $(1,\, -A/B)$. Αφού $Ax + By + C = 0$, έχουμε $y = -\frac{Ax+C}{B}$, και συνεπώς το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ έχει συντεταγμένες

$$\left(x + \frac{C}{A},\, y\right) = \left(\frac{Ax + C}{A},\, -\frac{Ax + C}{B}\right) = \frac{Ax + C}{A}\left(1,\, -\frac{A}{B}\right)\,.$$

Άρα $\overrightarrow{PX}$ και $\overrightarrow{PQ}$ είναι συγγραμμικά, και X βρίσκεται στην ευθεία ε.

□

Δραστηριότητα 1.30 Σχεδιάστε τις ευθείες με τις ακόλουθες εξισώσεις ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

α΄. $x = 3$	β΄. $y = 2$
γ΄. $x + y = 0$	δ΄. $x + y = 2$
ε΄. $x - y = 0$	ϛ΄. $x - y = -3$

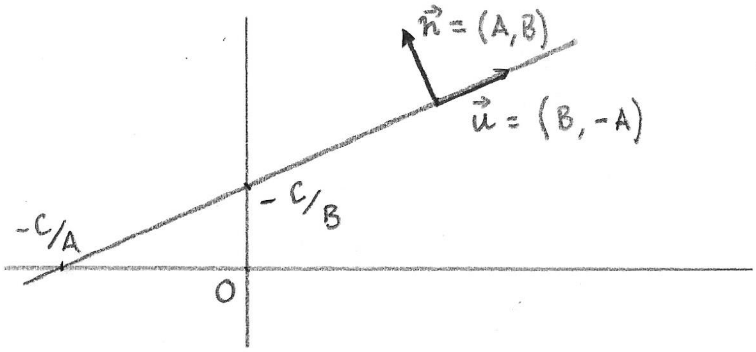
Πρόταση 1.14 *Εάν $P : (x_1, y_1)$ και $Q : (x_2, y_2)$ είναι δύο διαφορετικά σημεία της ευθείας ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$,*

α΄. Το διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$ είναι κάθετο προς το $\overrightarrow{PQ}$. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα συγγραμμικό με το διάνυσμα $\vec{n}$ λέγεται ***κάθετο διάνυσμα*** *της ευθείας ε.*

β΄. Το διάνυσμα $\vec{u} = (B, -A)$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{PQ}$. Κάθε μη μηδενικό διάνυσμα συγγραμμικό με το διάνυσμα $\vec{u}$ λέγεται ***διάνυσμα διεύθυνσης*** *της ευθείας ε.*

γ΄. Εάν $B \neq 0$, τότε
$$-\frac{A}{B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$
Ο αριθμός $\lambda = -A/B$ ονομάζεται ***συντελεστής διεύθυνσης*** *ή* ***κλήση*** *της ευθείας ε.*

δ΄. Η ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$, τέμνει τον x-άξονα στο σημείο με συντεταγμένες $(-C/A, 0)$ και τον y-άξονα στο σημείο με συντεταγμένες $(0, -C/B)$.



Σχήμα 1.32: Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + C = 0$.

Απόδειξη. Αφού $Ax_1 + By_1 + C = 0$ και $Ax_2 + By_2 + C = 0$, έχουμε $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$.

α΄. Το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ με το διάνυσμα

$\vec{n} = (A,\, B)$ είναι $A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) = 0$. Άρα $\vec{n}$ είναι κάθετο προς το $\overrightarrow{PQ}$.

β′. Το διάνυσμα $\vec{u} = (B,\, -A)$ είναι συγγραμμικό με το $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1,\, y_2 - y_1)$ εάν υπάρχει μ τέτοιο ώστε $x_2 - x_1 = \mu B$ και $y_2 - y_1 = -\mu A$. Αυτό το σύστημα εξισώσεων έχει μοναδική λύση για τα x, y όταν $A(x_2 - x_1) = -B(y_2 - y_1)$.

γ′. Εάν $B \neq 0$, διαιρώντας την $y_2 - y_1 = -\mu A$ με την $x_2 - x_1 = \mu B$, έχουμε

$$-\frac{A}{B} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,.$$

□

Δραστηριότητα 1.31 Εξηγήστε γιατί στην εξίσωση της ευθείας στο Σχήμα 1.32 οι συντελεστές είναι $A < 0$, $B > 0$ και $C < 0$. Τί θα άλλαζε στο Σχήμα εάν πολλαπλασιάζαμε και τους τρεις συντελεστές με -1;

Δραστηριότητα 1.32 Βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα, ένα διάνυσμα διεύθυνσης και την κλίση, για τις ακόλουθες ευθείες στο επίπεδο.

$$\alpha'.\ 2x + 3y = 5\,, \qquad \beta'.\ 3x = 2y - 5\,.$$

Θεωρούμε τις ευθείες ε_1 και ε_2, με εξισώσεις $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ και $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ αντίστοιχα, με $B_1B_2 \neq 0$ και συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_1 = -A_1/B_1$ και $\lambda_2 = -A_2/B_2$.
Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες εάν οι συντελεστές διεύθυνσης είναι ίσοι, $\lambda_1 = \lambda_2$.
Οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται κάθετα εάν το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης είναι -1, $\lambda_1\lambda_2 = -1$.
Εάν $A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0$, τότε οι ευθείες δεν είναι παράλληλες και τέμνονται σε ένα σημείο. Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες $(x_0,\, y_0)$ του κοινού σημείου, λύνουμε την εξίσωση

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 \\ -C_2 \end{bmatrix},$$

και βρίσκουμε

$$x_0 = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\,, \qquad y_0 = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}\,.$$

Δραστηριότητα 1.33 Βρείτε το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις

$$x - y - 1 = 0\,, \qquad x + 2y - 4 = 0\,.$$

1.17 Συντεταγμένες σημείου πάνω σε ευθεία

Εάν τα σημεία P_1, P_2 και P βρίσκονται πάνω σε μία ευθεία, έχουμε ορίσει τον απλό λόγο $\mu = (P_1\,P_2\,P) = \dfrac{(P_1P)}{(PP_2)}$, Ορισμός 1.11. Εάν τα σημεία έχουν συντεταγμένες $P_1 : (x_1,\, y_1)$, $P_2 : (x_2,\, y_2)$ και $P : (x,\, y)$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{i},\, \vec{j})$, τότε

$\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j}$ και $\overrightarrow{PP_2} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j}$. Από τη σχέση $\overrightarrow{P_1P} = \mu\overrightarrow{PP_2}$, συμπεραίνουμε οτι

$$x - x_1 = \mu(x_2 - x) \quad \text{και} \quad y - y_1 = \mu(y_2 - y)\,.$$

Άρα οι συντεταγμένες του σημείου P δίδονται συναρτήσει των συντεταγμένων των P_1 και P_2, και του απλού λόγου $\mu = (P_1\,P_2\,P)$ από τους τύπους

$$x = \frac{x_1 + \mu x_2}{1+\mu} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + \mu y_2}{1+\mu}\,. \tag{1.5}$$

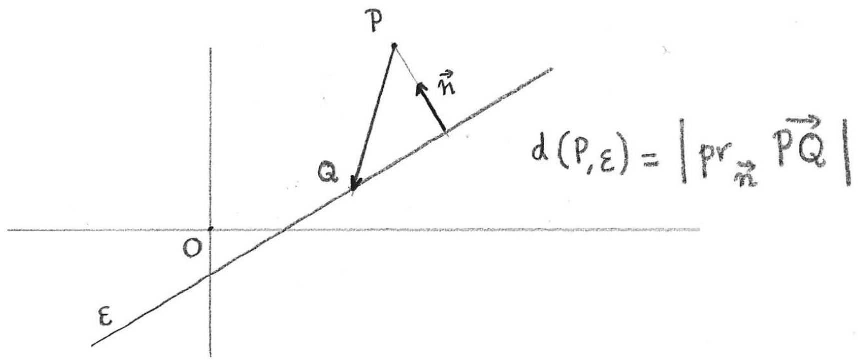
Όταν $\mu > 0$, το P βρίσκεται μεταξύ των P_1 και P_2, και οι τύποι δίδουν τις συντεταγμένες του σημείου που χωρίζει το διάστημα P_1P_2 σε δύο τμήματα με λόγο $\mu\,:\,1$.

Δραστηριότητα 1.34 Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου που χωρίζει το διάστημα AB, με $A : (3,\,-1)$ και $B : (-2,\,3)$ σε λόγο $3\,:\,2$.

1.18 Απόσταση σημείου από ευθεία

Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση $d(P,\,\varepsilon)$ του σημείου $P : (x_0,\,y_0)$ από την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$. Εάν Q είναι οποιοδήποτε σημείο της ευθείας ε, η απόσταση $d(P,\,\varepsilon)$ είναι ίση με το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{PQ}$ σε ένα κάθετο διάνυσμα $\vec{n}$ της ευθείας ε, Σχήμα 1.33,

$$d(P,\,\varepsilon) = \left|\mathrm{pr}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}\right|\,.$$



Σχήμα 1.33: Απόσταση σημείου από ευθεία.

Εάν το σημείο Q έχει συντεταγμένες $(x_1,\,y_1)$, τότε

$$\begin{aligned} |\mathrm{pr}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}| &= \frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{|(x_0 - x_1,\,y_0 - y_1)\cdot(A,\,B)|}{|\vec{n}|} \end{aligned}$$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{|\vec{n}|}$$
$$= \frac{|(Ax_0 + By_0 + C) - (Ax_1 + By_1 + C)|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Αλλά οι συντεταγμένες του σημείου Q ικανοποιούν την εξίσωση της ευθείας ε, δηλαδή $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Συνεπώς

$$|\mathrm{pr}_{\vec{n}}\overrightarrow{PQ}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Πρόταση 1.15 *Η απόσταση $d(P, \varepsilon)$ του σημείου $P : (x_0, y_0)$ από την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$ είναι*

$$d(P, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{1.6}$$

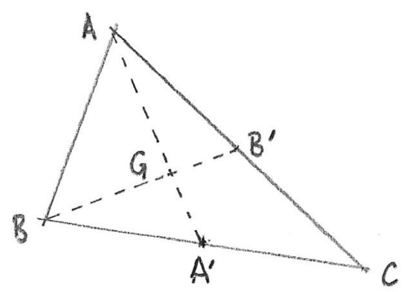
Δραστηριότητα 1.35 Βρείτε την απόσταση της ευθείας $2x + y - 3 = 0$ από το σημείο αναφοράς O.

1.19 Εφαρμογές στη γεωμετρία του τριγώνου

Θα αποδείξουμε το Θεώρημα των Διαμέσων: οι τρείς διάμεσοι ενός τριγώνου έχουν ένα κοινό σημείο, το **κέντρο βάρους** του τριγώνου.

Πρόταση 1.16 *Θεωρούμε το τρίγωνο ABC, του οποίου οι κορυφές έχουν συντεταγμένες (a_1, a_2), (b_1, b_2) και (c_1, c_2) αντίστοιχα. Το σημείο A' είναι το μέσο της πλευράς BC, το B' είναι το μέσο της πλευράς CA και το C' είναι το μέσο της πλευράς AB. Τότε οι ευθείες AA', BB' και CC' τέμνονται σε ένα σημείο G, με συντεταγμένες*

$$\left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right).$$



Σχήμα 1.34: Οι διάμεσοι τριγώνου.

Απόδειξη. Το σημείο $A' : (a'_1, a'_2)$ διαιρεί το διάστημα BC σε λόγο 1:1, και από την (1.5) έχουμε τις συντεταγμένες του

$$a_1' = \frac{b_1 + c_1}{2} \quad a_2' = \frac{b_2 + c_2}{2}.$$

Παρόμοια για το $B' : (b_1', b_2')$

$$b_1' = \frac{a_1 + c_1}{2} \quad b_2' = \frac{a_2 + c_2}{2}.$$

Το σημείο τομής των AA' και BB' έχει διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AA'}$ και επίσης $\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BB'}$. Δηλαδή υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί s και t τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{BB'}.$$

Σε συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{aligned} a_1 + s\left(\frac{b_1 + c_1}{2} - a_1\right) &= b_1 + t\left(\frac{a_1 + c_1}{2} - b_1\right) \\ a_2 + s\left(\frac{b_2 + c_2}{2} - a_2\right) &= b_2 + t\left(\frac{a_2 + c_2}{2} - b_2\right) \end{aligned}$$

και συγκεντρώνοντας τους όμοιους όρους έχουμε το σύστημα εξισώσεων που ικανοποιούν οι αριθμοί s, t:

$$\begin{aligned} \left(-a_1 + \frac{b_1}{2} + \frac{c_1}{2}\right) s + \left(b_1 - \frac{a_1}{2} - \frac{c_1}{2}\right) t = b_1 - a_1 \\ \left(-a_2 + \frac{b_2}{2} + \frac{c_2}{2}\right) s + \left(b_2 - \frac{a_2}{2} - \frac{c_2}{2}\right) t = b_2 - a_2 \end{aligned}$$

Τα διανύσματα $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$ δεν είναι παράλληλα και συνεπώς οι συντελεστές της πρώτης εξίσωσης δεν είναι πολλαπλάσια των συντελεστών της δεύτερης εξίσωσης. Άρα οι εξισώσεις έχουν μοναδική λύση, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε: $s = \frac{2}{3}$, $t = \frac{2}{3}$. Συμπεραίνουμε οτι σημείο τομής των ευθειών AA' και BB' είναι το σημείο G το οποίο ικανοποιεί

$$(AA'G) = (BB'G) = 2$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε οτι το σημείο τομής G' των AA' και CC' ικανοποιεί

$$(AA'G') = (CC'G') = 2,$$

και συνεπώς $G = G'$.

Τέλος μπορούμε να υπολογίσουμε το διάνυσμα θέσης και τις συντεταγμένες του G:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \\ &= \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})) \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \\ &= \left(\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3}\right). \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 1.13 Θεωρήστε το τρίγωνο με κορυφές $A : (1, 4)$, $B : (0, 0)$ και $C : (3, 1)$ και ύψη AA', BB', CC'. Ακολουθήστε τα παρακάτω βήματα για να δείξετε οτι τα τρία ύψη τέμνονται σε ένα σημείο, το **ορθόκεντρο** του τριγώνου ABC.

α′. Σχεδιάστε το τρίγωνο ABC.

β′. Η πλευρά BC έχει κλίση $\lambda_{BC} = 1/3$. Άρα η ευθεία AA' έχει κλίση -3 και περνάει από το σημείο $(1, 4)$. Συνεπώς η εξίσωση της AA' είναι $3x + y - 7 = 0$.

γ′. Η πλευρά CA έχει κλίση $\lambda_{CA} = -3/2$. Άρα η ευθεία BB' έχει κλίση $2/3$ και περνάει από το σημείο $(0, 0)$. Συνεπώς η εξίσωση της BB' είναι $2x - 3y = 0$.

δ′. Λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων και βρίσκουμε οτι τέμνονται στο σημείο $(\frac{21}{11}, \frac{14}{11})$.

ε′. Η ευθεία CC' έχει εξίσωση $x+4y-7 = 0$. Ελέγχουμε οτι το σημείο $(\frac{21}{11}, \frac{14}{11})$ βρίσκεται και σε αυτή την ευθεία.

1.20 Ασκήσεις

Άσκηση 1.6 Θεωρήστε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, $\vec{u}$ και $\vec{w}$, τέτοια ώστε $|\vec{u} + 2\vec{w}| = |\vec{u}|$. Δείξτε οτι $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = 0$. (Συγκρίνατε με την Άσκηση 1.2.) Παρατηρήστε οτι $\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = 0$ μπορεί να ισχύει, παρ' όλο που $\vec{w} \neq 0$ και $\vec{u} + \vec{w} \neq 0$!

Άσκηση 1.7 Σημειώστε δύο σημεία A, B, στο επίπεδο, και βρείτε σημεία C, D, E τέτοια ώστε:

α′. $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AB}|$ και $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

β′. $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$. Παρατηρήστε οτι τότε $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 2|\overrightarrow{AB}|^2$.

γ′. $|\overrightarrow{AE}| = 2|\overrightarrow{AB}|$ και $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{AB}|^2$.

Άσκηση 1.8 Αν τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ είναι κάθετα και έχουν ίδιο μήκος, δείξτε οτι και τα $2\vec{u}+3\vec{v}$, $6\vec{u} - 4\vec{v}$ είναι κάθετα.

Άσκηση 1.9 Θεωρήστε τρία σημεία O, A, B που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Εάν το σημείο X βρίσκεται στην ευθεία που περνάει από τα A και B, και ο απλός λόγος $(A\,B\,X) = \mu$, βρείτε a και b τέτοια ώστε $\overrightarrow{OX} = a\,\overrightarrow{OA} + b\,\overrightarrow{OB}$.

Άσκηση 1.10 Αποδείξτε οτι για κάθε τρίγωνο ABC ισχύει: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=0$. Εάν για τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ισχύει οτι $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}=0$, τότε αποδείξτε πως υπάρχει τρίγωνο ABC τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{w}$.

Άσκηση 1.11 Αν το τρίγωνο ABC είναι ισόπλευρο, a είναι το μήκος της πλευράς του, $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, και $\vec{v}=\overrightarrow{BC}$, υπολογίστε το μήκος του $\vec{u}+3\vec{v}$ ως συνάρτηση του a.

Άσκηση 1.12 Δείξτε οτι εάν $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ είναι μη συγγραμμικά διανύσματα και $a\,\overrightarrow{OA}=b\,\overrightarrow{OB}$, τότε $a=0$ και $b=0$.

Άσκηση 1.13 Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1.12 για να δείξετε οτι οι συντεταγμένες ενός σημείου P του επιπέδου ως προς ένα σύστημα αναφοράς $(O,\,\vec{u},\,\vec{v})$ είναι μοναδικές: εάν $(s,\,t)$ και $(x,\,y)$ είναι συντεταγμένες του ίδιου σημείου P, τότε $s=x$ και $t=y$.

Άσκηση 1.14 Δίδεται (μη εκφυλισμένο) παραλληλόγραμμο $OBCD$, και σημεία E, F τέτοια ώστε $\overrightarrow{OE}=a\,\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{OF}=b\,\overrightarrow{OD}$, με $b\neq 1$. Δείξτε οτι τα σημεία E, C, F είναι συγγραμμικά εάν και μόνον εάν $a=\dfrac{b}{b-1}$.
Υπόδειξη: Σχεδιάστε κατάλληλο σχήμα. Εκφράστε τη σχέση μεταξύ των $\overrightarrow{CE}$ και $\overrightarrow{CF}$ συναρτήσει των $\overrightarrow{OB}$ και $\overrightarrow{OD}$, και μετά χρησιμοποιήστε την 1.12.

Άσκηση 1.15 Σχεδιάστε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ABC. Θεωρήστε το (μη ορθοκανονικό) σύστημα αναφοράς $(A,\,\vec{u},\,\vec{w})$, όπου $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ και $\vec{w}=-\overrightarrow{AC}$.
Σημειώστε στο σχήμα τα σημεία P και Q με συντεταγμένες ως προς $(A,\,\vec{u},\,\vec{w})$, $P:(2,\,1)$ και $Q:(1,\,1)$.
Σχεδιάστε τις προβολές $\vec{r}=\mathrm{pr}_{\vec{u}}\overrightarrow{AP}$ και $\vec{t}=\mathrm{pr}_{\vec{w}}\overrightarrow{AP}$, και βρείτε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{r}$ και $\vec{t}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(A,\,\vec{u},\,\vec{w})$.
Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων με συντεταγμένες $(s,\,t)$ και $(x,\,y)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(A,\,\vec{u},\,\vec{w})$.

Άσκηση 1.16 Θεωρήστε το παραλληλόγραμμο $ABCD$. Τα σημεία A, B, C έχουν συντεταγμένες ως προς ένα (μη ορθοκανονικό) σύστημα αναφοράς $(O,\,\vec{u},\,\vec{v})$, $(a_1,\,a_2)$, $(b_1,\,b_2)$, $(c_1,\,c_2)$, αντίστοιχα. Υπολογίστε τις συντεταγμένες του σημείου D και του σημείου τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου. Υπολογίστε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ και $\overrightarrow{DA}$.

Άσκηση 1.17 Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{u}=(s,\,t)$, $\vec{v}=(-t,\,s)$ και $\vec{w}=(x,\,y)$. Υπολογίστε τα μέτρα των προβολών $\mathrm{pr}_{\vec{u}}\vec{w}$ και $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{w}$.

Άσκηση 1.18 Περιγράψτε γεωμετρικά τα ακόλουθα σύνολα στο επίπεδο

α'. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y + \sqrt{2} = 0\}$

β'. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -1\}$

γ'. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y-1)(2x-y) = 0\}$

δ'. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0\}$

ε'. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2xy\}$

Άσκηση 1.19 Χρησιμοποιήστε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta = 1$ για να απαλείψετε την παράμετρο ϑ από την παραμετρική περιγραφή του Παραδείγματος 1.12 και να βρείτε την αναλυτική εξίσωση του κύκλου.

Άσκηση 1.20 Θεωρήστε την ευθεία ε_t που περνάει από τα σημεία $P : (3, 2)$ και $Q_t : (t, 4)$ για $t \in \mathbb{R}$.

α'. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_t.

β'. Για ποιά τιμή του t είναι η ευθεία ε_t κάθετη στην ευθεία $\zeta : 2x - y + 5 = 0$;

γ'. Βρείτε την τιμή t_0 για την οποία η ευθεία ε_{t_0} είναι παράλληλη προς την ζ.

δ'. Για $t \neq t_0$, βρείτε το σημείο τομής της ε_t με την ζ.

Άσκηση 1.21 Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών που είναι παράλληλες προς την ευθεία $2x+3y+5=0$ και μαζί με τους άξονες του συστήματος αναφοράς περικλείουν τρίγωνο με εμβαδόν 6.

Άσκηση 1.22 Δίδεται η ευθεία ε με εξίσωση $2x-3y-3=0$. Βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού ως προς την ε του σημείου $P : (x_1, y_1)$, δηλαδή του σημείου $Q : (x_2, y_2)$ έτσι ώστε η ε να είναι η μεσοκάθετος του PQ.

Άσκηση 1.23 Σχεδιάστε τις ευθείες με τις ακόλουθες εξισώσεις ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

α') $2x + 3y + 6 = 0$	β') $2x + 3y - 6 = 0$
γ') $3x - 2y + 6 = 0$	δ') $3x - 2y - 6 = 0$

Άσκηση 1.24 Βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα, ένα διάνυσμα διεύθυνσης και την κλίση, για την ευθεία στο επίπεδο με παραμετρική περιγραφή $(x, y) = (1-2t, 3+t)$.

Άσκηση 1.25 Βρείτε το ύψος από το A του τριγώνου ABC, με $A : (-1, 3)$, $B : (1, -1)$, $C : (4, 1)$.

Κεφάλαιο 2

Γεωμετρικά διανύσματα στο χώρο

Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε τα γεωμετρικά διανύσματα στο χώρο και τις πράξεις μεταξύ τους. Ιδιαίτερη προσοχή δίδεται στην πράξη του εξωτερικού γινομένου, που περιγράφει τον προσανατολισμό και το μέγεθος του παραλληλογράμμου που ορίζεται από δύο διανύσματα στο χώρο. Επιλέγοντας ένα σύστημα αναφοράς, χρησιμοποιούμε αλγεβρικές μεθόδους για να μελετήσουμε επίπεδα και ευθείες στο χώρο. Τέλος εξετάζουμε ευκλείδειους μετασχηματισμούς του επιπέδου και του χώρου και τη δυϊκότητα μεταξύ μετασχηματισμών και αλλαγής συστήματος αναφοράς.

Εβδομάδα 3

2.1 Διανύσματα στο χώρο

Συμβολίζουμε E^3 τον Ευκλείδειο χώρο.

Ορισμός 2.1. Ένα σχήμα που αποτελείται από τέσσερα σημεία A, B, C, D στο E^3 και τα τμήματα των ευθειών AB, BC, CD και DA που τα συνδέουν, ονομάζεται **παραλληλόγραμμο** εάν το μέσο M του διαστήματος AC συμπίπτει με το μέσο του BD, (Σχήμα 1.1). Αυτό το παραλληλόγραμμο το συμβολίζουμε $ABCD$. Τα ευθύγραμμα τμήματα AB, BC, CD και DA είναι οι πλευρές του παραλληλογράμμου $ABCD$, ενώ τα σημεία A, B, C, D είναι οι κορυφές του παραλληλογράμμου $ABCD$.

Τα σύμβολα $ABCD$, $BCDA$, $CDAB$, $DABC$, $ADCB$, $DCBA$, $CBAD$ και $BADC$ δηλώνουν όλα το ίδιο παραλληλόγραμμο, με διαγωνίους AC και BD. Παρατηρήστε οτι το $ABCD$ και το $ABDC$ είναι και τα δύο παραλληλόγραμμα μόνον όταν $A = B$ και $C = D$.

Εάν τέσσερα σημεία του χώρου σχηματίζουν ένα παραλληλόγραμμο, αυτά βρίσκονται σε ένα επίπεδο: το επίπεδο που περιέχει τις διαγωνίους του παραλληλογράμμου. Η Πρόταση 1.1 ισχύει επίσης για παραλληλόγραμμα στο χώρο.

Ορισμός 2.2. Θεωρούμε τέσσερα σημεία P, Q, R, S στο E^3. Το **παραλληλεπίπεδο με ακμές** PQ**,** PR**,** PS είναι το σχήμα στο χώρο που αποτελείται από τα σημεία P, Q, R, S, T, U, V, W, τέτοια ώστε να σχηματίζουν τα παραλληλόγραμμα $PQWR$, $PRUS$, $PSVQ$, $TUSV$, $TVQW$ και $TWRU$, που ονομάζονται πλευρές του παραλληλεπιπέδου.
Τα ευθύγραμμα τμήματα PQ, RW, UT, SV, PR, QW, VT, SU, PS, QV, WT και RU είναι οι ακμές του παραλληλεπιπέδου, ενώ τα σημεία P, Q, R, S, T, U, V, W είναι οι κορυφές του παραλληλεπιπέδου με ακμές PQ, PR, PS.

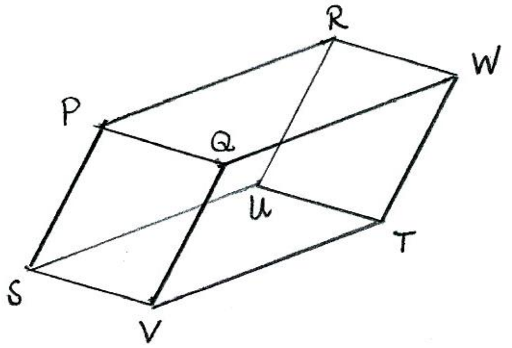
Το παραλληλεπίπεδο με ακμές PQ, PR, PS είναι *εκφυλισμένο* εάν τα σημεία P, Q, R, S βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο στο E^3.

Δραστηριότητα 2.1 Τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ αποτελούν ακμές παραλληλεπιπέδου, του οποίου η κορυφή απέναντι στην O είναι το σημείο D. Σχεδιάστε το παραλληλεπίπεδο και ονοματίστε τις κορυφές του.

Υπενθυμίζουμε οτι ένα γεωμετρικό διάνυσμα είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα πάνω στο οποίο διακρίνουμε τα δύο άκρα, την **αρχή** και το **πέρας** του διανύσματος. Στο Κεφάλαιο 1 μελετήσαμε διανύσματα που εφάπτονται στην επιφάνεια του επιπέδου E^2. Στο παρόν κεφάλαιο θα μελετήσουμε διανύσματα στο χώρο E^3.

Οι βασικές έννοιες που ορίσαμε για τα διανύσματα του επιπέδου, όπως

- σημείο εφαρμογής
- μέτρο ή μήκος



Σχήμα 2.1: Παραλληλεπίπεδο.

- φορέας
- συγγραμμικότητα
- παράλληλη μεταφορά
- ισοδυναμία διανυσμάτων
- φορά διανύσματος, ομόρροπα ή αντίρροπα διανύσματα

ορίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και για διανύσματα του χώρου.

Για παράδειγμα, εάν $\overrightarrow{AB}$ είναι ένα διάνυσμα, και A' ένα σημείο του χώρου E^3, λέμε οτι το διάνυσμα $\overrightarrow{A'B'}$ προκύπτει με παράλληλη μεταφορά του $\overrightarrow{AB}$ στο A', εάν το σημείο B' είναι τέτοιο ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ είναι παραλληλόγραμμο στο χώρο.

Οι πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων με το ίδιο σημείο εφαρμογής, και του πολλαπλασιασμού διανύσματος με πραγματικό αριθμό, ορίζονται για διανύσματα του χώρου, και ισχύουν οι ιδιότητες της Πρότασης 1.3. Για την απόδειξη της προσεταιριστικής ιδιότητας (Πρόταση 1.3, β′), εάν τα σημεία O, A, B, C δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, θεωρούμε οτι το Σχήμα 1.10 παριστάνει το παραλληλεπίπεδο που κατασκευάζεται με ακμές OA, OB, OC, και εφαρμόζουμε την Πρόταση 1.1.

Οι πράξεις είναι συμβατές με την παράλληλη μεταφορά σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου, Λήμμα 1.4. Για την απόδειξη αρκεί να θεωρήσουμε οτι εάν το A' δεν βρίσκεται στο επίπεδο των A, B, C, τότε το Σχήμα 1.11 παριστάνει το παραλληλεπίπεδο που κατασκευάζεται με ακμές AB, AC, AA'.

Δραστηριότητα 2.2 Για το παραλληλεπίπεδο της Δραστηριότητας 2.1 εκφράστε τα διανύσματα $\overrightarrow{OD}$ και $\overrightarrow{CD}$ συναρτήσει των $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα στο χώρο, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Η ορθογώνια προβολή του $\vec{u}$ στο $\vec{v}$, $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u}$, και το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u}\cdot\vec{v}$ ορίζονται όπως και για διανύσματα του επιπέδου:

- $\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u} = \overrightarrow{OA'}$, όπου A' είναι το σημείο στο οποίο η κάθετος από το A τέμνει την ευθεία OB,
- $\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{v}|(\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u})$, όπου η αλγεβρική τιμή $(\mathrm{pr}_{\vec{v}}\vec{u})$ είναι ως προς τον προσανατολισμό της OB που ορίζει το διάνυσμα $\vec{v}$.

Οι ιδιότητες του Λήμματος 1.10 και της Πρότασης 1.11 ισχύουν και για διανύσματα του χώρου.

Τέλος η γωνία $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ μεταξύ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ ορίζεται ως η κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$ στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία O, A, B. Δεν θα ορίσουμε προσημασμένη γωνία για δύο διανύσματα στο χώρο, καθώς γι' αυτό απαιτείται να προσδιορίσουμε τον προσανατολισμό του επιπέδου που περιέχει τα διανύσματα, και τούτο δεν μπορεί να γίνει με κανονικό τρόπο για όλα τα επίπεδα του χώρου.

2.2 Ελεύθερα διανύσματα στο χώρο

Ακριβώς όπως και στην περίπτωση του επιπέδου, εάν $\vec{u}$ είναι ένα διάνυσμα στο χώρο ορίζουμε το ελεύθερο διάνυσμα $[\vec{u}]$ να είναι το σύνολο όλων των εφαρμοστών διανυσμάτων στο χώρο, τα οποία προκύπτουν με παράλληλη μεταφορά του $\vec{u}$ σε κάθε σημείο του χώρου.

$$[\vec{u}] = \{\vec{v} \text{ διάνυσμα στο χώρο, τέτοιο ώστε } \vec{v} \sim \vec{u}\}\,.$$

Η παράλληλη μεταφορά είναι συμβατή με τις πράξεις διανυσμάτων στο χώρο που έχουμε περιγράψει: πρόσθεση διανυσμάτων, πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό, προβολή διανύσματος σε διάνυσμα, εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε τις αντίστοιχες πράξεις μεταξύ ελεύθερων διανυσμάτων.

Για παράδειγμα, εάν $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$, ορίζουμε το άθροισμα των ελεύθερων διανυσμάτων $[\overrightarrow{OA}]$ και $[\overrightarrow{OB}]$

$$\begin{aligned}[\overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{OB}] &= [\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}] \\ &= [\overrightarrow{OC}]\,.\end{aligned}$$

Εάν $\vec{u} \sim \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} \sim \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} \sim \overrightarrow{OC}$, τότε

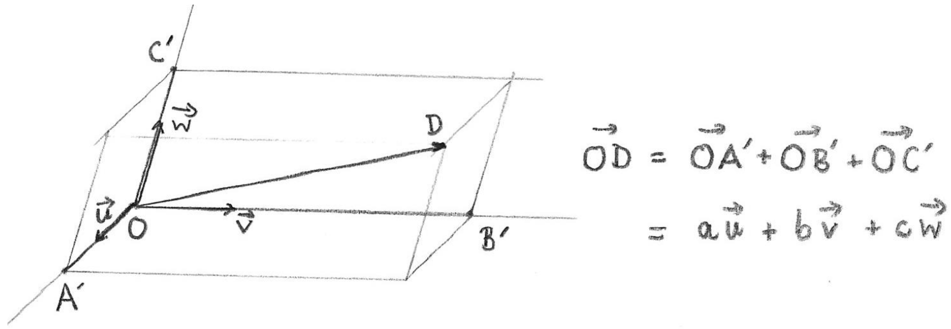
$$[\vec{u}] + [\vec{v}] = [\vec{w}]\,.$$

Πρόταση 2.1 *Εάν τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε για κάθε (ελεύθερο) διάνυσμα $\vec{z}$ του χώρου, υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί a, b, $c \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.$$

Απόδειξη. Αφού τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, δεν είναι οποιαδήποτε δύο από αυτά συγγραμμικά. Θεωρούμε σημεία O, A, B, C, D τέτοια ώστε $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ και $\vec{z} = vectOD$. Θεωρούμε το επίπεδο Π το οποίο περνάει από το σημείο D και είναι παράλληλο προς το επίπεδο που ορίζουν τα (μη συγγραμμικά) διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$. Αφού τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, ο φορέας του $\overrightarrow{OC}$ (δηλαδή η ευθεία OC) τέμνει το Π σε ένα σημείο C'. Ορίζουμε τον πραγματικό αριθμό c από τη σχέση $\overrightarrow{OC'} = c\overrightarrow{OC}$.

Με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε τα σημεία A' και B' πάνω στις ευθείες OA και OB αντίστοιχα, και τους πραγματικούς αριθμούς a και b έτσι ώστε $\overrightarrow{OA'} = a\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB'} = b\overrightarrow{OB}$.



Σχήμα 2.2: Ανάλυση διανύσματος σε τρεις συνιστώσες

Από την κατασκευή σχηματίζεται παραλληλεπίπεδο με ακμές OA', OB', OC', και κορυφή D, Σχήμα 2.2.

Συμπεραίνουμε οτι

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} \\ &= a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}.\end{aligned}$$

□

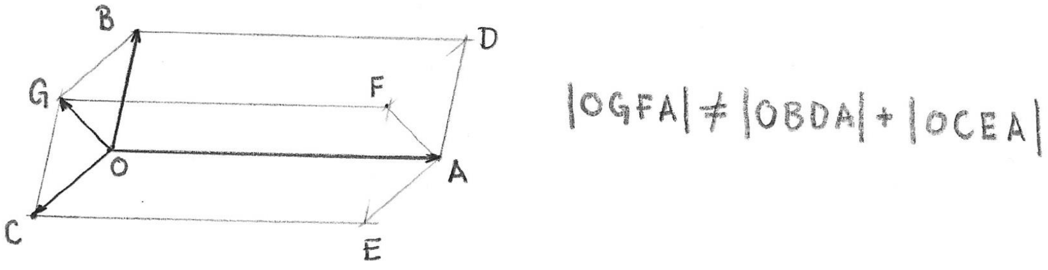
Η πρόταση δείχνει οτι εάν $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε κάθε διάνυσμα του χώρου μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Συμπεραίνουμε οτι κάθε συλλογή που περιέχει περισσότερα από τρία διανύσματα στο χώρο, είναι γραμμικά εξαρτημένη. Παρατηρούμε οτι τρία διανύσματα τα οποία, όταν τα μεταφέρουμε παράλληλα δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

2.3 Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων στο χώρο

Όταν μελετάμε διανύσματα στο χώρο αποκτά ενδιαφέρον μία άλλη πράξη, την οποία θα ορίσουμε με γεωμετρικό τρόπο στη συνέχεια.

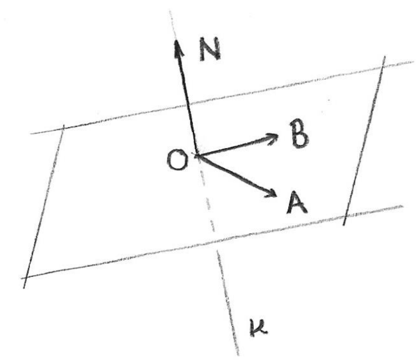
Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, και το παραλληλόγραμμο με πλευρές OA και OB, $OADB$, (Σχήμα 2.3. Το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου είναι ένας θετικός αριθμός, ο οποίος εξαρτάται από τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$, και τη γωνία μεταξύ τους. Μπορούμε να ορίσουμε μία πράξη η οποία, στο ζεύγος διανυσμάτων $\vec{u}$, $\vec{v}$ αντιστοιχεί το εμβαδόν $|OADB|$ του παραλληλογράμμου $OADB$. Όμως είναι αρκετά εύκολο να δούμε οτι, ακόμα και στο επίπεδο, αυτή η πράξη δεν διαθέτει μία από τις βασικές ιδιότητες που θα θέλαμε, την επιμεριστικότητα ως προς την πρόσθεση.



Σχήμα 2.3: Το εμβαδόν παραλληλογράμμου δεν είναι επιμεριστικό

Εάν $\overrightarrow{OC}$ είναι ένα τρίτο διάνυσμα και $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, η επιμεριστικότητα θα σήμαινε οτι το άθροισμα των εμβαδών των παραλληλογράμμων $OADB$ και $OAEC$ θα ήταν ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $OAFG$, $|OADB| + |OAEC| = |OAFG|$, πράγμα που εν γένει δεν ισχύει, Σχήμα 2.3.

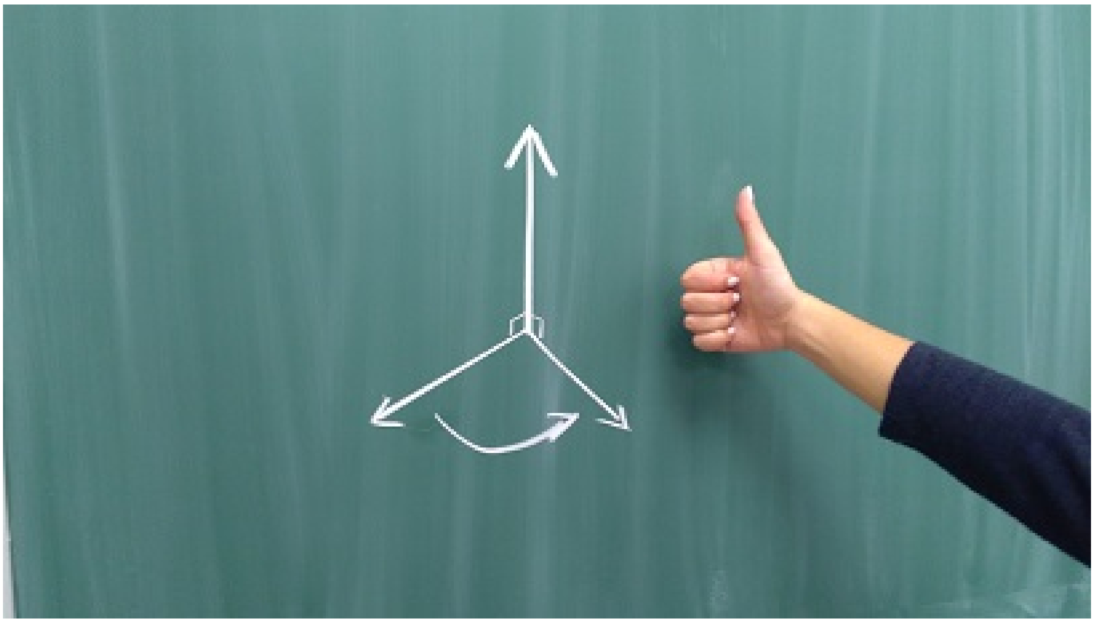
Για να ορίσουμε μία πράξη με χρήσιμες ιδιότητες πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν μας, εκτός από το εμβαδόν και τον προσανατολισμό του παραλληλογράμμου μέσα στο χώρο. Θεωρούμε ένα επίπεδο Π που περιέχει το σημείο αναφοράς O, και τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.



Σχήμα 2.4: Προσανατολισμός επιπέδου από κάθετο διάνυσμα

Θεωρούμε την ευθεία κ η οποία περνάει από το O και είναι κάθετη στο επίπεδο Π. Αυτό σημαίνει οτι η κ είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του Π που περνάει από το O, ειδικότερα στους φορείς των $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$. Τα μη μηδενικά διανύσματα με φορέα την κ διακρίνονται σε δύο κατηγορίες, ανάλογα με τη φορά τους.

Ορισμός 2.3. Εάν $\overrightarrow{ON}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα με φορέα κ, ορίζουμε τον **προσανατολισμό** του επιπέδου Π που αντιστοιχεί στο $\overrightarrow{ON}$ να είναι η φορά περιστροφής του επιπέδου που προσδιορίζουν τα δάκτυλα του **δεξιού** χεριού, όταν ο αντίχειρας δείχνει στην κατεύθυνση του $\overrightarrow{ON}$, Σχήμα 2.4, Σχήμα 2.5.



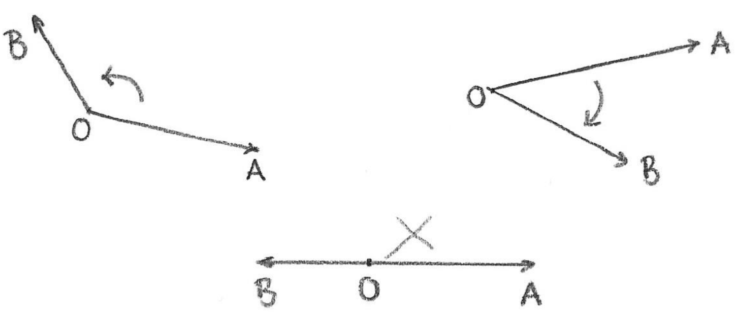
Σχήμα 2.5: Ο κανόνας του δεξιού χεριού

Είναι φανερό οτι ο προσανατολισμός του επιπέδου Π που αντιστοιχεί σε οποιοδήποτε διάνυσμα ομόρροπο με το $\overrightarrow{ON}$ είναι ο ίδιος με αυτόν που αντιστοιχεί στο $\overrightarrow{ON}$, ενώ ο προσανατολισμός που αντιστοιχεί σε ένα διάνυσμα αντίρροπο προς το $\overrightarrow{ON}$ είναι αντίθετος.

Παρατηρούμε οτι μία διάταξη στο ζεύγος μη συγγραμμικών διανυσμάτων $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ επίσης προσδιορίζει ένα προσανατολισμό στο επίπεδο Π: τη φορά περιστροφής του επιπέδου η οποία μεταφέρει το διάνυσμα $\overrightarrow{OA}$ σε ένα διάνυσμα ομόρροπο με το $\overrightarrow{OB}$, μετά από στροφή κατά κυρτή γωνία ϑ, με $0 < \vartheta < \pi$, Σχήμα 2.6.

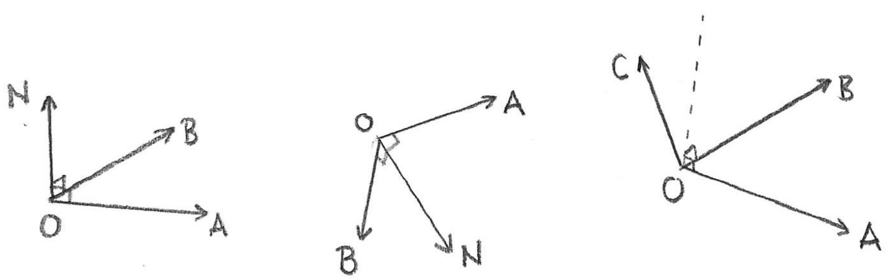
Η αντίθετη διάταξη των διανυσμάτων, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$, προσδιορίζει τον αντίθετο προσανατολισμό.

Με αυτόν τον τρόπο, στο διατεταγμένο ζεύγος διανυσμάτων $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ αντιστοιχεί μία φορά πάνω στην κάθετο κ: η φορά των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στον προσανατολισμό του επιπέδου που προσδιορίζει το διατεταγμένο ζεύγος $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



Σχήμα 2.6: Προσδιορισμός προσανατολισμού επιπέδου από διατεταγμένο ζεύγος διανυσμάτων

Ορισμός 2.4. Όταν ο προσανατολισμός του επιπέδου Π που προσδιορίζει το διατεταγμένο ζεύγος $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ συμπίπτει με τον προσανατολισμό που προσδιορίζει το κάθετο στο επίπεδο διάνυσμα $\overrightarrow{ON}$, λέμε οτι η διατεταγμένη τριάδα $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{ON})$ αποτελεί ένα **δεξιόστροφο σύστημα**, Σχήμα 2.7.
Γενικότερα, θεωρούμε τρία διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O, τα οποία δεν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. Η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ αποτελεί ένα **δεξιόστροφο σύστημα** εάν το πέρας C του διανύσματος $\vec{w}$ βρίσκεται στον ίδιο ημιχώρο του επιπέδου O, A, B με το κάθετο διάνυσμα $\overrightarrow{ON}$ που προσδιορίζει τον ίδιο προσανατολισμό με το διατεταγμένο ζεύγος $(\vec{u}, \vec{v})$.



Σχήμα 2.7: Δεξιόστροφα συστήματα διανυσμάτων

Δραστηριότητα 2.3 Με τρία μολύβια (ή τρία καλαμάκια, ή τρία σπίρτα) ελέγξτε οτι εάν η τριάδα $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα, το ίδιο ισχύει και για την τριάδα $(\vec{b}, \vec{c}, \vec{a})$, αλλά όχι για την τριάδα $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$.

Τώρα μπορούμε να ορίσουμε μία νέα πράξη μεταξύ δύο διανυσμάτων στο χώρο, η οποία σχετίζεται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα δύο διανύσματα, αλλά έχει την επιμεριστική ιδιότητα.

Ορισμός 2.5. Θεωρούμε το διάνυσμα $\overrightarrow{OX}$ το οποίο έχει φορέα τον κ, φορά αυτήν που προσδιορίζεται από τη διάταξη $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, και μέτρο ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με ακμές OA, OB. Ορίζουμε το **εξωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ να είναι το διάνυσμα

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{cases} \overrightarrow{OO} & \text{εάν τα } \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \text{ είναι συγγραμμικά} \\ \overrightarrow{OX} & \text{εάν τα } \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \text{ δεν είναι συγγραμμικά.} \end{cases}$$

Η παράλληλη μεταφορά διανυσμάτων είναι συμβατή με την πράξη του εξωτερικού γινομένου. Εάν $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$, ορίζουμε το εξωτερικό γινόμενο των ελεύθερων διανυσμάτων $[\overrightarrow{OA}]$ και $[\overrightarrow{OB}]$

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{OA}] \times [\overrightarrow{OB}] &= [\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}] \\ &= [\overrightarrow{OC}]\,. \end{aligned}$$

Εάν $\vec{u} \sim \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} \sim \overrightarrow{OB}$ και $\vec{w} \sim \overrightarrow{OC}$, τότε έχουμε την ισότητα ελεύθερων διανυσμάτων

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w}\,.$$

Το εξωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες.

Πρόταση 2.2 *Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ και το αριθμό a: Τότε*

α'. $\vec{x} \times \vec{y} = -\vec{y} \times \vec{x}$

β'. $(a\,\vec{x}) \times \vec{y} = a(\vec{x} \times \vec{y})$

γ'. $\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \times \vec{y}) + (\vec{x} \times \vec{z})$

Απόδειξη. Τα (α′) και (β′) αποδεικνύονται εύκολα από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου. Το (γ′) θα αποδειχθεί όταν ορίσουμε το μικτό γινόμενο, στη σελίδα 61.

□

2.4 Σύστημα αναφοράς στο χώρο

Στο χώρο E^3 θεωρούμε ένα σημείο O, και τρία διανύσματα με σημείο εφαρμογής το O, τα οποία δεν περιέχονται στο ίδιο επίπεδο, $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $w = \overrightarrow{OC}$. Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ προσδιορίζουν τρείς άξονες, $(\varepsilon, \vec{u})$, $(\delta, \vec{v})$, $(\zeta, \vec{w})$, οι οποίοι τέμνονται στο O. Η διατεταγμένη τριάδα αξόνων $(\varepsilon, \vec{u})$, $(\delta, \vec{v})$, $(\zeta, \vec{w})$ ονομάζεται **σύστημα αναφοράς** στο χώρο και θα το συμβολίζουμε $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Από την Πρόταση 2.1, οποιοδήποτε διάνυσμα στο χώρο $\vec{z}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}\,.$$

Ορισμός 2.6. Οι αριθμοί της διατεταγμένης τριάδας $(a,\ b,\ c)$ ονομάζονται **συντεταγμένες του διανύσματος** $\vec{z}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$.
Τα διανύσματα $a\vec{u}$, $b\vec{v}$, $c\vec{w}$ ονομάζονται **συνιστώσες** του $\vec{z}$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\ \vec{u},\ \vec{v},\ \vec{w})$.
Για κάθε σημείο D του χώρου, το διάνυσμα $\overrightarrow{OD}$ ονομάζεται **διάνυσμα θέσης** (ή **διανυσματική ακτίνα**) του D, και οι συντεταγμένες του $\overrightarrow{OD}$ είναι οι **συντεταγμένες του σημείου** D.

Δραστηριότητα 2.4 Σχεδιάστε ένα κανονικό τετράεδρο $OABC$, με πλευρά μήκους 1, τα διανύσματα $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$, και θεωρήστε το σύστημα αναφοράς $(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$. Σχεδιάστε το διάνυσμα $\vec{u}$ με συντεταγμένες $(1,\ 1,\ 1)$ και το διάνυσμα $\vec{w}$ με συντεταγμένες $(1,\ 1,\ -1)$.

Θα περιορίσουμε την προσοχή μας σε **ορθοκανονικά**, **δεξιόστροφα** συστήματα συντεταγμένων.

Ορισμός 2.7. Ένα **ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων** $(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ είναι ένα σύστημα συντεταγμένων στο οποίο τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ έχουν μέτρο 1, είναι κάθετα μεταξύ τους, και η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ αποτελεί δεξιόστροφο σύστημα διανυσμάτων.

Δραστηριότητα 2.5 Σχεδιάστε ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O,\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$. Συνήθως σχεδιάζουμε τα διανύσματα $\vec{j}$ και $\vec{k}$ στο επίπεδο του χαρτιού, και φανταζόμαστε το διάνυσμα $\vec{i}$ να βγαίνει έξω από το χαρτί.
Σημειώστε το σημείο με συντεταγμένες $(1,\ 2,\ 1)$ και το διάνυσμα με συντεταγμένες $(0,\ -2,\ 1)$.

Πρόταση 2.3 *Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{z}$ δίδονται από τα εσωτερικά γινόμενα του $\vec{z}$ με τα διανύσματα του συστήματος:*

$$\vec{z} = (\vec{z}\cdot\vec{i})\vec{i} + (\vec{z}\cdot\vec{j})\vec{j} + (\vec{z}\cdot\vec{k})\vec{k}\,.$$

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων δίδεται από το άθροισμα των γινομένων των αντίστοιχων συντεταγμένων. Εάν $\vec{z} = z_1\vec{i} + z_2\vec{j} + z_3\vec{k}$ και $\vec{y} = y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}$, τότε

$$\vec{z}\cdot\vec{y} = z_1y_1 + z_2y_2 + z_3y_3$$

και

$$|\vec{z}| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2}\,.$$

Δραστηριότητα 2.6 Οι συντεταγμένες δίδονται ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Εάν $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{w} = (-1, 1, -2)$, $A : (3, 4, -5)$ και $B : (2, 1, -2)$, υπολογίστε

α'. Τα εσωτερικά γινόμενα $\vec{u} \cdot \vec{w}$ και $\vec{u} \cdot \vec{u}$.

β'. Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{w}$.

γ'. Την απόσταση του σημείου A από το σημείο B.

δ'. Τις συντεταγμένες του μέσου M του διαστήματος AB, και την απόσταση του M από το σημείο αναφοράς O.

Θα υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ως προς ένα ορθοκανονικό, δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς.

Πρόταση 2.4 *Εάν τα διανύσματα $\vec{z}$ και $\vec{y}$ έχουν συντεταγμένες (z_1, z_2, z_3) και (y_1, y_2, y_3) αντίστοιχα, ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, τότε*

$$\vec{z} \times \vec{y} = (z_2y_3 - z_3y_2)\vec{i} + (z_3y_1 - z_1y_3)\vec{j} + (z_1y_2 - z_2y_1)\vec{k}\,. \tag{2.1}$$

Απόδειξη. Εάν $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι ορθοκανονικό και δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς, το παραλληλόγραμμο που προσδιορίζουν τα $\vec{i}, \vec{j}$ είναι ορθογώνιο, με εμβαδόν 1, και ισχύει η σχέση

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} = -\vec{j} \times \vec{i}$$

Ανάλογα έχουμε

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} = -\vec{k} \times \vec{j}$$

και

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} = -\vec{i} \times \vec{k}\,.$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα του εξωτερικού γινομένου, την οποία θα αποδείξουμε στην Πρόταση 2.7 χωρίς τη χρήση συντεταγμένων, έχουμε

$$\begin{aligned}
\vec{z} \times \vec{y} &= (z_1\vec{i} + z_2\vec{j} + z_3\vec{k}) \times (y_1\vec{i} + y_2\vec{j} + y_3\vec{k}) \\
&= z_1y_1\vec{i} \times \vec{i} + z_1y_2\vec{i} \times \vec{j} + z_1y_3\vec{i} \times \vec{k} \\
&\quad + z_2y_1\vec{j} \times \vec{i} + z_2y_2\vec{j} \times \vec{j} + z_2y_3\vec{j} \times \vec{k} \\
&\quad + z_3y_1\vec{k} \times \vec{i} + z_3y_2\vec{k} \times \vec{j} + z_3y_3\vec{k} \times \vec{k} \\
&= z_1y_1\vec{0} + z_1y_2\vec{k} - z_1y_3\vec{j} \\
&\quad - z_2y_1\vec{k} + z_2y_2\vec{0} + z_2y_3\vec{i} \\
&\quad + z_3y_1\vec{j} - z_3y_2\vec{i} + z_3y_3\vec{0}\,,
\end{aligned}$$

όπου συμβολίζουμε $\vec{0}$ το μηδενικό διάνυσμα. Καταλήγουμε στην

$$\vec{z} \times \vec{y} = (z_2y_3 - z_3y_2)\vec{i} + (z_3y_1 - z_1y_3)\vec{j} + (z_1y_2 - z_2y_1)\vec{k}\,.$$

$\square$

Για να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του εξωτερικού γινομένου, διευκολύνει ο συμβολισμός των 3×3 οριζουσών: Εάν a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 και c_1, c_2, c_3 είναι 9 ποσότητες, για τις οποίες ορίζονται πράξεις πολλαπλασιασμού και πρόσθεσης, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1 \,. \tag{2.2}$$

Τις ορίζουσες θα μελετήσουμε διεξοδικά στη Γραμμική Άλγεβρα. Ειδικά για να υπολογίσουμε 3×3 ορίζουσες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο σχήμα: Ξαναγράφουμε τις δύο πρώτες γραμμές ως τέταρτη και πέμπτη γραμμή, και υπολογίζουμε τα αθροίσματα των γινομένων κατά μήκος των διαγωνίων, με $+$ για τις διαγώνιες από τα αριστερά προς τα δεξιά, και με $-$ για τις διαγώνιες από τα δεξιά προς τα αριστερά

$$\begin{array}{ccccccccc} + & & & & & & & & - \\ & a_1 & & a_2 & & a_3 & & & \\ + & & \searrow & & \swarrow & & & & - \\ & b_1 & & b_2 & & b_3 & & & \\ + & & \searrow\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\swarrow & & & & - \\ & c_1 & & c_2 & & c_3 & & & \\ & & \searrow\!\!\swarrow & & \searrow\!\!\swarrow & & & & \\ & a_1 & & a_2 & & a_3 & & & \\ & & \swarrow & & \searrow & & & & \\ & b_1 & & b_2 & & b_3 & & & \end{array} = +a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3 - a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1 \,.$$

Στην περίπτωση του εξωτερικού γινομένου $\vec{z} \times \vec{y}$, υπολογίζουμε την ορίζουσα με πρώτη γραμμή τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, και τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{z}$ και $\vec{y}$ στη δεύτερη και την τρίτη γραμμή αντίστοιχα. Κάθε όρος αυτής της ορίζουσας είναι ένα από τα διανύσματα του συστήματος αναφοράς πολλαπλασιασμένο με έναν αριθμό. Συγκρίνοντας την 2.1 με την 2.2, έχουμε

$$\vec{z} \times \vec{y} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \,.$$

Δραστηριότητα 2.7 Οι συντεταγμένες δίδονται ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Εάν $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{w} = (-1, 1, -2)$, $A : (3, 4, -5)$ και $B : (2, 1, -2)$, υπολογίστε

α′. Το εξωτερικό γινόμενο $\vec{u} \times \vec{w}$.

β′. Ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που περνάει από το σημείο αναφοράς και τα σημεία A και B.

γ′. Το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

2.5 Μικτό γινόμενο

Θεωρούμε τρία διανύσματα $\vec{x} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{y} = \overrightarrow{OB}$ και $\vec{z} = \overrightarrow{OC}$ με κοινό σημείο εφαρμογής O που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, και εξετάζουμε το εσωτερικό γινόμενο του εξωτερικού γινομένου των $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ με το διάνυσμα $\overrightarrow{OC}$. Θα δούμε οτι $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}$ είναι ένας αριθμός του οποίου η απόλυτη τιμή είναι ίση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

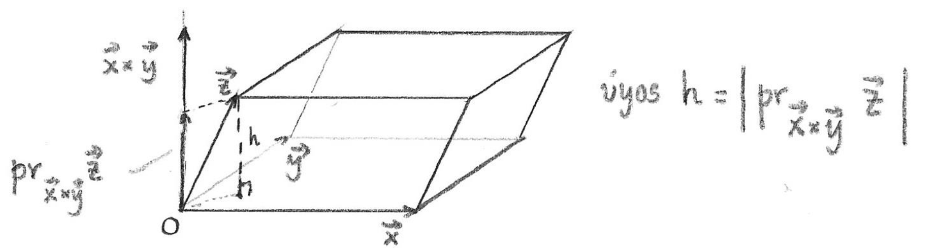
Πράγματι, το εσωτερικό γινόμενο $(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}$ είναι

$$\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| \left(\mathrm{pr}_{\vec{OA} \times \vec{OB}} \overrightarrow{OC}\right) .$$

Το διάνυσμα $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$. Το μέτρο της προβολής του $\overrightarrow{OC}$ στο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο του παραλληλογράμμου $OADB$ είναι το ύψος του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Άρα η απόλυτη τιμή του εσωτερικού γινομένου,

$$\left|(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OC}\right| = \left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| \left|\mathrm{pr}_{\vec{OA} \times \vec{OB}} \overrightarrow{OC}\right| ,$$

είναι ακριβώς το εμβαδόν της βάσης του παραλληλεπιπέδου επί το ύψος του, δηλαδή ο όγκος του παραλληλεπιπέδου, Σχήμα 2.8.



Σχήμα 2.8: Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.

Εάν η διατεταγμένη τριάδα $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα, τότε ο αριθμός $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ είναι θετικός, δες Άσκηση 2.4, ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι αρνητικός.

Ορισμός 2.8. Το **μικτό γινόμενο** τριών διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ είναι ο αριθμός

$$[\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z}] = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}\,.$$

Συγκεντρώνουμε τις προηγούμενες παρατηρήσεις σε μία Πρόταση.

Πρόταση 2.5 *Εάν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, η απόλυτη τιμή του μικτού γινομένου $[\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z}]$ είναι ίση με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.*
Το μικτό γινόμενο είναι θετικό εάν το σύστημα $(\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο και αρνητικό εάν το $(-\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο.
Το μικτό γινόμενο είναι μηδέν εάν και μόνον εάν τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ είναι συνεπίπεδα.

Παρατηρούμε οτι η απόλυτη τιμή του γινομένου $(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}$ είναι ίση με την απόλυτη τιμή του γινομένου $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$, αφού και οι δύο είναι ίσες με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα διανύσματα $\vec{y}$, $\vec{z}$, $\vec{x}$. Στην Άσκηση 2.5 έχουμε δείξει οτι $(\vec{y},\, \vec{z},\, \vec{x})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα ακριβώς όταν $(\vec{x},\, \vec{y}),\, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα. Συμπεραίνουμε οτι τα μικτά γινόμενα $(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x}$ και $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}$ έχουν το ίδιο πρόσημο. Καταλήγουμε οτι

$$(\vec{y} \times \vec{z}) \cdot \vec{x} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z}\,.$$

Συνδυάζοντας με την αντιμεταθετική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου έχουμε επίσης

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})\,,$$

δηλαδή, στον ορισμό του μικτού γινομένου μπορούμε να εναλλάξουμε το εξωτερικό και το εσωτερικό γινόμενο. Συνοψίζουμε αυτές και άλλες ιδιότητες του μικτού γινομένου στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 2.6 *Το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ ικανοποιεί τις ταυτότητες*

α΄. $[\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z}] = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot (\vec{y} \times \vec{z})$,

β΄. $[\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z}] = [\vec{y},\, \vec{z},\, \vec{x}] = [\vec{z},\, \vec{x},\, \vec{y}]$,

γ΄. $-[\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z}] = [\vec{z},\, \vec{y},\, \vec{x}] = [\vec{y},\, \vec{x},\, \vec{z}] = [\vec{x},\, \vec{z},\, \vec{y}]$.

Τώρα μπορούμε να αποδείξουμε την επιμεριστική ιδιότητα για το εξωτερικό γινόμενο:

Πρόταση 2.7 *Εάν $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ είναι διανύσματα στο χώρο,*

$$\vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{z}\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το διάνυσμα

$$\vec{b} = \vec{x} \times (\vec{y} + \vec{z}) - \vec{x} \times \vec{y} - \vec{x} \times \vec{z}\,.$$

Θα δείξουμε οτι $|\vec{b}| = 0$, και συνεπώς οτι $\vec{b} = 0$. Χρησιμοποιώντας την επιμεριστική ιδιότητα για το εσωτερικό γινόμενο και την Πρόταση 2.6.α′ έχουμε

$$\begin{aligned}
\vec{b}\cdot\vec{b} &= \vec{b}\cdot(\vec{x}\times(\vec{y}+\vec{z}) - \vec{x}\times\vec{y} - \vec{x}\times\vec{z}) \\
&= \vec{b}\cdot\vec{x}\times(\vec{y}+\vec{z}) - \vec{b}\cdot\vec{x}\times\vec{y} - \vec{b}\cdot\vec{x}\times\vec{z} \\
&= (\vec{b}\times\vec{x})\cdot(\vec{y}+\vec{z}) - (\vec{b}\times\vec{x})\cdot\vec{y} - (\vec{b}\times\vec{x})\cdot\vec{z} \\
&= (\vec{b}\times\vec{x})\cdot((\vec{y}+\vec{z}) - \vec{y} - \vec{z}) \\
&= 0\,.
\end{aligned}$$

□

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μικτό γινόμενο χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς,

$$\begin{aligned}
\vec{x}\cdot(\vec{y}\times\vec{z}) &= (x_1\vec{i} + x_2\vec{j} + x_3\vec{k})\,\cdot \\
&\quad\cdot\Big[(y_2z_3 - y_3z_2)\vec{i} + (y_3z_1 - y_1z_3)\vec{j} + (y_1z_2 - y_2z_1)\vec{k}\Big] \\
&= x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 \\
&= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\,.
\end{aligned}$$

Δραστηριότητα 2.8 Οι συντεταγμένες δίδονται ως προς ένα ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$. Εάν $\vec{u} = (1,\, 2,\, 1)$, $\vec{w} = (-1,\, 1,\, -2)$, $A : (3,\, 4,\, -5)$ και $B : (2,\, 1,\, -2)$, υπολογίστε το μικτό γινόμενο $[\vec{u},\, \vec{w},\, \overrightarrow{AB}]$.

2.6 Δις εξωτερικό γινόμενο

Το γινόμενο $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})$ είναι κάθετο προς το $\vec{y}\times\vec{z}$, και συνεπώς βρίσκεται στο επίπεδο των $\vec{y}$, $\vec{z}$. Ο ακόλουθος υπολογισμός εκφράζει το $\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z})$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{y}$ και $\vec{z}$.

$$\begin{aligned}
\vec{x}\times(\vec{y}\times\vec{z}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_2z_3 - y_3z_2 & y_3z_1 - y_1z_3 & y_1z_2 - y_2z_1 \end{vmatrix} \\
&= \vec{i}\,(x_2(y_1z_2 - y_2z_1) - x_3(y_3z_1 - y_1z_3)) \\
&\quad + \vec{j}\,(x_3(y_2z_3 - y_3z_2) - x_1(y_1z_2 - y_2z_1)) \\
&\quad + \vec{k}\,(x_1(y_3z_1 - y_1z_3) - x_2(y_2z_3 - y_3z_2)) \\
&= \vec{i}\,(y_1(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - z_1(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)) \\
&\quad + \vec{j}\,(y_2(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - z_2(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)) \\
&\quad + \vec{k}\,(y_3(x_1z_1 + x_2z_2 + x_3z_3) - z_3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)) \\
&= (\vec{x}\cdot\vec{z})\vec{y} - (\vec{x}\cdot\vec{y})\vec{z}\,.
\end{aligned}$$

Πρόταση 2.8 *Εάν $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ είναι διανύσματα στο χώρο E^3, το δις εξωτερικό γινόμενο δίδεται από τις σχέσεις*

$$\begin{aligned}\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) &= (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z}\,, \\ (\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z} &= (\vec{x} \cdot \vec{z})\vec{y} - (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}\,.\end{aligned}$$

2.7 Επίπεδα στο χώρο

Στο χώρο E^3 επιλέγουμε ένα δεξιόστροφο, ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Ένα επίπεδο στο χώρο E^3 προσδιορίζεται εάν γνωρίζουμε 3 σημεία του που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία, ή εάν γνωρίζουμε ένα σημείο του επιπέδου και ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο.

Παράδειγμα 2.1 Θεωρούμε τα σημεία $P : (1, 0, 1)$, $Q : (1, 1, 0)$, $R : (0, 1, 1)$. Εάν $X : (x, y, z)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου που περνάει από τα τρία σημεία, υπάρχουν αριθμοί s και t τέτοιοι ώστε $\overrightarrow{PX} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}$. Υπολογίζουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων

$$\overrightarrow{PX} = (x-1, y, z-1)\,, \qquad \overrightarrow{PQ} = (0, 1, -1)\,, \qquad \overrightarrow{PR} = (-1, 1, 0)\,,$$

και βρίσκουμε τις παραμετρικές εξισώσεις για τις συντεταγμένες του σημείου X,

$$x = 1 - t\,, \qquad y = s + t\,, \qquad z = 1 - s\,.$$

Αντικαθιστώντας τα $t = 1 - x$ και $s = 1 - z$ στην $y = s + t$ έχουμε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου

$$x + y + z = 2\,.$$

Γενικά, θεωρούμε τρία σημεία $P : (x_1, y_1, z_1)$, $Q : (x_2, y_2, z_2)$ και $R(x_3, y_3, z_3)$ που δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ δεν είναι συγγραμμικά. Εάν $X : (x, y, z)$ είναι το γενικό σημείο του επιπέδου Π που περνάει από τα τρία σημεία, τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ γράφεται ως γραμμικός σύνδυασμος των $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$. Δηλαδή υπάρχουν αριθμοί s και t τέτοιοι ώστε να ισχύει

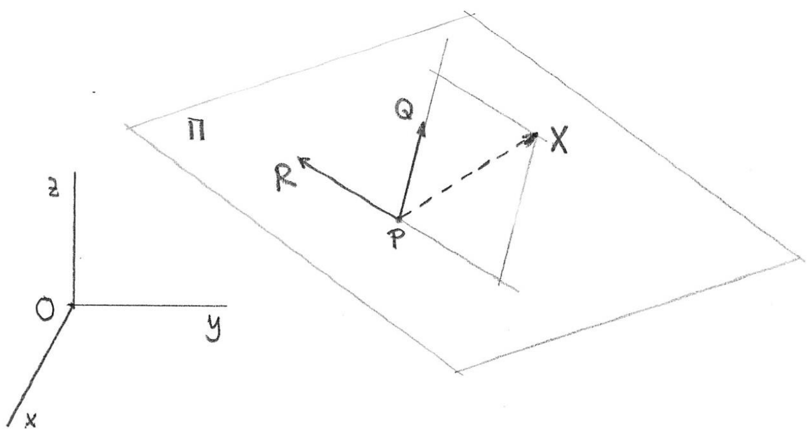
$$\overrightarrow{PX} = s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}\,. \tag{2.3}$$

Έτσι βρίσκουμε την παραμετρική περιγραφή για το διάνυσμα θέσης του γενικού σημείου X του επιπέδου:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{PQ} + t\overrightarrow{PR}\,,$$

και αφού $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{OX} = (1 - s - t)\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{OR}\,.$$



Σχήμα 2.9: Το επίπεδο που προσδιορίζεται από τα σημεία P, Q και R.

Δραστηριότητα 2.9 Γράψτε τις προηγούμενες σχέσεις σε συντεταγμένες.

Από την εξίσωση 2.3 έχουμε τρείς παραμετρικές εξισώσεις για τις συντεταγμένες του X:

$$\begin{aligned} x - x_1 &= s(x_2 - x_1) + t(x_3 - x_1)\,, \\ y - y_1 &= s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1)\,, \\ z - z_1 &= s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1)\,. \end{aligned}$$

Από αυτές τις εξισώσεις μπορούμε να απαλείψουμε τα s και t, για να βρούμε την εξίσωση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες $(x,\, y,\, z)$ του γενικού σημείου του επιπέδου Π. Αφού $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ δεν είναι συγγραμμικά, τουλάχιστον ένα από τα $x_3 - x_1$, $y_3 - y_1$, $z_3 - z_1$ δεν είναι μηδέν. Εάν $x_3 - x_1 \neq 0$, επιλέγουμε την πρώτη εξίσωση και λύνουμε ως προς t,

$$t = \frac{(x - x_1) - s(x_2 - x_1)}{x_3 - x_1}\,. \tag{2.4}$$

Επίσης, αφού $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ δεν είναι συγγραμμικά, οι λόγοι $(x_2 - x_1) : (x_3 - x_1)$, $(y_2 - y_1) : (y_3 - y_1)$ και $(z_2 - z_1) : (z_3 - z_1)$ δεν είναι όλοι ίσοι. Συνεπώς τουλάχιστον ένα από τα $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$ και $(x_2 - x_1)(z_3 - z_1) - (z_2 - z_1)(x_3 - x_1)$ δεν είναι μηδέν. Εάν $(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) \neq (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)$, αντικαθιστούμε το t από την 2.4 στην εξίσωση $y - y_1 = s(y_2 - y_1) + t(y_3 - y_1)$ και λύνουμε ως προς s,

$$s = \frac{(x - x_1)(y_3 - y_1) - (y - y_1)(x_3 - x_1)}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1)}\,. \tag{2.5}$$

Αντικαθιστούμε το t από την 2.4 στην εξίσωση $z - z_1 = s(z_2 - z_1) + t(z_3 - z_1)$ και συγκεντρώνουμε τους όρους που περιέχουν s για να πάρουμε μία εξίσωση της μορφής

$$z - z_1 = s\alpha + \beta\,. \tag{2.6}$$

Δραστηριότητα 2.10 Υπολογίστε τους συντελεστές α και β στην εξίσωση 2.6.

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε το s από την 2.5 στην εξίσωση 2.6 και έχουμε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου Π,

$$\begin{aligned} z - z_1 &= \frac{(z_2-z_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(z_3-z_1)}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)}(x-x_1) + \\ &\quad + \frac{(x_2-x_1)(z_3-z_1)-(z_2-z_1)(x_3-x_1)}{(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)}(y-y_1)\,. \end{aligned}$$

Για να γράψουμε την εξίσωση σε πιο σύντομη μορφή, θέτουμε

$$\begin{aligned} A &= (y_2-y_1)(z_3-z_1)-(z_2-z_1)(y_3-y_1) \\ B &= (z_2-z_1)(x_3-x_1)-(x_2-x_1)(z_3-z_1) \\ C &= (x_2-x_1)(y_3-y_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1) \end{aligned}$$

και τελικά έχουμε την εξίσωση

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0\,. \tag{2.7}$$

Δραστηριότητα 2.11 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $P:(1,\,1,\,1)$, $Q:(2,\,1,\,2)$ και $R:(0,\,2,\,1)$.

Ένας συντομότερος τρόπος να βρούμε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία P, Q και R βασίζεται στο εξωτερικό γινόμενο: Τα διανύσματα $\overrightarrow{PQ}$ και $\overrightarrow{PR}$ βρίσκονται στο επίπεδο Π, άρα το εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο Π. Το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$, που εφάπτεται στο επίπεδο, είναι κάθετο στο εξωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$. Συνεπώς το μικτό γινόμενο μηδενίζεται,

$$\overrightarrow{PX}\cdot(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})=0\,.$$

Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες έχουμε

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

και καταλήγουμε πάλι στην εξίσωση 2.7.

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0\,.$$

Δραστηριότητα 2.12 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $P:(1,\,1,\,1)$, $Q:(2,\,1,\,2)$ και $R:(0,\,2,\,1)$ χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο $\vec{PQ}\times\vec{PR}$.

Εάν στην εξίσωση 2.7 θέσουμε $D=-(Ax_1+By_1+Cz_1)$, έχουμε μια εξίσωση της μορφής

$$Ax+By+Cz+D=0\,. \tag{2.8}$$

Ο άλλος τρόπος να προσδιορίσουμε ένα επίπεδο στο χώρο είναι να γνωρίζουμε ένα σημείο του επιπέδου, $P(x_1,\, y_1,\, z_1)$ και ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο, $\vec{n}$ με συντεταγμένες $(k,\, \ell,\, m)$. Τότε εάν $X\,(x,\, y,\, z)$ είναι τυχόν σημείο του επιπέδου, το διάνυσμα $\overrightarrow{PX}$ είναι κάθετο στο $\vec{n}$ και συνεπώς

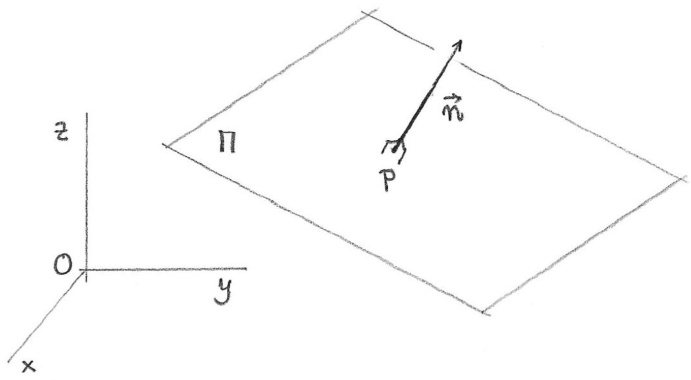
$$\overrightarrow{PX} \cdot \vec{n} = 0\,,$$

ή

$$(x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1) \cdot (k,\, \ell, m) = 0\,,$$

δηλαδή

$$kx + \ell y + mz - (kx_1 + \ell y_1 + mz_1) = 0\,.$$



Σχήμα 2.10: Το επίπεδο που περνάει από το σημείο P, και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n}$.

Βλέπουμε οτι και σε αυτή την περίπτωση η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου είναι της μορφής 2.8. Θα δείξουμε οτι αυτή είναι η γενική εξίσωση επιπέδου.

Πρόταση 2.9 *Ο γεωμετρικός τόπος μίας εξίσωσης της μορφής*

$$Ax + By + Cz + D = 0\,,$$

όπου τα A, B, C δεν είναι και τα τρία μηδέν, είναι ένα επίπεδο στο χώρο E^3.

Απόδειξη. Εάν $(x_1,\, y_1,\, z_1)$ είναι ένα σημείο που ικανοποιεί την εξίσωση

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0\,,$$

τότε για κάθε άλλο σημείο $(x,\, y,\, z)$ που την ικανοποιεί έχουμε

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0\,,$$

δηλαδή το διάνυσμα $(x - x_1,\, y - y_1,\, z - z_1)$ είναι κάθετο στο $(A,\, B,\, C)$. Συνεπώς το σημείο με συντεταγμένες $(x,\, y,\, z)$ βρίσκεται στο επίπεδο που περνάει από το $(x_1,\, y_1,\, z_1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα (A, B, C) εάν και μόνο εάν $Ax + By + Cz + D = 0$.

$\square$

Από τις τιμές των συντελεστών A, B, C, D προσδιορίζουμε τη θέση του επιπέδου σε σχέση με τους άξονες του συστήματος αναφοράς.

- Εάν $B = C = 0$ και $A \neq 0$, τότε η εξίσωση γίνεται
$$x = -\frac{D}{A}$$
και παριστάνει ένα επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο $O\,y\,z$.

- Εάν $A = 0$, $BC \neq 0$, τότε η εξίσωση γίνεται
$$By + Cz + D = 0$$
και παριστάνει το επίπεδο που είναι παράλληλο στο άξονα Ox και τέμνει το επίπεδο $O\,y\,z$ στην ευθεία με εξίσωση $By + Cz + D = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{j}, \vec{k})$.

- Εάν $D = 0$, τότε η εξίσωση
$$Ax + By + Cz = 0$$
παριστάνει επίπεδο που περνάει από το σημείο αναφοράς O.

- Εάν $ABCD \neq 0$, τότε το επίπεδο τέμνει τους άξονες Ox, Oy, Oz σε τρία σημεία, $(-\frac{D}{A}, 0, 0)$, $(0, -\frac{D}{B}, 0)$, $(0, 0, -\frac{D}{C})$ αντίστοιχα.

  Αντίστροφα, το επίπεδο που τέμνει τους άξονες Ox, Oy, Oz στα α, β, γ αντίστοιχα, με $\alpha\beta\gamma \neq 0$, έχει εξίσωση
$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 1\,.$$

Να προστεθούν δραστηριότητες και παράδειγμα!

2.8 Απόσταση σημείου από επίπεδο

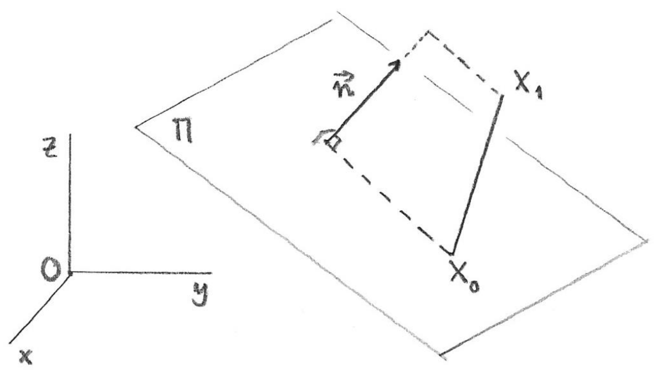
Θεωρούμε ένα επίπεδο Π και ένα σημείο X_1 στο E^3. Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου X_1 από το επίπεδο Π.

Έστω οτι η εξίσωση του επιπέδου Π είναι $Ax + By + Cz + D = 0$, και $\vec{n} = (A, B, C)$ είναι ένα κάθετο διάνυσμα στο Π. Εάν $X_0 : (x_0, y_0, z_0)$ είναι ένα σημείο του επιπέδου Π, και $X_1 : (x_1, y_1, z_1)$ σημείο του χώρου E^3, η προσημασμένη απόσταση του X_1 από το επίπεδο Π είναι το προσημασμένο μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{X_0X_1}$ στο $\vec{n}$, Σχήμα 2.11.

$$\begin{aligned} d(X_1, \Pi) &= (\mathrm{pr}_{\vec{n}}\,\overrightarrow{X_0X_1}) = \frac{\overrightarrow{X_0X_1}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|} \\ &= \frac{(x_1-x_0)A+(y_1-y_0)B+(z_1-z_0)C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \\ &= \frac{Ax_1+By_1+Cz_1-(Ax_0+By_0+Cz_0)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \end{aligned}$$

αλλά $Ax_0+By_0+Cz_0=-D$, άρα

$$d = \frac{Ax_1+By_1+Cz_1+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \tag{2.9}$$



Σχήμα 2.11: Η απόσταση σημείου από επίπεδο.

Η απόσταση d είναι θετική εάν το X_1 βρίσκεται στον ημίχωρο προς τον οποίο κατευθύνεται το διάνυσμα $\vec{n}=(A, B, C)$, και αρνητική στην αντίθετη περίπτωση.

Δραστηριότητα 2.13 Υπολογίστε την απόσταση του σημείου με συντεταγμένες $(1, 1, 2)$ από το επίπεδο με εξίσωση $x+y-z=1$.

2.9 Δίεδρη γωνία

Να συμπληρωθεί

2.10 Ασκήσεις

Άσκηση 2.1 Σχεδιάστε τρία διανύσματα $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$ που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.
Συμπληρώστε στο σχέδιο το παραλληλεπίπεδο που κατασκευάζεται με ακμές AB, AC και AD (προσέξτε να μην δείχνει ορθογώνιο) έτσι ώστε AA', BB', CC' και DD' να είναι οι διαγώνιοι του παραλληλεπιπέδου.
Εκφράστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB'}$, $\overrightarrow{AC'}$, $\overrightarrow{AD'}$ και τα διανύσματα $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, $\overrightarrow{DD'}$ ως γραμμικούς συνδυασμούς των $\vec{x}$, $\vec{y}$ και $\vec{z}$.

Άσκηση 2.2 Σχεδιάστε ένα τετράεδρο $ABCD$, με $\vec{x} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{y} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{z} = \overrightarrow{AD}$.

α΄. Σημειώστε στο σχήμα το σημείο M που είναι το μέσο της ακμής CD και το σημείο P που είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου BCD. Δείξτε οτι $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.

β΄. Έστω Q το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου ABD. Εκφράστε το $\overrightarrow{CQ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{x}$, $\vec{y}$ και $\vec{z}$.

γ΄. Δείξτε οτι AP και CQ τέμνονται σε ένα σημείο S τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z})$.

δ΄. Υπολογίστε τον απλό λόγο (APS).

ε΄. Αποδείξτε οτι οι τέσσερεις ευθείες που ενώνουν κάθε κορυφή ενός τετραέδρου με το κέντρο βάρους της απέναντι τριγωνικής πλευράς τέμνονται σε ένα σημείο.

Άσκηση 2.3 Σχεδιάστε ένα κανονικό τετράεδρο $ABCD$ με μήκος πλευράς 1, και θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$. Ποιές από τις ακόλουθες τριάδες είναι δεξιόστροφες, και ποιές δεν είναι;

$$(\vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w}), \qquad (\vec{v},\, \vec{w},\, \vec{u}), \qquad (\vec{u},\, \vec{w},\, \vec{v}), \qquad (\vec{w},\, -\vec{v},\, \vec{u})\,.$$

Άσκηση 2.4 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ με κοινό σημείο εφαρμογής O. Δείξτε οτι $(\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα εάν και μόνον εάν $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} > 0$.

Άσκηση 2.5 Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ με κοινό σημείο εφαρμογής O. Δείξτε οτι εάν $(\vec{x},\, \vec{y},\, \vec{z})$ είναι δεξιόστροφο σύστημα τότε το ίδιο ισχύει για τις διατεταγμένες τριάδες $(\vec{y},\, \vec{z},\, \vec{x})$, $(\vec{z},\, \vec{x},\, \vec{y})$ και $(\vec{y},\, \vec{x},\, -\vec{z})$.

Άσκηση 2.6 Δείξτε οτι

$$[\vec{x}\,\vec{y}\,\vec{z}] = [\vec{y}\,\vec{z}\,\vec{x}] = [\vec{z}\,\vec{x}\vec{y}]\,,$$

$$[\vec{z}\,\vec{y}\,\vec{x}] = [\vec{y}\,\vec{x}\,\vec{z}] = [\vec{x}\,\vec{z}\,\vec{y}]\,.$$

Άσκηση 2.7 Εάν $\vec{a} \neq 0$ και $\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{a}) \times \vec{b}$, τί συμπέρασμα μπορείτε να βγάλετε για το $\vec{b}$; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Άσκηση 2.8 Δίνεται ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ στο χώρο. Αποδείξτε οτι τα διανύσματα $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.
Υπόδειξη: Εάν τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε μπορούμε να βρούμε αριθμούς r, s, t που να μην είναι όλοι μηδέν, τέτοιους ώστε $r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} = \vec{0}$.

Άσκηση 2.9 Υπολογίστε το εξωτερικό γινόμενο $\vec{v} \times \vec{u}$ των διανυσμάτων (με συντεταγμένες ως προς ορθοκανονικό δεξιόστροφο σύστημα αναφοράς) $\vec{v} = (1,\, 2,\, 1)$, $\vec{u} = (3,\, 1,\, 2)$.
Εξετάστε αν τα διανύσματα $\vec{v}$, $\vec{u}$ και $\vec{w} = (4,\, 5,\, 0)$ είναι συνεπίπεδα.

Άσκηση 2.10 Υπολογίστε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $ABCD$ όπου $A : (0,\, 1,\, 1)$, $B : (2,\, 1,\, 0)$ και $C : (1,\, 1,\, 2)$.
Υπολογίστε το εμβαδόν των άλλων δύο παραλληλογράμμων που έχουν ως τρεις από τις κορυφές τους τα σημεία A, B, C. Τι παρατηρείτε; Πως εξηγείται αυτό;

Άσκηση 2.11 Για την πράξη του πολλαπλασιασμού αριθμών, γνωρίζουμε οτι εάν $x \neq 0$ τότε

$$xy = xz \quad \Rightarrow \quad y = z$$

Ισχύει το ανάλογο αποτέλεσμα για την πράξη του εξωτερικού γινομένου; Με άλλα λόγια, ισχύει οτι, αν $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ είναι τυχαία διανύσματα στο χώρο με $\vec{x} \neq \vec{0}$, τότε

$$\vec{x} \times \vec{y} = \vec{x} \times \vec{z} \quad \Rightarrow \quad \vec{y} = \vec{z};$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε την εξίσωση $\vec{x} \times (\vec{y} - \vec{z}) = \vec{0}$.

Άσκηση 2.12 Έστω ορθοκανονικό σύστημα του χώρου $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Να βρεθεί ένα άλλο σύστημα του χώρου $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, με $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, τέτοιο ώστε τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ να είναι ορθογώνια ανά δύο.

Άσκηση 2.13 Για το εξωτερικό γινόμενο δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα: $\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z})$ δεν είναι πάντα ίσο με $(\vec{x} \times \vec{y}) \times \vec{z}$. Υπάρχει όμως μία άλλη σχέση, **η ταυτότητα Jacobi**.
Δείξτε οτι, για τυχαία διανύσματα $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ στο χώρο,

$$\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}) + \vec{z} \times (\vec{x} \times \vec{y}) + \vec{y} \times (\vec{z} \times \vec{x}) = \vec{0}.$$

Άσκηση 2.14 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $P : (2,\, 3,\, 1)$, $Q : (3,\, 1,\, 4)$ και $R : (2,\, 1,\, 5)$.

Εβδομάδα 4

2.11 Παραμετρική και αναλυτική περιγραφή ευθείας στο χώρο

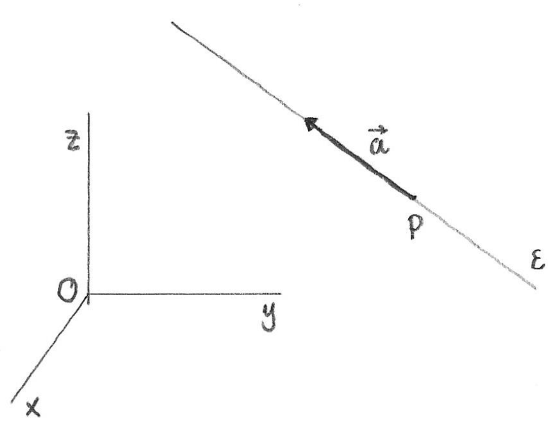
Μία ευθεία ε στο χώρο E^3 προσδιορίζεται αναλυτικά από ένα σύστημα δύο εξισώσεων, ως η τομή δύο επιπέδων. Εναλλακτικά, μπορούμε να προσδιορίσουμε παραμετρικά μία ευθεία στο χώρο E^3 εάν γνωρίζουμε δύο σημεία P και Q πάνω στην ε, ή ένα σημείο P πάνω στην ε και ένα μη μηδενικό διάνυσμα παράλληλο προς την ε.

Θεωρούμε ένα σημείο $P : (x_1, y_1, z_1)$, και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a} = (u, v, w)$. Εάν X είναι το γενικό σημείο στην ευθεία που περνάει από το P και έχει διεύθυνση παράλληλη προς το $\vec{a}$, τότε $\overrightarrow{PX} = s\vec{a}$ και η παραμετρική περιγραφή του διανύσματος θέσης του X είναι

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s\vec{a}\,. \tag{2.10}$$

Από την 2.10 έχουμε τρεις παραμετρικές σχέσεις για τις συντεταγμένες του X,

$$x = x_1 + su\,, \qquad y = y_1 + sv\,, \qquad z = z_1 + sw\,.$$



Σχήμα 2.12: Η ευθεία στο χώρο.

Αφού $\vec{a} \neq 0$, τουλάχιστον ένα από τα u, v, w δεν είναι μηδέν. Σε κάθε περίπτωση απαλείφοντας το s από τις τρεις παραμετρικές σχέσεις, βρίσκουμε δύο εξισώσεις. Για παράδειγμα, εάν $u \neq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} v(x - x_1) &= u(y - y_1)\,, \\ w(x - x_1) &= u(z - z_1)\,, \end{aligned}$$

δηλαδή ένα σύστημα δύο εξισώσεων, που παριστάνει την ευθεία ως τομή δύο επιπέδων.

Δραστηριότητα 2.14 Βρείτε το σύστημα δύο εξισώσεων που περιγράφει ως τομή δύο επιπέδων την ευθεία που περνάει από το σημείο $P : (1,\, -3,\, 1)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{a} = (0,\, 1,\, -2)$.

Γενικότερα, θεωρούμε το σύστημα δύο εξισώσεων

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0\,, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Κάθε εξίσωση παριστάνει ένα επίπεδο, και οι λύσεις του συστήματος δίδουν τις συντεταγμένες των σημείων που βρίσκονται στην τομή των δύο επιπέδων.

- Εάν υπάρχει αριθμός μ τέτοιος ώστε

  $$(A_1,\, B_1,\, C_1) = \mu(A_2,\, B_2,\, C_2) \quad \text{και} \quad D_1 = \mu D_2\,,$$

  οι δύο εξισώσεις ικανοποιούνται ακριβώς από τα ίδια σημεία, δηλαδή τα επίπεδα συμπίπτουν.

- Εάν υπάρχει αριθμός μ τέτοιος ώστε

  $$(A_1,\, B_1,\, C_1) = \mu(A_2,\, B_2,\, C_2) \quad \text{αλλά} \quad D_1 \neq \mu D_2\,,$$

  τότε τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα: είναι και τα δύο κάθετα στο διάνυσμα $(A_1,\, B_1,\, C_1)$ και δεν υπάρχουν κοινά σημεία.

- Εάν τα διανύσματα (A_1, B_1, C_1) και (A_2, B_2, C_2) δεν είναι παράλληλα, τότε ούτε τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα, και τέμνονται σε μία ευθεία. Σε αυτή την περίπτωση τουλάχιστον ένα από τα $A_1B_2-B_1A_2$, $A_1C_2 - C_1A_2$, $B_1C_2 - C_1B_2$ δεν είναι μηδέν.

Για να βρούμε την παραμετρική περιγραφή της ευθείας στην οποία τέμνονται τα δύο επίπεδα, μπορούμε να λύσουμε το σύστημα των δύο γραμμικών εξισώσεων, όπως γνωρίζουμε από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Παράδειγμα 2.2 Οι εξισώσεις

$$\begin{aligned} x - y + z - 2 &= 0\,, \\ 2x - 2y + 2z - 4 &= 0 \end{aligned}$$

προσδιορίζουν το ίδιο επίπεδο. Άρα το σύστημα εξισώσεων δεν προσδιορίζει μία ευθεία.

Τα επίπεδα με εξισώσεις

$$\begin{aligned} x - y + z - 2 &= 0\,, \\ 2x - 2y + 2z - 2 &= 0 \end{aligned}$$

είναι παράλληλα. Άρα το σύστημα εξισώσεων δεν προσδιορίζει μία ευθεία.

Τα επίπεδα με εξισώσεις

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & z & - & 2 & = & 0\,, \\ 2x & + & y & + & z & - & 1 & = & 0 \end{array} \tag{2.11}$$

τέμνονται σε μία ευθεία. Για να βρούμε την παραμετρική περιγραφή της λύνουμε το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Μετά από απαλοιφή Gauss βρίσκουμε τον επεκτεταμένο πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Βρίσκουμε ένα σημείο της ευθείας υπολογίζοντας μία ειδική λύση του μη ομογενούς συστήματος, $P\,:\,(1,\,-1,\,0)$. Θέτουμε $z = 1$ στο ομογενές σύστημα και βρίσκουμε ένα διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας, $\vec{a} = (-\frac{2}{3},\,\frac{1}{3},\,1)$. Άρα η ευθεία με αναλυτική περιγραφή 2.11 έχει παραμετρική περιγραφή

$$(x,\,y,\,z) = (1,\,-1,\,0) + t(-\frac{2}{3},\,\frac{1}{3},\,1)\,.$$

Δραστηριότητα 2.15 Βρείτε μία παραμετρική περιγραφή της ευθείας στην οποία τέμνονται τα επίπεδα με εξισώσεις $y + z - 1 = 0$ και $y + 2z - 1 = 0$, λύνοντας το σύστημα των δύο εξισώσεων (στο $\mathbb{R}^3$!).

Για έναν εναλλακτικό τρόπο να βρούμε την παραμετρική περιγραφή της ευθείας, παρατηρούμε οτι το διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας είναι κάθετο στα $(A_1,\,B_1,\,C_1)$ και $(A_2,\,B_2,\,C_2)$, άρα είναι συγγραμμικό με το διάνυσμα $(A_1,\,B_1,\,C_1) \times (A_2,\,B_2,\,C_2)$. Άρα η παραμετρική παράσταση της ευθείας είναι

$$(x,\,y,\,z) = (x_0,\,y_0,\,z_0) + t(A_1,\,B_1,\,C_1) \times (A_2,\,B_2,\,C_2)\,,$$

όπου $(x_0,\,y_0,\,z_0)$ είναι ένα σημείο της ευθείας. Για παράδειγμα, εάν $A_1B_2 - B_1A_2 \neq 0$, μπορούμε να θέσουμε $z_0 = 0$ και να λύσουμε τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} A_1x_0 + B_1y_0 &= -D_1 \\ A_2x_0 + B_2y_0 &= -D_2 \end{aligned}$$

για να βρούμε το σημείο $(x_0,\,y_0,\,0)$,

$$x_0 = \frac{-(D_1B_2 - B_1D_2)}{A_1B_2 - B_1A_2}, \qquad y_0 = \frac{-(A_1D_2 - D_1A_2)}{A_1B_2 - B_1A_2}\,.$$

Παράδειγμα 2.3 Τα κάθετα διανύσματα των επιπέδων με εξισώσεις 2.11 είναι $(1,\,-1,\,1)$ και $(2,\,1,\,1)$ αντίστοιχα. Το διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας στην οποία τέμνονται τα δύο επίπεδα είναι το εξωτερικό γινόμενο

$(1, -1, 1) \times (2, 1, 1) = (-2, 1, 3)$. Θέτουμε $z = 0$ στις εξισώσεις 2.11, και βρίσκουμε ένα σημείο της ευθείας, $P : (1, -1, 0)$. Άρα η παραμετρική περιγραφή της ευθείας είναι

$$(x, y, z) = (1, -1, 0) + t(-2, 1, 3)\,.$$

Παρατηρήστε οτι ωαν και βρήκαμε διαφορετικά διανύσματα διεύθυνσης, αυτά είναι συγγραμμικά, και συνεπώς οι δύο προσεγγίσεις δίδουν την ίδια ευθεία.

Δραστηριότητα 2.16 Βρείτε μία παραμετρική περιγραφή της ευθείας στην οποία τέμνονται τα επίπεδα με εξισώσεις $y + z - 1 = 0$ και $y + 2z - 1 = 0$, χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων συντελεστών.

2.12 Απόσταση σημείου από ευθεία

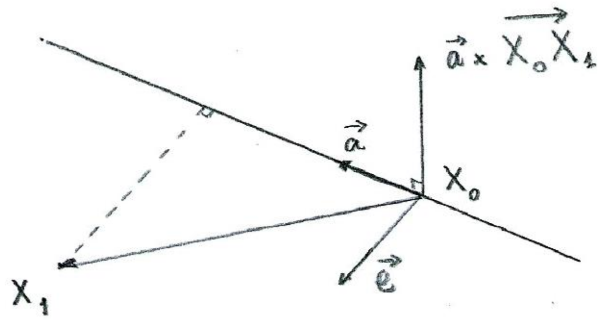
Θεωρούμε μία ευθεία ε και ένα σημείο X_1 στο E^3. Θέλουμε να υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου X_1 από την ευθεία ε. Μία ευθεία στο χώρο δεν έχει μοναδική κάθετη διεύθυνση. Πρώτα θα βρούμε το επίπεδο Π που περιέχει την ευθεία ε και το σημείο X_1, ώστε να προσδιορίσουμε τη διεύθυνση σε αυτό το επίπεδο που είναι κάθετη προς την ευθεία.

Έστω οτι η ευθεία ε έχει παραμετρική περιγραφή $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX_0} + t\vec{a}$ με $X_0 : (x_0, y_0, z_0)$ και $\vec{a} = (u, v, w)$, και το σημείο X_1 έχει συντεταγμένες (x_1, y_1, z_1), Σχήμα 2.13.

Το διάνυσμα διεύθυνσης της ε, και το διάνυσμα $\overrightarrow{X_0X_1}$ εφάπτονται στο επίπεδο Π. Άρα το διάνυσμα $\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}$ είναι κάθετο στο επίπεδο Π. Το διάνυσμα

$$\vec{e} = (\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}) \times \vec{a}$$

είναι κάθετο προς το $\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}$, άρα εφάπτεται στο επίπεδο Π. Είναι επίσης κάθετο στην ευθεία ε. Άρα αυτό το διανυσμα δίδει τη διεύθυνση της ευθείας από το X_1 που είναι κάθετη στην ε.



Σχήμα 2.13: Κάθετος από σημείο προς ευθεία στο χώρο.

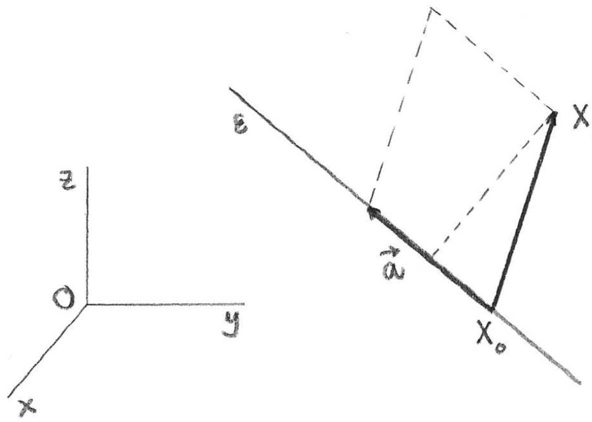
Συμπεραίνουμε οτι η απόσταση του X_1 από την ευθεία είναι το μέτρο της προβολής του $\overrightarrow{X_0X_1}$ πάνω στο $\vec{e}$, Σχήμα 2.13:

$$\begin{aligned} d(X_1,\, \varepsilon) &= |\mathrm{pr}_{\vec{e}}\overrightarrow{X_0X_1}| = \left|\frac{\vec{e}\cdot\overrightarrow{X_0X_1}}{|\vec{e}|}\right| \\ &= \frac{|((\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1})\times\vec{a})\cdot\overrightarrow{X_0X_1}|}{|(\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1})\times\vec{a}|}. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε οτι μπορούμε να αλλάξουμε τη θέση των πράξεων στο μικτό γινόμενο, δηλαδή έχουμε $((\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1})\times\vec{a})\cdot\overrightarrow{X_0X_1} = (\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1})\cdot(\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1})$. Παρατηρούμε οτι $\vec{a}$ είναι κάθετο στο $\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1}$, και συνεπώς το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1}$ είναι ίσο με το γινόμενο των μέτρων των δύο διανυσμάτων, $|(\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1})\times\vec{a}| = |(\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1})|\,|\vec{a}|$. Άρα

$$\begin{aligned} d(X_1,\, \varepsilon) &= \frac{|(\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1})\cdot(\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1})|}{|\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1}|\,|\vec{a}|} \\ &= \frac{|\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1}|}{|\vec{a}|}. \end{aligned}$$

Το τελικό αποτέλεσμα έχει μία ενδιαφέρουσα ερμηνεία. $|\vec{a}\times\overrightarrow{X_0X_1}|$ είναι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με μία πλευρά το διάνυσμα $\vec{a}$ πάνω στην ευθεία ε, και άλλη πλευρά το διάνυσμα $\overrightarrow{X_0X_1}$ με αρχή το σημείο X_0 της ευθείας ε και πέρας το σημείο X_1, Σχέδιο 2.14. Όταν διαιρέσουμε αυτό το εμβαδόν με το μήκος της πλευράς $\vec{a}$, παίρνουμε το ύψος του παραλληλογράμμου, δηλαδή την κάθετη απόσταση από το σημείο X_1 στην ευθεία ε.



Σχήμα 2.14: Η απόσταση σημείου από ευθεία στο χώρο.

Παράδειγμα 2.4 Θα υπολογίσουμε την απόσταση του σημείου $X_1 : (1,\, 2,\, 3)$ από την ευθεία $\varepsilon : (x,\, y,\, z) = (t,\, t,\, t)\, , t \in \mathbb{R}$.

Επιλέγουμε το σημείο $X_0 : (0,\, 0,\, 0)$ στην ευθεία ε. Τότε $\overrightarrow{X_0X_1} = 1,\, 2,\, 3)$, ενώ ένα διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας είναι το $\vec{a} = (1,\, 1,\, 1)$, και $\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1} = (1,\, -2,\, 1)$. Η απόσταση του X_1 από την ευθεία ε είναι

$$d(X_1,\, \varepsilon) = \frac{\sqrt{1+4+1}}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{2}\, .$$

Θα βρούμε και το σημείο X_2 της ε στο οποίο καταλήγει η κάθετος από το X_1. Το διάνυσμα $\overrightarrow{X_1X_2}$ είναι συγγραμμικό με το

$$\vec{e} = (\vec{a} \times \overrightarrow{X_0X_1}) \times \vec{a} = (1,\, -2,\, 1) \times (1,\, 1,\, 1) = (-3,\, 0,\, 3)\, .$$

Άρα το σημείο X_2 ανήκει στην ευθεία ε και στην ευθεία $\kappa : (x,\, y,\, z) = (1,\, 2,\, 3) + s(-1,\, 0,\, 1)$. Δηλαδή X_2 είναι το σημείο για το οποίο υπάρχουν s και t τέτοια ώστε

$$(1 - s,\, 2,\, 3 + s) = (t,\, t,\, t)\, .$$

Συμπεραίνουμε οτι $t = 2$, και το σημείο Q_2 έχει συντεταγμένες (2, 2, 2).

Δραστηριότητα 2.17 Η ευθεία ε περνάει από το σημείο P : (2, 2, 2) και έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a} = (1, 2, -1)$. Βρείτε το κάθετο διάνυσμα από το σημείο αναφοράς O στην ευθεία ε, καθώς και την απόσταση από το O στην ε.

2.13 Ασύμβατες ευθείες

Θεωρούμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 στο χώρο E^3: η ε_1 περνάει από το σημείο X_1 και έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a}_1$, ενώ η ε_2 περνάει από το σημείο X_2 και έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a}_2$. Οι παραμετρικές εκφράσεις για τα γενικά σημεία των δύο ευθειών είναι

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OX_1} + t\vec{a}_1 \qquad t \in \mathbb{R}\,, \\ \overrightarrow{OX} &= \overrightarrow{OX_2} + s\vec{a}_2 \qquad s \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Εάν οι ευθείες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{X_1X_2}$, $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$ είναι συνεπίπεδα και

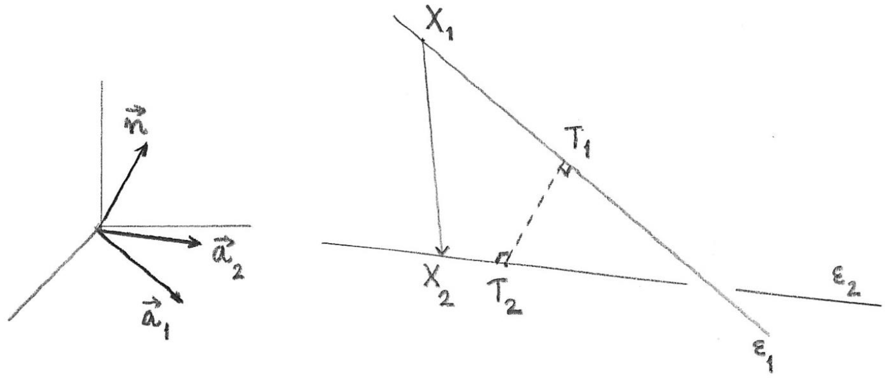
$$[\overrightarrow{X_1X_2},\, \vec{a}_1,\, \vec{a}_2] = 0\,.$$

Στην αντίθετη περίπτωση οι ευθείες ονομάζονται **ασύμβατες**. Ασύμβατες ευθείες έχουν *μοναδική κοινή κάθετο ευθεία* κ. Το διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{n}$ της κ είναι κάθετο στο $\vec{a}_1$ και το $\vec{a}_2$, και μπορούμε να θεωρήσουμε

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2\,.$$

Η ελάχιστη απόσταση των δύο ευθειών είναι το μέτρο της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{X_1X_2}$, από ένα σημείο της μίας ευθείας σε ένα σημείο της άλλης, πάνω στο διάνυσμα $\vec{n}$ στη διεύθυνση της κοινής καθέτου:

$$\begin{aligned} d(\varepsilon_1,\, \varepsilon_2) &= |\mathrm{pr}_{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}\, \overrightarrow{X_1X_2}| \\ &= \frac{|\overrightarrow{X_1X_2} \cdot \vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} \end{aligned}$$



Σχήμα 2.15: Η κοινή κάθετος ασύμβατων ευθειών στο χώρο.

$$= \frac{|[\overrightarrow{X_1X_2},\, \vec{a}_1,\, \vec{a}_2]|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}\,.$$

Για να προσδιορίσουμε τα σημεία τομής T_1 και T_2 της κοινής καθέτου κ με τις ε_1 και ε_2, εργαζόμαστε ως εξής: Το σημείο T_1 ανήκει στην ε_1, άρα υπάρχει t για το οποίο

$$\overrightarrow{OT_1} = \overrightarrow{OX_1} + t\,\vec{a}_1 \tag{2.12}$$

και παρόμοια για το T_2 και την ε_2, υπάρχει s για το οποίο

$$\overrightarrow{OT_2} = \overrightarrow{OX_2} + s\,\vec{a}_2\,. \tag{2.13}$$

Επίσης $\overrightarrow{T_1T_2}$ είναι παράλληλο προς το $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, και άρα

$$\overrightarrow{T_1T_2} = \ell\,\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\,. \tag{2.14}$$

Αφού $\overrightarrow{T_1T_2} = \overrightarrow{OT_2} - \overrightarrow{OT_1}$, από τις 2.12, 2.13 και 2.14 έχουμε

$$\overrightarrow{OX_2} - \overrightarrow{OX_1} + s\,\vec{a}_2 - t\,\vec{a}_1 = \ell\,\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\,,$$

το οποίο είναι ένα σύστημα 3 εξισώσεων (μία για κάθε συντεταγμένη) με 3 αγνώστους s, t και ℓ, το οποίο μπορούμε να λύσουμε για να προσδιορίσουμε τα t, s και εν συνεχεία τα T_1, T_2.

Παράδειγμα 2.5 Δίδονται ευθείες ε_1 και ε_2 τέτοιες ώστε η ε_1 περνά από το σημείο $A : (2,\, -1,\, 0)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{u} =$

$(1,\,3,\,-1)$, και η ε_2 περνά από το σημείο $B:(0,\,1,\,3)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{v}=(2,\,1,\,1)$.

Αφού τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά, υπάρχει μοναδική κοινή βκάθετος, με διάνυσμα διεύθυνσης

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(4,\,-3,\,-5)\,.$$

Υπολογίζουμε το μικτό γινόμενο

$$[\overrightarrow{AB},\,\vec{u},\,\vec{v}]=(-2,\,2,\,3)\cdot(4,\,-3,\,-5)=-29\,.$$

Συμπεραίνουμε οτι οι ευθείες είναι ασύμβατες.

Το διάνυσμα $\vec{u}\times\vec{v}$ έχει μέτρο $|\vec{u}\times\vec{v}|=5\sqrt{2}$.

Συνεπώς η απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών είναι

$$d(\varepsilon_1,\,\varepsilon_2)=\frac{|[\overrightarrow{AB},\vec{u},\,\vec{v}]|}{|\vec{u}\times\vec{v}|}=\frac{|-29|}{5\sqrt{2}}=\frac{29\sqrt{2}}{10}\,.$$

Για να βρούμε τα σημεία τομής των δύο ευθειών με την κοινή κάθετο, χρησιμοποιούμε το σύστημα

$$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+s\,\vec{v}-t\,\vec{u}=\ell\,(\vec{u}\times\vec{v})\,,$$

δηλαδή

$$(-2,\,2,\,3)+s\,(2,\,1,\,1)-t\,(1,\,3,\,-1)=\ell\,(4,\,-3,\,-5)\,,$$

ή

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2s & - & t & - & 4\ell & = & 2\\ s & - & 3t & + & 3\ell & = & -2\\ s & + & t & + & 5\ell & = & -3 \end{array}\ ,$$

το οποίο λύνουμε για να προσδιορίσουμε τα s και t:

$$t=\frac{1}{25}\quad,\qquad s=-\frac{7}{50}\,.$$

Άρα τα σημεία τομής με την κοινή κάθετο είναι

$$\begin{aligned} T_1 &= (2,\,-1,\,0) + \frac{1}{25}(1,\,3,\,-1)\,, \\ T_2 &= (0,\,1,\,3) - \frac{7}{50}(2,\,1,\,1)\,. \end{aligned}$$

Η κοινή κάθετος κ έχει παραμετρική έκφραση

$$\overrightarrow{OX} = (2,\,-1,\,0) + \frac{1}{25}(1,\,3,\,-1) + \ell\,(4,\,-3,\,-5)\,.$$

Επαληθεύουμε την απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών,

$$|T_1 - T_2| = \frac{1}{50}|(116,\,-87,\,-145)| = \frac{29\sqrt{2}}{10}\,.$$

Δραστηριότητα 2.18 Η ευθεία ε περνάει από το σημείο P : $(2,\,2,\,2)$ και έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{a} = (1,\,2,\,-1)$. Βρείτε την απόσταση από τον άξονα Ox στην ε.

2.14 Γεωμετρικοί μετασχηματισμοί και αλλαγή συστήματος αναφοράς

Ένας **ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός** είναι μία απεικόνιση $\varphi : E^2 \longrightarrow E^2$ που διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ σημείων του επιπέδου, δηλαδή για κάθε $P,\,Q \in E^2$,

$$d(\varphi(P),\,\varphi(Q)) = d(P,\,Q)\,.$$

Θα μελετήσουμε πώς εκφράζονται μέσω των συντεταγμένων των σημείων διάφοροι ευκλείδειοι μετασχηματισμοί. Εάν $(x,\,y)$ είναι οι συντεταγμένες ενός σημείου Q, και $(x',\,y')$ οι συντεταγμένες του σημείου $\varphi(X)$, θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση που εκφράζει τον ευκλείδειο μετασχηματισμό φ ως προς τις συντεταγμένες, δηλαδή τη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ για την οποία

$$\varphi(x,\,y) = (x',\,y')\,.$$

Εάν G είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x, y) = 0$, θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της οποίας γεωμετρικός τόπος είναι η εικόνα του G από το μετασχηματισμό φ, δηλαδή το σχήμα $\varphi(G)$. Το σημείο με συντεταγμένες $(x', y') = \varphi(x, y)$ ανήκει στο σχήμα $\varphi(G)$ εάν και μόνον εάν το σημείο με συντεταγμένες $(x, y) = \varphi^{-1}(x', y')$ ικανοποιεί την εξίσωση $f(x, y) = 0$. Συνεπώς το (x', y') πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση $f \circ \varphi^{-1}(x', y') = 0$. Θα δούμε τη συγκεκριμένη μορφή που παίρνει αυτή η εξίσωση σε απλά σχήματα.

Η επιλογή του σημείου αναφοράς και των αξόνων στο ευκλείδειο επίπεδο μπορεί να γίνει αυθαίρετα. Κάθε επιλογή καθορίζει διαφορετικές συντεταγμένες για κάθε σημείο και διαφορετικές αναλυτικές εξισώσεις για γεωμετρικά αντικείμενα. Στη μελέτη ενός προβλήματος η επιλογή του κατάλληλου συστήματος αναφοράς μπορεί να απλοποιήσει πολύ τους υπολογισμούς. Θα εξετάσουμε πώς αλλάζουν οι συντεταγμένες ενός σημείου ή οι εξισώσεις ευθειών και άλλων γεωμετρικών αντικειμένων όταν αλλάζει η επιλογή ορθοκανονικού συστήματος αναφοράς.

Θεωρούμε το ευκλείδειο επίπεδο στο οποίο έχουμε επιλέξει ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και ένα δεύτερο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(P, \vec{m}, \vec{n})$. Υποθέτουμε οτι ένα σημείο X έχει συντεταγμένες (x, y) ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, και συντεταγμένες (u, v) ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{m}, \vec{n})$. Αυτό σημαίνει οτι

$$\overrightarrow{OX} = x\vec{i} + y\vec{j} \qquad \text{και} \qquad \overrightarrow{PX} = u\vec{m} + v\vec{n}\,.$$

Αρχικά θέλουμε να βρούμε τη σχέση μεταξύ των (x, y) και των (u, v).

Συμβολίζουμε (p, q) τις συντεταγμένες του σημείου P ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, δηλαδή $\overrightarrow{OP} = p\vec{i} + q\vec{j}$. Αφού

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX}\,,$$

παίρνουμε τη σχέση μεταξύ των $(x,\, y)$ και των $(u,\, v)$:

$$(x-p)\vec{i}+(y-q)\vec{j}=u\vec{m}+v\vec{n}\,. \tag{2.15}$$

Παρατηρούμε οτι υπάρχει μία δυϊκότητα μεταξύ ενός μετασχηματισμού, που μετακινεί τα σχήματα χωρίς να αλλάζει το σύστημα αναφοράς, και μίας αλλαγής του συστήματος αναφοράς, όπου τα σχήματα του επιπέδου παραμένουν σταθερά, αλλά μεταβάλλονται οι άξονες του συστήματος αναφοράς και αλλάζουν οι εξισώσεις που περιγράφουν τα σχήματα. Θα δούμε οτι αυτή η δυϊκότητα εμφανίζεται με συγκεκριμένο τρόπο στους υπολογισμούς.

Ευκλείδεια μεταφορά

Μία **μεταφορά** είναι ένας ευκλείδειος μετασχηματισμός $\tau_{\vec{a}} : E^2 \longrightarrow E^2$ που μετατοπίζει κάθε σημείο του επιπέδου κατά ένα σταθερό διάνυσμα $\vec{a}$: για κάθε σημείο P, $\tau_{\vec{a}}(P)$ είναι το σημείο R για το οποίο

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\vec{a}\,.$$

Εάν $\vec{a}=(s,\, t)$ και $P:(x,\, y)$, τότε $\tau_{\vec{a}}(P)$ είναι το σημείο με συντεταγμένες $(x+s,\, y+t)$. Συνεπώς σε συντεταγμένες η απεικόνιση γράφεται

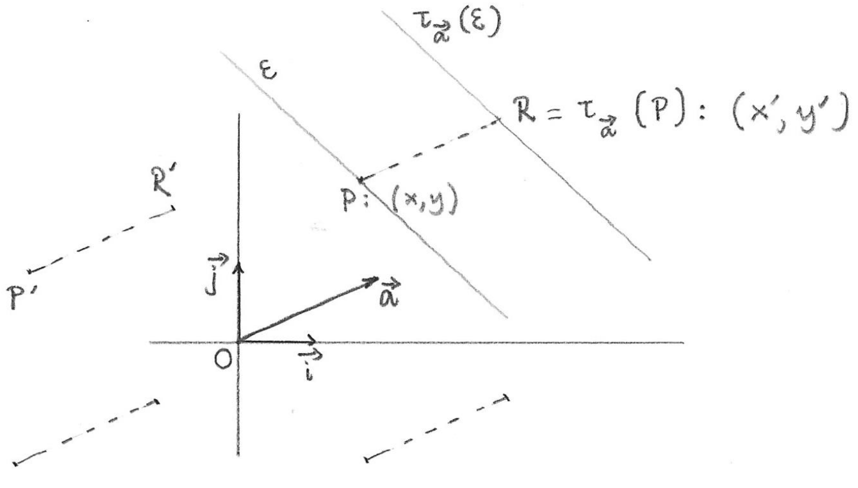
$$\tau_{\vec{a}}(x,\, y)=(x+s,\, y+t)\,.$$

Εάν ε είναι μία ευθεία στο επίπεδο, με εξίσωση

$$Ax+By+C=0\,, \tag{2.16}$$

θέλουμε να υπολογίσουμε την εξίσωση της ευθείας $\tau_{\vec{a}}(\varepsilon)$. Δηλαδή θέλουμε να βρούμε τη σχέση που ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων $\tau_{\vec{a}}(x,\, y)$ όταν $(x,\, y)$ ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο της εξίσωσης $Ax+By+C=0$. Συμβολίζουμε $(x',\, y')$ τις συντεταγμένες του σημείου $\tau_{\vec{a}}(x,\, y)$, δηλαδή $(x',\, y')=(x+s,\, y+t)$, και συνεπώς

$$x=x'-s\,, \qquad y=y'-t\,.$$



Σχήμα 2.16: Μεταφορά κατά διάνυσμα $\vec{a}$.

Αντικαθιστούμε στην 2.16, και έχουμε

$$A(x' - s) + B(y' - t) + C = 0\,.$$

Γράφουμε αυτή την εξίσωση σε κανονική μορφή,

$$Ax' + By' + C - As - Bt = 0\,. \qquad (2.17)$$

Καταλήγουμε οτι η εικόνα της ευθείας ε από το μετασχηματισμό $\tau_{\vec{a}}$ είναι η ευθεία στο επίπεδο με εξίσωση 2.17.

Γενικότερα, εάν G είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x,\, y) = 0$, τότε $\tau_{\vec{a}}(G)$ είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $g(x',\, y') = 0$, όπου $g(x',\, y') = f(x' - s,\, y' - t)$.

Παράδειγμα 2.6 Θεωρούμε την ευθεία ε, με εξίσωση $2x + y - 1 = 0$. Θα βρούμε την εξίσωση της εικόνας της ευθείας ε από τη μεταφορά

$$\tau(x,\, y) = (x',\, y') = (x + 2,\, y - 1)\,.$$

Η αντίστροφη απεικόνιση είναι η $\tau^{-1}(x',\, y') = (x' - 2,\, y' + 1)$.

Τα σημεία της εικόνας $\tau(\varepsilon)$ ικανοποιούν την εξίσωση $2(x' - 2) + (y' + 1) - 1 = 0$, δηλαδή

$$2x' + y' - 4 = 0\,.$$

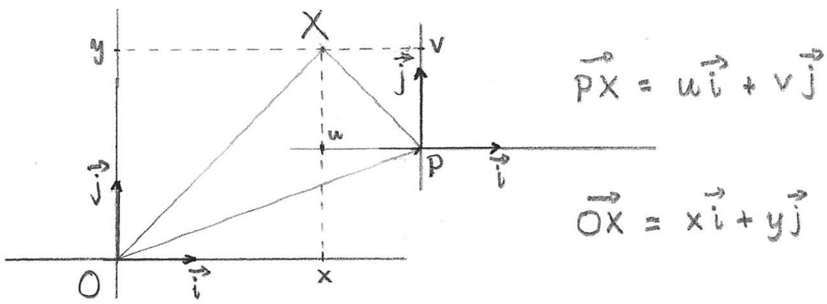
Μεταφορά του σημείου αναφοράς

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μία αλλαγή συστήματος αναφοράς. Στο Ευκλείδειο επίπεδο θεωρούμε δύο συστήματα αναφοράς με διαφορετικό σημείο αναφοράς αλλά παράλληλους και ομόρροπους άξονες: $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ και $(P, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Σε αυτήν την περίπτωση η 2.15 γίνεται

$$(x-p)\vec{\imath} + (y-q)\vec{\jmath} = u\vec{\imath} + v\vec{\jmath}\,,$$

και συνεπώς

$$x = u + p \qquad \text{και} \qquad y = v + q\,. \tag{2.18}$$



Σχήμα 2.17: Αλλαγή σημείου αναφοράς.

Θεωρούμε τώρα μία ευθεία ε με εξίσωση 2.16 ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ίδιας ευθείας ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Αντικαθιστώντας τις 2.18 στην εξίσωση της ευθείας 2.16 έχουμε την εξίσωση που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες ενός σημείου ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ για να βρίσκεται το σημείο στην ευθεία ε:

$$A(u+p) + B(v+q) + C = 0\,.$$

Καταλήγουμε οτι η εξίσωση της ευθείας ε ως προς το σύστημα συντεταγμένων $(P, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ σε κανονική μορφή είναι

$$Au + Bv + C + Ap + Bq = 0\,.$$

Γενικότερα, εάν G είναι ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $f(x,\, y) = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{i},\, \vec{j})$, τότε η εξίσωση του G ως προς το σύστημα αναφοράς $(P,\, \vec{i},\, \vec{j})$ είναι $f(u+p,\, v+q) = 0$.

Παράδειγμα 2.7 Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας ε του Παραδείγματος 2.6 ως προς το σύστημα αναφοράς $(P,\, \vec{i},\, \vec{j})$, όπου P είναι το σημείο που προκύπτει από τη μεταφορά του O κατά $(-2,\, 1)$. Αφού P είναι το σημείο $(-2,\, 1)$, οι συντεταγμένες ως προς τα δύο συστήματα ικανοποιούν τις σχέσεις $x = u-2$, $y = v+1$, και η εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(P,\, \vec{i},\, \vec{j})$ θα είναι $2(u-2)+(v+1)-1 = 0$, δηλαδή

$$2u + v - 4 = 0\,.$$

Δραστηριότητα 2.19 Η ευθεία ε έχει εξίσωση $x+y=0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{i},\, \vec{j})$.

α′. Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της ε από τον ευκλείδειο μετασχηματισμό $\varphi(x,\, y) = (x-1,\, y)$.

β′. Βρείτε την εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(P,\, \vec{i},\, \vec{j})$, όπου $P : (-1,\, 1)$.

Περιστροφή

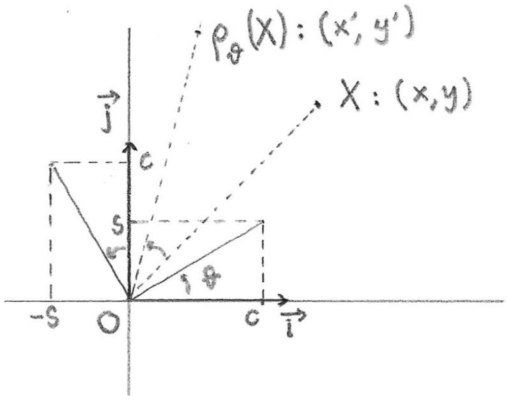
Το επόμενο είδος γεωμετρικού μετασχηματισμού που θα εξετάσουμε είναι η περιστροφή γύρω από το σημείο αναφοράς O.

Η περιστροφή κατά (προσημασμένη) γωνία ϑ γύρω από το σημείο αναφοράς O είναι ο ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός $\rho_\vartheta : E^2 \longrightarrow E^2$ που αφήνει το σημείο O σταθερό και περιστρέφει κάθε άλλο σημείο του επιπέδου γύρω από το O κατά σταθερή γωνία ϑ. Ειδικότερα, η ρ_ϑ απεικονίζει το σημείο $(1,\, 0)$ στο $(\cos\vartheta,\, \sin\vartheta)$ και το σημείο $(0,\, 1)$ στο $(-\sin\vartheta,\, \cos\vartheta)$, Σχήμα 2.18. Το γενικό σημείο $X : (x,\, y)$ απεικονίζεται στο $\rho_\vartheta(X) : (x',\, y')$. Η περιστροφή είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, δηλαδή $\rho_\vartheta(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\rho_\vartheta(\vec{a}) + b\rho_\vartheta(\vec{b})$. Συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε το

$$\begin{aligned} \rho_\vartheta(x,\, y) &= \rho(x(1,\, 0) + y(0,\, 1)) \\ &= x\rho_\vartheta(1,\, 0) + y\rho_\vartheta(0,\, 1) \\ &= x(\cos\vartheta,\, \sin\vartheta) + y(-\sin\vartheta,\, \cos\vartheta)\,, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(x',\, y') = \rho_\vartheta(x,\, y) = (x\cos\vartheta - y\sin\vartheta,\, x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)\,. \qquad (2.19)$$



Σχήμα 2.18: Περιστροφή κατά γωνία ϑ γύρω από το σημείο αναφοράς O.

Γεωμετρικά είναι προφανές οτι η αντίστροφη απεικόνιση της περιστροφής κατά γωνία ϑ είναι η περιστροφή κατά την αντίθετη γωνία, $-\vartheta$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $\cos(-\vartheta) = \cos\vartheta$ και $\sin(-\vartheta) = -\sin\vartheta$, έχουμε και την αντίστροφη σχέση,

$$(x,\, y) = (x'\cos\vartheta + y'\sin\vartheta,\, -x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta)\,. \qquad (2.20)$$

Θεωρούμε την ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + C = 0$. Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας $\rho_\vartheta(\varepsilon)$ χρησιμοποιούμε την 2.20 για να αντικαταστήσουμε τα x, y συναρτήσει των x', y',

$$A(x'\cos\vartheta + y'\sin\vartheta) + B(-x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta) + C = 0\,.$$

Καταλήγουμε οτι η εξίσωση της ευθείας $\rho_\vartheta(\varepsilon)$ σε κανονική μορφή είναι $A'x' + B'y' + C' = 0$, όπου οι συντελεστές A', B', C' δίδονται από

$$A' = A\cos\vartheta - B\sin\vartheta\,, \qquad B' = A\sin\vartheta + B\cos\vartheta \qquad \text{και} \qquad C' = C\,.$$

Παράδειγμα 2.8 Θα βρούμε την εξίσωση της εικόνας της ευθείας ζ με εξίσωση $x + \sqrt{3}y - \sqrt{3} = 0$, από την περιστροφή κατά γωνία $\pi/6$. Έχουμε $\cos\pi/6 = \sqrt{3}/2$, $\sin\pi/6 = 1/2$, συνεπώς

$$\rho_{\pi/6}(x,\, y) = (x',\, y') = \left(\frac{\sqrt{3}x - y}{2},\, \frac{x + \sqrt{3}y}{2}\right)\,.$$

Παρατηρούμε οτι η ευθεία ζ έχει κλίση $-\sqrt{3}/3 = \tan(-\pi/6)$, δηλαδή σχηματίζει γωνία $-\pi/6$ με τον άξονα $y = 0$.

Η αντίστροφη απεικόνιση, που δίδει τα x, y συναρτήσει των x', y', είναι η περιστροφή κατά γωνία $-\pi/6$,

$$(x,\, y) = \rho^{-1}_{\pi/6}(x',\, y') = \left(\frac{\sqrt{3}x' + y'}{2},\, \frac{-x' + \sqrt{3}y'}{2}\right)\,.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ε έχουμε $\frac{\sqrt{3}x'+y'}{2} + \sqrt{3}\frac{-x'+\sqrt{3}y'}{2} - \sqrt{3} = 0$, δηλαδή

$$2y' - \sqrt{3} = 0\,.$$

Άρα η εικόνα $\rho_{\pi/6}(\zeta)$ είναι η ευθεία $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Παρατηρούμε οτι $\rho_{\pi/6}(\zeta)$ έχει κλίση 0, δηλαδή είναι παράλληλη προς τον άξονα $y = 0$.

Περιστροφή του συστήματος αναφοράς

Επιστρέφοντας στην αλλαγή συστήματος αναφοράς, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το σημείο αναφοράς παραμένει σταθερό, $P = O$, και οι άξονες περιστρέφονται κατά γωνία ϑ,

$$\vec{m} = \cos\vartheta\,\vec{i} + \sin\vartheta\,\vec{j} \qquad \vec{n} = -\sin\vartheta\,\vec{i} + \cos\vartheta\,\vec{j}\,.$$

Σε αυτή την περίπτωση $\overrightarrow{OP} = 0$, και η σχέση 2.15 που συνδέει τις συντεταγμένες $(x,\, y)$ του σημείου X ως προς το $(O,\, \vec{i},\, \vec{j})$ με τις συντεταγμένες $(u,\, v)$ του σημείου X ως προς το $(O,\, \vec{m},\, \vec{n})$ γίνεται

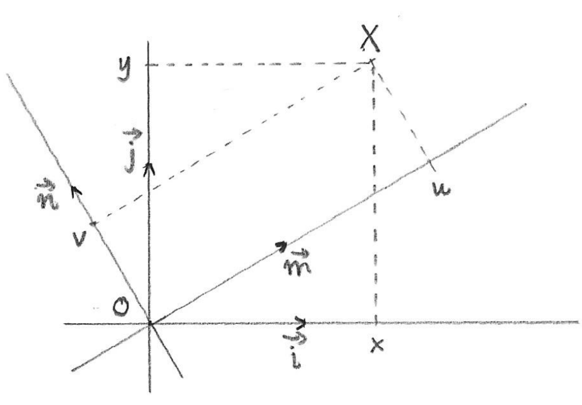
$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} &= u\vec{m} + v\vec{n} \\ &= u(\cos\vartheta\, \vec{i} + \sin\vartheta\, \vec{j}) + v(-\sin\vartheta\, \vec{i} + \cos\vartheta\, \vec{j}) \\ &= (u\cos\vartheta - v\sin\vartheta)\, \vec{i} + (u\sin\vartheta + v\cos\vartheta)\, \vec{j}\,. \end{aligned}$$

Έτσι έχουμε

$$x = u\cos\vartheta - v\sin\vartheta\,, \qquad y = u\sin\vartheta + v\cos\vartheta$$

και αντίστροφα

$$u = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta\,, \qquad v = -x\sin\vartheta + y\cos\vartheta\,.$$



Σχήμα 2.19: Περιστροφή των αξόνων του συστήματος αναφοράς.

Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας $\varepsilon : Ax + By + C = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{m},\, \vec{n})$, αντικαθιστούμε τις $x,\, y$ συναρτήσει των $u,\, v$:

$$A(u\cos\vartheta - v\sin\vartheta) + B(u\sin\vartheta + v\cos\vartheta) + C = 0\,.$$

Σε κανονική μορφή η εξίσωση είναι

$$(A\cos\vartheta + B\sin\vartheta)u + (-A\sin\vartheta + B\cos\vartheta)v + C = 0\,.$$

Παράδειγμα 2.9 Θα βρούμε την εξίσωση της ευθείας ζ του Παραδείγματος 2.8 ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{m},\, \vec{n})$, όπου τα διανύσματα $\vec{m}$ και $\vec{n}$ προκύπτουν από τα $\vec{i}$, $\vec{j}$ αντίστοιχα, με περιστροφή κατά $-\pi/6$,

$$\vec{m} = \frac{\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j}}{2}\,, \qquad \vec{n} = \frac{\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}}{2}\,.$$

Τότε από την 2.15 έχουμε

$$x\vec{i} + y\vec{j} = u\frac{\sqrt{3}\,\vec{i} - \vec{j}}{2} + v\frac{\vec{i} + \sqrt{3}\,\vec{j}}{2}\,,$$

δηλαδή

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v\,, \qquad y = -\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\,.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση της ζ έχουμε

$$\frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{1}{2}v + \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right) - sqrt3 = 0\,,$$

δηλαδή

$$2v - \sqrt{3} = 0\,.$$

Δραστηριότητα 2.20 Η ευθεία ε έχει εξίσωση $x + y = 0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{i},\, \vec{j})$.

α′. Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της ε από τον ευκλείδειο μετασχηματισμό $\chi(x,\, y) = (y,\, -x)$.

β′. Βρείτε την εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{u},\, \vec{v})$, όπου $\vec{u} = -\vec{j}$ και $\vec{v} = \vec{i}$.

Γενικοί μετασχηματισμοί

Ο γενικός ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου είναι σύνθεση μεταφορών και περιστροφών εάν διατηρεί τον προσανατολισμό, δηλαδή εάν διατηρεί το πρόσημο της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων. Εάν αντιστρέφει τον προσανατολισμό, δηλαδή αλλάζει το πρόσημο της γωνίας μεταξύ δύο διανυσμάτων, τότε είναι σύνθεση μεταφορών, περιστροφών και της ανάκλασης $(x, y) \mapsto (-x, y)$.

Πρόταση 2.10 *Ένας ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου $\varphi : E^2 \longrightarrow E^2$ που διατηρεί τον προσανατολισμό γράφεται στη μορφή*

$$\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \qquad a^2+b^2 = 1\,, \quad (2.21)$$

όπου $(s, t) = \varphi(0, 0)$, $(a, b) = \varphi(1, 0)-\varphi(0, 0)$ και $(-b, a) = \varphi(0, 1)-\varphi(0, 0)$.

Ένας ευκλείδειος γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου $\varphi : E^2 \longrightarrow E^2$ που αντιστρέφει τον προσανατολισμό γράφεται στη μορφή

$$\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}, \qquad a^2 + b^2 = 1\,, \quad (2.22)$$

όπου $(s, t) = \varphi(0, 0)$, $(-a, -b) = \varphi(1, 0) - \varphi(0, 0)$ και $(-b, a) = \varphi(0, 1) - \varphi(0, 0)$.

Απόδειξη. Εάν ο μετασχηματισμός $\varphi : E^2 \longrightarrow E^2$ απεικονίζει το σημείο αναφοράς $O : (0, 0)$ στο σημείο $P : (s, t)$, ορίζουμε τον μετασχηματισμό $\psi : E^2 \longrightarrow E^2$ συνθέτοντας τον φ με μία μεταφορά κατά $-\overrightarrow{OP}$,

$$\psi(x, y) = \tau_{-\overrightarrow{OP}} \circ \varphi(x, y) = \varphi(x, y) - (s, t)\,.$$

Ο μετασχηματισμός ψ αφήνει το σημείο αναφοράς σταθερό.

Εάν ο μετασχηματισμός $\varphi : E^2 \longrightarrow E^2$ αντιστρέφει τον προσανατολισμό, ορίζουμε τον μετασχηματισμό $\chi : E^2 \longrightarrow E^2$ συνθέτοντας το φ με την ανάκλαση $\alpha(x,\, y) = (-x,\, y)$,

$$\chi(x,\, y) = \varphi \circ \alpha(x,\, y) = \varphi(-x,\, y)\,.$$

Ο μετασχηματισμός χ διατηρεί τον προσανατολισμό.

Εάν ο μετασχηματισμός $\varphi : E^2 \longrightarrow E^2$ διατηρεί τον προσανατολισμό και αφήνει το σημείο αναφοράς σταθερό, τότε φ απεικονίζει το σημείο $Q : (1,\, 0)$ σε ένα σημείο του κύκλου με κέντρο μηδέν και ακτίνα 1, έστω το $R : \varphi(1,\, 0) = (\cos\vartheta,\, \sin\vartheta)$, για $\vartheta \in (-\pi,\, \pi]$. Αφού φ διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων καθώς και το μέγεθος και το πρόσημο των γωνιών, κάθε σημείο $X : (x,\, y)$ απεικονίζεται σε ένα σημείο $Y : \varphi(x,\, y)$ τέτοιο ώστε το τρίγωνο OQX να είναι ίσο με το τρίγωνο ORY. Αυτό σημαίνει οτι Y προκύπτει από το X με μία περιστροφή κατά γωνία ϑ, δηλαδή οτι $\varphi = \rho_\vartheta$.

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις μας οδηγούν στο συμπέρασμα οτι κάθε μετασχηματισμός του επιπέδου μπορεί να γραφτεί ως σύνθεση $\tau_{\vec{a}} \circ \rho_\vartheta$ ή ως σύνθεση $\tau_{\vec{a}} \circ \rho_\vartheta \circ \alpha$, για $\vartheta \in (-\pi,\, \pi]$ και $\vec{a} = (s,\, t)$ διάνυσμα του επιπέδου E^2. Στην πρώτη περίπτωση ο μετασχηματισμός είναι της μορφής 2.21. Στη δεύτερη περίπτωση παρατηρούμε οτι

$$\begin{bmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix}$$

και ο μετασχηματισμός είναι της μορφής 2.22.

□

Δραστηριότητα 2.21 Επαληθεύστε οτι ο αντίστροφος του πινάκα $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -b & a \end{bmatrix}$, με $a^2 + b^2 = 1$, είναι ο εαυτός του.

Δραστηριότητα 2.22 Η ευθεία ε έχει εξίσωση $x+y=0$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{i},\, \vec{j})$.

α′. Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της ε από τον ευκλείδειο μετασχηματισμό $\rho(x,\, y) = (-y,\, -x)$.

β′. Βρείτε την εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{u},\, \vec{v})$, όπου $\vec{u} = -\vec{j}$ και $\vec{v} = -\vec{i}$.

Δραστηριότητα 2.23 Η ευθεία ζ έχει εξίσωση $x+y=1$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{i},\, \vec{j})$.

α′. Βρείτε την εξίσωση της εικόνας της ζ από τον ευκλείδειο μετασχηματισμό $\psi(x,\, y) = (-y+1,\, -x)$.

β′. Βρείτε την εξίσωση της ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(P,\, \vec{u},\, \vec{v})$, όπου $P : (0,\, 1)$, $\vec{u} = -\vec{j}$ και $\vec{v} = -\vec{i}$.

2.15 Αλλαγή συστήματος αναφοράς στο χώρο

Θεωρούμε δύο **ορθοκανονικά** συστήματα αναφοράς στο χώρο, $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ και $(P,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$, και θέλουμε να εξετάσουμε τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων ενός σημείου ως προς τα δύο διαφορετικά συστήματα.

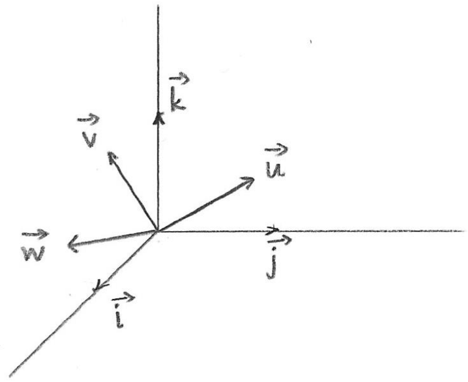
Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το σημείο αναφοράς των δύο συστημάτων είναι το ίδιο. Έχουμε λοιπόν τα συστήματα $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ και $(O,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$, Σχήμα 2.20

Εάν X είναι σημείο του χώρου, με συντεταγμένες $(x,\, y,\, z)$ ως προς το σύστημα $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$, το διάνυσμα θέσης του X είναι

$$\overrightarrow{OX} \;=\; x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,. \tag{2.23}$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες $(x',\, y',\, z')$ του X ως προς το σύστημα $(O,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$, οι οποίες δίδονται από τη σχέση

$$\overrightarrow{OX} \;=\; x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}\,. \tag{2.24}$$



Σχήμα 2.20: Συστήματα αναφοράς στο χώρο

Για να πετύχουμε αυτό, υποθέτουμε οτι μπορούμε να εκφράσουμε τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$. Δηλαδή οτι γνωρίζουμε τους συντελεστές a_n, b_n, c_n, για $n = 1, 2, 3$, για τους οποίους

$$\begin{aligned} \vec{i} &= a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w} \\ \vec{j} &= a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w} \\ \vec{k} &= a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w} \end{aligned} \tag{2.25}$$

Τότε αντικαθιστώντας τις 2.25 στην 2.23 έχουμε

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OX} &= x(a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}) \\ &\quad +y(a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w}) \\ &\quad +z(a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w}) \\ &= (xa_1 + ya_2 + za_3)\vec{u} \\ &\quad +(xb_1 + yb_2 + zb_3)\vec{v} \\ &\quad +(xc_1 + yc_2 + zc_3)\vec{w} \end{aligned}$$

και συγκρίνοντας με την 2.24 έχουμε

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + a_2y + a_3z \\ y' &= b_1x + b_2y + b_3z \\ z' &= c_1x + c_2y + c_3z \end{aligned} \tag{2.26}$$

Μπορούμε να παραστήσουμε αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας το συμβολισμό πινάκων,

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

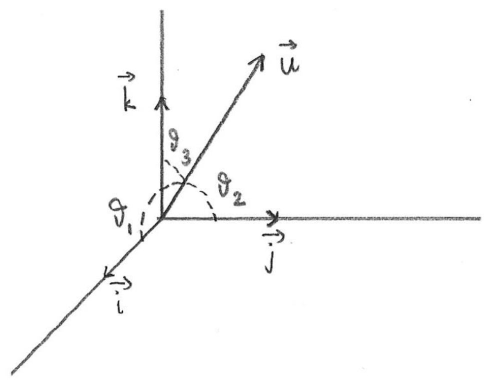
ο οποίος σημαίνει οτι ο αριθμός στην πρώτη γραμμή στην αριστερή πλευρά είναι ίσος με το άθροισμα των γινομένων των στοιχείων της πρώτης γραμμής του πίνακα, με τα αντίστοιχα στοιχεία του διανύσματος συντεταγμένων, και ανάλογα για τη δεύτερη και την τρίτη γραμμή.

Δραστηριότητα 2.24 Θεωρήστε τα διανύσματα $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$, $\vec{v} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$ και $\vec{w} = \vec{k}$.

α′. Λύστε το σύστημα των τριώνεξισώσεων για να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ συναρτήσει των $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$. Με αυτό τον τρόπο πολογίστε τους συντελεστές a_n, b_n, c_n της 2.25.

β′. Βρείτε τις συντεταγμένες ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ του σημείου X που έχει συντεταγμένες $(1, 1, 1)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Απομένει να εξετάσουμε τη γεωμετρική σημασία των συντελεστών a_n, b_n, c_n της 2.25.



Σχήμα 2.21: Συνημίτονα διεύθυνσης ενός διανύσματος

Ας εξετάσουμε πρώτα ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$. Αφού το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ είναι ορθοκανονικό, οι συντεταγμένες του $\vec{u}$ ως προς αυτό δίδονται από το εσωτερικό γινόμενο του $\vec{u}$ με τα τρία διανύσματα $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{i})\vec{i} + (\vec{u} \cdot \vec{j})\vec{j} + (\vec{u} \cdot \vec{k})\vec{k}\,.$$

Αλλά, εφόσον τα διανύσματα $\vec{i}$ και $\vec{u}$ είναι μοναδιαία, το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{i}$ είναι απλώς το συνημίτονο της γωνίας ϑ_1 μεταξύ του $\vec{u}$ και του $\vec{i}$, και αντίστοιχα για τα $\vec{u} \cdot \vec{j}$, $\vec{u} \cdot \vec{k}$ και τις γωνίες ϑ_2, ϑ_3 μεταξύ του $\vec{u}$ και των $\vec{j}$, $\vec{k}$ αντίστοιχα:

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = \cos\vartheta_1 \qquad \vec{u} \cdot \vec{j} = \cos\vartheta_2 \qquad \vec{u} \cdot \vec{k} = \cos\vartheta_3 \tag{2.27}$$

Από την 2.25, έχουμε $\vec{i} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{i} = \cos\vartheta_1$. Άρα a_1 είναι το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ $\vec{u}$ και $\vec{i}$. Ανάλογα, $a_2 = \cos\vartheta_2$, $a_3 = \cos\vartheta_3$. Δηλαδή έχουμε

$$\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\,.$$

Οι συντεταγμένες (a_1, a_2, a_3) ονομάζονται **συνημίτονα διεύθυνσης** του μοναδιαίου διανύσματος $\vec{u}$ ως προς το σύστημα $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Παρόμοια βρίσκουμε οτι

$$\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\,,$$

όπου $b_1 = \cos\varphi_1$, $b_2 = \cos\varphi_2$, $b_3 = \cos\varphi_3$ είναι τα συνημίτονα των γωνιών φ_1, φ_2, φ_3 μεταξύ του $\vec{v}$ και των $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ αντίστοιχα.

Τέλος

$$\vec{w} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$$

για $c_1 = \cos\psi_1$, $c_2 = \cos\psi_2$, $c_3 = \cos\psi_3$ για τις γωνίες μεταξύ του $\vec{w}$ και των $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Λήμμα 2.11 *Εάν $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) και $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) είναι ορθοκανονικά συστήματα διανυσμάτων, και*

$$\begin{aligned}\vec{i} &= a_1\vec{u} + b_1\vec{v} + c_1\vec{w}\,,\\ \vec{j} &= a_2\vec{u} + b_2\vec{v} + c_2\vec{w}\,,\\ \vec{k} &= a_3\vec{u} + b_3\vec{v} + c_3\vec{w}\,,\end{aligned}$$

τότε

$$\begin{aligned}\vec{u} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\,,\\ \vec{v} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}\,,\\ \vec{w} &= c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}\,.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.10 Για να περιγράψουμε ένα αντικείμενο το οποίο είναι συμμετρικό ως προς το επίπεδο Π, με εξίσωση $2x + 3y - z = 0$, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ τέτοιο ώστε τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ να εφάπτονται στο Π. Τότε το διάνυσμα $\vec{w}$ θα είναι κάθετο στο Π, συνεπώς συγγραμμικό με το διάνυσμα $(2, 3, -1)$, και αφού $\vec{w}$ είναι μοναδιαίο,

$$\vec{w} = \pm\left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right).$$

Επιλέγουμε τυχαίο διάνυσμα ορθογώνιο προς το $\vec{w}$, για παράδειγμα το $(1, 0, 2)$, και θέτουμε

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

Τότε, για να έχουμε δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα, θέτουμε $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$. Επιλέγουμε το θετικό πρόσημο για το $\vec{w}$, και έχουμε

$$\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, 0, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \times \left(\frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-1}{\sqrt{14}}\right) = \left(\frac{-6}{\sqrt{70}}, \frac{5}{\sqrt{70}}, \frac{3}{\sqrt{70}}\right).$$

Άρα έχουμε το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ με

$$\vec{u} = \frac{-6}{\sqrt{70}}\vec{i} + \frac{5}{\sqrt{70}}\vec{j} + \frac{3}{\sqrt{70}}\vec{k}\,,$$

$$
\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + 0\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{k}\,, \\
\vec{w} &= \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{-1}{\sqrt{14}}\vec{k}\,.
\end{aligned}
$$

Αφού οι συντεταγμένες των $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ως προς το σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ είναι τα συνημίτονα διεύθυνσης, τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ εκφράζονται ως προς το σύστημα $(O,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$ από τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
\vec{i} &= \frac{-6}{\sqrt{70}}\vec{u} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{v} + \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{w}\,, \\
\vec{j} &= \frac{5}{\sqrt{70}}\vec{u} + 0\vec{v} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{w}\,, \\
\vec{k} &= \frac{3}{\sqrt{70}}\vec{u} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{v} + \frac{-1}{\sqrt{14}}\vec{w}\,,
\end{aligned}
$$

Το σημείο X, με συντεταγμένες $(x,\, y,\, z)$ ως προς το σύστημα $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$, θα έχει συντεταγμένες $(x',\, y',\, z')$ ως προς το σύστημα $(O,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$, οι οποίες δίδονται από τις σχέσεις

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{-6}{\sqrt{70}}x + \frac{5}{\sqrt{70}}y + \frac{3}{\sqrt{70}}z\,, \\
y' &= \frac{1}{\sqrt{5}}x + 0y + \frac{2}{\sqrt{5}}z\,, \\
z' &= \frac{2}{\sqrt{14}}x + \frac{3}{\sqrt{14}}y + \frac{-1}{\sqrt{14}}z\,.
\end{aligned}
$$

Τώρα εξετάζουμε την περίπτωση όπου τα σημεία αναφοράς των δύο συστημάτων είναι διαφορετικά. Υποθέτουμε οτι τα δύο συστήματα είναι $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ και $(P,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$ και οτι

$$\overrightarrow{OP} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}\,,$$

δηλαδή οι συντεταγμένες του P ως προς το σύστημα $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ είναι $(x_0,\, y_0,\, z_0)$. Τότε

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{PX} &= \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} \\
&= (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}\,.
\end{aligned}
$$

Οι συντεταγμένες $(x',\, y',\, z')$ του σημείου X ως προς το σύστημα αναφοράς $(P,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$, για τις οποίες

$$\overrightarrow{PX} = x'\vec{u} + y'\vec{v} + z'\vec{w}\,,$$

δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x' &= a_1(x - x_0) + a_2(y - y_0) + a_3(z - z_0) \\ y' &= b_1(x - x_0) + b_2(y - y_0) + b_3(z - z_0) \\ z' &= c_1(x - x_0) + c_2(y - y_0) + c_3(z - z_0) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Δραστηριότητα 2.25 Για τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ της Δραστηριότητας 2.24, το σημείο $P : (1,\, 0,\, 0)$ και το σημείο $X : (1,\, 1,\, 1)$,

α′. Βρείτε τις συντεταγμένες του X ως προς το σύστημα αναφοράς $(P,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$.

β′. Βρείτε τις συντεταγμένες του X ως προς το σύστημα αναφοράς $(P,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$.

Ανακεφαλαιώνουμε : Θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$, και ένα δεύτερο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(P,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$, τα διανύσματα του οποίου δίδονται ως προς το σύστημα $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \vec{u} &= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \\ \vec{v} &= b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k} \\ \vec{w} &= c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}\,, \end{aligned}$$

τις οποίες μπορούμε να εκφράσουμε παραστατικά στον ακόλουθο πίνακα

	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{u}$	a_1	a_2	a_3
$\vec{v}$	b_1	b_2	b_3
$\vec{w}$	c_1	c_2	c_3

ο οποίος ονομάζεται **πίνακας μετάβασης** από το σύστημα $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ στο σύστημα $(P,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$. Υποθέτουμε επίσης οτι οι συντεταγμένες του σημείου P ως προς το σύστημα $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ είναι $(x_0,\, y_0,\, z_0)$.

Εάν το σημείο X έχει συντεταγμένες $(x,\, y,\, z)$ ως προς το σύστημα $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ τότε οι συντεταγμένες $(x',\, y',\, z')$ του X ως προς το σύστημα $(P,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$ δίδονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x' &= a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0) \\ y' &= b_1(x-x_0)+b_2(y-y_0)+b_3(z-z_0) \\ z' &= c_1(x-x_0)+c_2(y-y_0)+c_3(z-z_0) \end{aligned}$$

2.16 Ασκήσεις

Άσκηση 2.15 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο $P : (2,\, 3,\, 1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία QR, όπου $Q : (3,\, 1,\, 4)$ και $R : (2,\, 1,\, 5)$. Είναι το επίπεδο παράλληλο προς κάποιον άξονα συντεταγμένων;

Άσκηση 2.16 Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου Π_s που περιέχει την ευθεία QR, όπου $Q : (3,\, 1,\, 4)$ και $R : (2,\, 1,\, 5)$, και τέμνει τον άξονα Oy στο σημείο $(0,\, s,\, 0)$, για $s \in \mathbb{R}$,

Άσκηση 2.17 Έστω Π το επίπεδο με παραμετρική περιγραφή

$$(x,\, y,\, z) = (1,0,1) + s(1,2,3) + t(1,1,1)\,.$$

Βρείτε την εξίσωση του Π, με δύο τρόπους:

α′. απαλείφοντας πρώτα την παράμετρο t και κατόπιν την παράμετρο s.

β′. χρησιμοποιώντας το εξωτερικό γινόμενο.

Ελέγξτε οτι οι δύο διαδικασίες καταλήγουν σε ισοδύναμες εξισώσεις.

Άσκηση 2.18 Θεωρούμε το επίπεδο Π στο E^3 που περνάει από τα σημεία $Q : (2,\, 1,\, 3)$, $R : (2,\, 4,\, 0)$ και $S : (-3,\, 0,\, 4)$. Στο επίπεδο Π ορίζουμε το (μη ορθοκανονικό) σύστημα αναφοράς $(Q,\, \vec{v},\, \vec{w})$, όπου $\vec{v} = \overrightarrow{QR}$ και $\vec{w} = \overrightarrow{QS}$. Να βρείτε:

α′. Τις συντεταγμένες στο E^3 του σημείου του Π που έχει συντεταγμένες $(5,\, 3)$ ως προς το $(Q,\, \vec{v},\, \vec{w})$.

β′. Τις συντεταγμένες ως προς το $(Q,\, \vec{v},\, \vec{w})$ του σημείου στο οποίο το επίπεδο Π τέμνει τον άξονα Oz.

Άσκηση 2.19 Βρείτε δύο εξισώσεις της μορφής $Ax+By+Cz+D=0$ που αποτελούν (και οι δύο μαζί!) την αναλυτική περιγραφή της ευθείας ε στο χώρο, που έχει παραμετρική περιγραφή

$$(x,\, y,\, z) = (3,\, 7,\, -6) + t(5,\, -4,\, 1)\,.$$

Άσκηση 2.20 Έστω ε η ευθεία στο χώρο με παραμετρική περιγραφή

$$(x,\, y,\, z) = (2+2t,\, 2,\, 2-2t)$$

Θεωρήστε τις ευθείες

$$\begin{aligned} \delta_1 &: (x,\, y,\, z) = (1,\, -1,\, 0) + r(1,\, 1,\, 0) \\ \delta_2 &: (x,\, y,\, z) = (1,\, -1,\, 1) + s(-4,\, 0,\, 4)\,. \end{aligned}$$

Για $i = 1, 2$, να εξετάσετε αν η ε και η δ_i, έχουν κοινά σημεία, είναι παράλληλες ή είναι ασύμβατες.

Άσκηση 2.21 Θεωρήστε το επίπεδο Π με εξίσωση $2x+3y+z+1=0$, και τα επίπεδα Σ_1: $x+y+z+1=0$ και Σ_2: $-4x-6y-2z-2=0$.

α'. Βρείτε μία παραμετρική περιγραφή του συνόλου των κοινών σημείων του Π και του Σ_1 και του συνόλου των κοινών σημείων του Π και του Σ_2.

β'. Υπολογίστε την απόσταση του σημείου $(1,\, 1,\, 1)$ από το επίπεδο Π, και την απόσταση του σημείου $(1,\, 1,\, 1)$ από την τομή των επιπέδων Π και Σ_1.

Άσκηση 2.22 Εξετάστε εάν η ευθεία ε με παραμετρική περιγραφή $(x,\, y,\, z) = (3,\, -1,\, 4) + t(5,\, 1,\, 1)$ είναι παράλληλη προς το επίπεδο $\Pi : 2x - 2y + 3z - 5 = 0$. Εάν όχι, βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής.

Άσκηση 2.23 Βρείτε την παραμετρική παράσταση της κοινής καθέτου των ευθειών $\varepsilon_1 : (x,\, y,\, z) = (1,\, 3,\, 1) + s(1,\, 1,\, -1)$ και $\varepsilon_2 : (x,\, y,\, z) = (1,\, 0,\, 1) + t(1,\, 0,\, -2)$. Υπολογίστε την απόσταση μεταξύ των δύο ευθειών.

Άσκηση 2.24 Δείξτε οτι εάν τα συστήματα αναφοράς $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ και $(O,\, \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w})$ είναι ορθοκανονικά, τότε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$ των συντελεστών της 2.25 έχει την ιδιότητα $AA^T = I$.

Άσκηση 2.25 Βρείτε τις εξισώσεις των επιπέδων που διχοτομούν τις δίεδρες γωνίες μεταξύ δύο επιπέδων.

Άσκηση 2.26 Στο ευκλείδειο επίπεδο E^2 με σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, θεωρήστε σημεία $P : (-1, 2)$, $Q : (1, 1)$ και $R : (3, 2)$, την ευθεία ε που περνάει από τα σημεία Q, R και τον κύκλο C με κέντρο στο σημείο R και ακτίνα 2.
Δίδεται ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $\varphi : E^2 \longrightarrow E^2$ που κάνει μεταφορά κατά το διάνυσμα $\vec{a} = (2, 3)$.

α′. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\varphi(Q)$ και $\varphi(R)$.

β′. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

γ′. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\varphi(\varepsilon)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

δ′. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $\varphi(Q)$, $\varphi(R)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Τι σχέση έχουν αυτές οι δύο εξισώσεις;

Άσκηση 2.27 Με τα δεδομένα της Άσκησης 2.26, θεωρήστε και δεύτερο σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

ε′. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Q και R ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

ϛ′. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\varphi(Q)$ και $\varphi(R)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

ζ′. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

η′. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου $\varphi(C)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(P, \vec{i}, \vec{j})$.

Άσκηση 2.28 Με τα δεδομένα της Άσκησης 2.26, θεωρήστε ένα τρίτο σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$, όπου $\vec{m} = \frac{1}{2}\vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\jmath}$ και $\vec{n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{\imath} + \frac{1}{2}\vec{\jmath}$.

ϑ′. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Q και R ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$.

ι′. Βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων $\varphi(Q)$ και $\varphi(R)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$.

ια′. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$.

ιβ′. Βρείτε την εξίσωση του κύκλου $\varphi(C)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{m}, \vec{n})$.

Κεφάλαιο 3

Μιγαδικοί Αριθμοί

Μία από τις πρώτες ιδιότητες των αρνητικών αριθμών που μαθαίνουμε στο σχολείο είναι οτι το τετράγωνο ενός αρνητικού αριθμού είναι θετικός. Έτσι δεν φαίνεται να υπάρχει στο σύνολο των αριθμών η δυνατότητα ένας αρνητικός αριθμός να είναι ίσος με το τετράγωνο ενός άλλου αριθμού. Οι τετραγωνικές ρίζες αρνητικών ποσοτήτων όμως εμφανίζονται σε διάφορα μαθηματικά προβλήματα. Για πολλούς αιώνες αυτές οι ποσότητες αποτελούσαν ένα μυστήριο για τους μαθηματικούς. Ακόμη και μετά την ανάπτυξη της θεωρίας των μιγαδικών αριθμών, αυτό το μυστήριο παρέμεινε στο όνομα: οι τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών είναι ''φανταστικοί'' αριθμοί. Στην εποχή μας, οι μιγαδικοί αριθμοί δεν έχουν τίποτα το φανταστικό ή το μυστηριώδες. Αποτελούν ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο, όχι μόνο για τους μαθηματικούς, αλλά και για πολλούς άλλους επιστήμονες και μηχανικούς.

Σε αυτό το μάθημα θα εισαγάγουμε τους μιγαδικούς αριθμούς από γεωμετρική σκοπιά, ως έναν εναλλακτικό τρόπο να περιγράψουμε το επίπεδο. Θα δούμε διάφορους τρόπους να τους περιγράψουμε, και θα μελετήσουμε τις βασικές τους ιδιότητες. Σε επόμενα μαθήματα, όπως η Γραμμική Άλγεβρα και οι Διαφορικές Εξισώσεις, θα τους χρησιμοποιήσετε για να λύσετε συγκεκριμένα προβλήματα. Τέλος στο μάθημα της Μιγαδικής Ανάλυσης θα δείτε τον πλούτο και την ομορφιά της μαθηματικής θεωρίας των μιγαδικών αριθμών.

Εβδομάδα 5

3.1 Ρίζες αρνητικών αριθμών

Γνωρίζουμε οτι δεν υπάρχει πάντα πραγματικός αριθμός που να ικανοποιεί μία εξίσωση δευτέρου βαθμού. Για παράδειγμα, για την εξίσωση $x^2-2x+3=0$, ο τύπος των ριζών δίδει $x=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}=1+\sqrt{2}\sqrt{-1}$, που δεν είναι ίσο με οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό, αφού δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός του οποίου το τετράγωνο να είναι -1.

Κάτι πιο παράξενο συμβαίνει με εξισώσεις 3ου βαθμού. Τον 16ο αιώνα ανακαλύφθηκε διαδικασία λύσης αυτής της εξίσωσης, η οποία σε κάποιες περιπτώσεις οδηγεί σε εκφράσεις με τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών. Το παράξενο εδώ είναι οτι εάν υποθέσουμε οτι υπάρχει κάποια ποσότητα της οποίας το τετράγωνο είναι -1, και συνεχίσουμε τις πράξεις, καταλήγουμε σε πραγματικό αριθμό που αποτελεί ρίζα της εξίσωσης.

Για παράδειγμα, εάν εφαρμόσουμε τη διαδικασία στην εξίσωση $x^3-15x-4=0$, φτάνουμε στην έκφραση

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &= \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Εάν τώρα εφαρμόσουμε την ταυτότητα $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$ και τις ιδιότητες των πράξεων, έχουμε

$$\begin{aligned} (2+\sqrt{-1})^3 &= 2^3+3\cdot 4\cdot\sqrt{-1}+3\cdot 2\cdot(-1)+(\sqrt{-1})^3 \\ &= 8-6+12\sqrt{-1}-1\sqrt{-1} \\ &= 2+11\sqrt{-1}\,, \end{aligned}$$

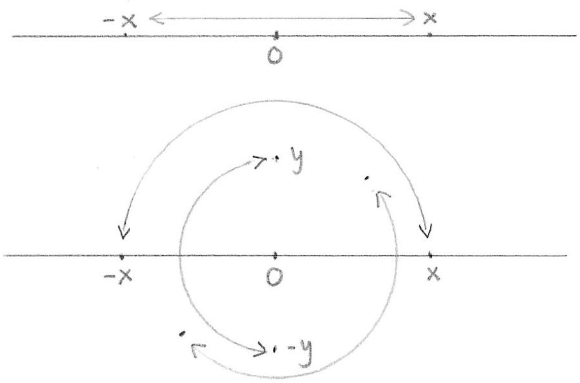
και παρόμοια

$$(2-\sqrt{-1})^3=2-11\sqrt{-1}\,.$$

Άρα $x=(2+11\sqrt{-1})+(2-11\sqrt{-1})=4$, που είναι πράγματι ρίζα της εξίσωσης! Από τέτοια παραδείγματα φάνηκε για πρώτη φορά να έχει χρησιμότητα η έννοια της τετραγωνικής ρίζας ενός αρνητικού αριθμού, αρκεί να μπορέσουμε να δώσουμε συγκεκριμένο νόημα σε αυτήν.

Σε αυτό το μάθημα δεν θα ακολουθήσουμε την ιστορική εξέλιξη της έννοιας, που πήρε σχεδόν τρείς αιώνες μέχρι να γίνει αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα, αλλά θα τη δούμε γεωμετρικά, από μία σύγχρονη σκοπιά.

Η ποσότητα $\sqrt{-1}$ παριστάνει κάτι που όταν το επαναλάβεις δύο φορές δίδει -1. Ο πολλαπλασιασμός με -1 στην ευθεία των πραγματικών αριθμών αντιστοιχεί στη συμμετρία γύρω από το 0, που απεικονίζει κάθε αριθμό στον αντίθετό του, $x \mapsto -x$. Πώς είναι δυνατόν να προκύψει αυτή η συμμετρία στην ευθεία ως επανάληψη μίας διαδικασίας δύο φορές; Εάν παραμείνουμε στην ευθεία αυτό δεν είναι δυνατό. Εάν όμως θεωρήσουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών σαν μία ευθεία μέσα σε ένα επίπεδο, τότε η συμμετρία $x \mapsto -x$ στην ευθεία προκύπτει από την περιστροφή του επιπέδου γύρω από το 0 κατά γωνία π. Αυτήν τη περιστροφή μπορούμε να την αντιληφθούμε ως επανάληψη μίας διαδικασίας δύο φορές: είναι δύο φορές η περιστροφή γύρω από το 0 κατά γωνία $\pi/2$!



Σχήμα 3.1: Η συμμετρία $x \mapsto -x$ στην ευθεία και στο επίπεδο

Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί να αναζητήσουμε το νόημα της $\sqrt{-1}$ όχι στην ευθεία αλλά στο επίπεδο: πολλαπλασιασμός με $\sqrt{-1}$ είναι η περιστροφή του επιπέδου γύρω από το 0 κατά γωνία $\pi/2$. Όταν το επαναλάβουμε δύο φορές η ευθεία των πραγματικών βρίσκεται στη συμμετρική θέση, που αντιστοιχεί στον πολλαπλασιασμό με -1.

Εάν τώρα θεωρήσουμε το επίπεδο με ένα ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, μπορούμε να ταυτίσουμε την ευθεία των πραγματικών αριθμών με τον άξονα Ox, αντιστοιχώντας το $a \in \mathbb{R}$ στο σημείο $(a, 0)$, και τον ‘‘αριθμό’’ $\sqrt{-1}$ στο σημείο $(0, 1)$, έτσι ώστε η περιστροφή κατά γωνία $\pi/2$ να στέλνει το 1 στο $\sqrt{-1}$. Στη συνέχεια μπορούμε να επεκτείνουμε αυτή την αντιστοιχία σε κάθε σημείο του επιπέδου, θεωρώντας οτι

$$(a, b) = a(1, 0) + b(0, 1) = a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{-1}\,.$$

Θέλουμε να εξετάσουμε εάν μπορούμε να ορίσουμε πράξεις με αυτές τις εκφράσεις, που να έχουν ιδιότητες ανάλογες με τις πράξεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, με την προσθήκη του κανόνα $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$.

Για συντομία, συμβολίζουμε το $\sqrt{-1}$ με i, και τον ‘‘αριθμό’’ που αντιστοιχεί στο σημείο (a, b) του επιπέδου με $a + b\mathrm{i}$. Το σύνολο αυτών των ‘‘αριθμών’’ το συμβολίζουμε $\mathbb{C}$.

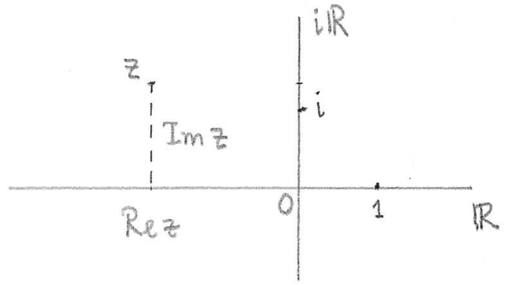
Ορισμός 3.1. Το σύνολο $\mathbb{C} = \{a+b\mathrm{i} : a, b \in \mathbb{R}\}$ είναι το σύνολο των **μιγαδικών αριθμών**. Εάν $z = a + b\mathrm{i}$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός,

- ο πραγματικός αριθμός a ονομάζεται **πραγματικό μέρος** του z και συμβολίζεται $\operatorname{Re} z = a$.
- ο πραγματικός αριθμός b ονομάζεται **φανταστικό μέρος** του z και συμβολίζεται $\operatorname{Im} z = b$.

Δραστηριότητα 3.1 Γράψτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των μιγαδικών αριθμών

$$3 + 3\mathrm{i}\,, \qquad 5\,, \qquad 2\mathrm{i}\,.$$

Προσέξτε οτι το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού αριθμού είναι πραγματικός αριθμός.



Σχήμα 3.2: Το επίπεδο των μιγαδικών αριθμών

Το υποσύνολο $\{a + 0\mathrm{i} : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ το ταυτίζουμε με το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών, και το ονομάζουμε **πραγματικό άξονα** στο $\mathbb{C}$. Το υποσύνολο $\{0 + b\mathrm{i} : b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$ το ονομάζουμε **φανταστικό άξονα** στο $\mathbb{C}$ και μπορούμε να το συμβολίζουμε $\mathbb{R}\mathrm{i}$. Τα στοιχεία του τα ονομάζουμε **φανταστικούς αριθμούς**.

3.2 Πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ορίζουμε πρόσθεση ώστε να συμφωνεί με την πρόσθεση διανυσμάτων του επιπέδου,

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\mathrm{i}\,.$$

Για να ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό θεωρούμε οτι ισχύει η επιμεριστική ιδιότητα, ώστε

$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = ac + a(d\mathrm{i}) + (b\mathrm{i})c + (b\mathrm{i})(d\mathrm{i})\,.$$

Θεωρώντας οτι ισχύουν επίσης η προσεταιριστική και η αντιμεταθετική ιδιότητα για τον πολλαπλασιασμό πραγματικών αριθμών με το i, έχουμε

$$\begin{aligned} (a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) &= ac + ad\mathrm{i} + bc\mathrm{i} + bd\mathrm{i}\mathrm{i} \\ &= (ac - bd) + (ad + bc)\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Δραστηριότητα 3.2 Υπολογίστε, δηλαδή γράψτε στη μορφή $a + b\mathrm{i}$, τους ακόλουθους μιγαδικούς αριθμούς:

α′. $(3 + 2\mathrm{i}) - (\mathrm{i} + 5)$	β′. $(3 + 2\mathrm{i})(\mathrm{i} + 5)$
γ′. $(2 + \mathrm{i}) + (2 - \mathrm{i})$	δ′. $(2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})$
ε′. $(2 + \sqrt{3}\mathrm{i})^2$	ϛ′. $(2 + \sqrt{3}\mathrm{i})^3$

Σημειώνουμε το γινόμενο

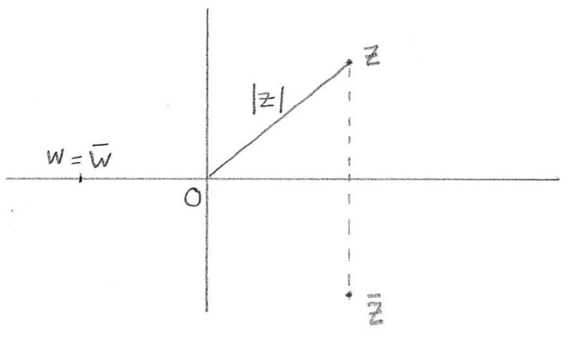
$$(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2 ,$$

το οποίο είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Λέμε οτι οι μιγαδικοί αριθμοί $a + b\mathrm{i}$ και $a - b\mathrm{i}$ είναι **συζυγείς** μιγαδικοί αριθμοί. Το συζυγή ενός μιγαδικού αριθμού $z = a + b\mathrm{i}$ το συμβολίζουμε $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$. Παρατηρούμε οτι $\mathrm{Re}\,\bar{z} = \mathrm{Re}\,z$ και $\mathrm{Im}\,\bar{z} = -\mathrm{Im}\,z$.

Δραστηριότητα 3.3 Βρείτε τους μιγαδικούς συζυγείς των μιγαδικών αριθμών

$$3\,, \qquad 2\mathrm{i}\,, \qquad 1 - 3\mathrm{i}\,.$$

Δραστηριότητα 3.4 Δείξτε οτι $\bar{z} = z$ εάν και μόνον εάν $\mathrm{Im}\,z = 0$.



Σχήμα 3.3: Συζυγείς μιγαδικοί αριθμοί

Στους μιγαδικούς αριθμούς ισχύει η ιδιότητα διαγραφης: εάν $w \neq 0$ και $zw = uw$ τότε $z = u$.

Χρησιμοποιούμε το συζυγή ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού z και την ιδιότητα διαγραφής, για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο $\frac{1}{z}$, δηλαδή να τον φέρουμε στη μορφή $p + q\mathrm{i}$.

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - b\mathrm{i}}{(a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i})} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\mathrm{i}\,.$$

Δραστηριότητα 3.5 Υπολογίστε το πηλίκο $\frac{c+d\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}}$, πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με το συζυγή $a - b\mathrm{i}$.

Πρόταση 3.1 *Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w, και τους συζυγείς αριθμούς $\bar{z}$ και $\bar{w}$.*

α΄. Στο μιγαδικό επίπεδο οι αριθμοί z και $\bar{z}$ αντιστοιχούν σε σημεία συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα.

β΄.

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})\,, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \bar{z})\,.$$

γ΄.

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}\,.$$

δ΄.

$$\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}\,.$$

ε΄.

$$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}\,.$$

ϛ΄.

$$\overline{(\bar{z})} = z\,.$$

ζ΄.

$$\overline{(z^n)} \;=\; (\bar{z})^n$$

Αυτές οι ιδιότητες αποδεικνύονται αντικαθιστώντας $z = a + b\mathrm{i}$, $\bar{z} =$

$a - b\mathrm{i}$ και $w = c + d\mathrm{i}$, $\bar{w} = c - d\mathrm{i}$. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned} \overline{zw} &= \overline{(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i})} \\ &= \overline{ac - bd + ad\mathrm{i} + bc\mathrm{i}} \\ &= ac - bd - ad\mathrm{i} - bc\mathrm{i}\,, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \bar{z}\bar{w} &= (a - b\mathrm{i})(c - d\mathrm{i}) \\ &= ac - bd - ad\mathrm{i} - bc\mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Δραστηριότητα 3.6 Υπολογίστε, δηλαδή γράψτε στη μορφή $a + b\mathrm{i}$, τους ακόλουθους μιγαδικούς αριθμούς:

α′. $(3 + 2\mathrm{i}) - \overline{(\mathrm{i} + 5)}$

β′. $\overline{(3 + 2\mathrm{i})}(\mathrm{i} + 5)$

γ′. $\frac{2+\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}$

δ′. $(2 + \sqrt{3}\mathrm{i})^{-1}$

ε′. $(2 + \sqrt{3}\mathrm{i})^{-2}$

ϛ′. $\frac{1-\mathrm{i}}{3+4\mathrm{i}}$

3.3 Μέτρο μιγαδικού αριθμού

Παρατηρούμε οτι το γινόμενο ενός μιγαδικού αριθμού με το συζυγή του είναι το τετράγωνο του μέτρου του αντίστοιχου διανύσματος (a, b):

$$z\bar{z} = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2\,.$$

Τον αριθμό $\sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ τον συμβολίζουμε $|z|$ και τον ονομάζουμε **μέτρο** του μιγαδικού αριθμού z. Το μέτρο του z είναι η απόσταση του z από το 0.

Παράδειγμα 3.1 Το μέτρο του μιγαδικού αριθμού $z = -1 + \mathrm{i}$ είναι $|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Δραστηριότητα 3.7 Υπολογίστε το μέτρο των μιγαδικών αριθμών

$$-2\,, \qquad 3\mathrm{i}\,, \qquad 1 + \mathrm{i}\,, \qquad 2 - \mathrm{i}\,.$$

Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων του μιγαδικού επιπέδου z και w είναι $d(z, w) = |z - w|$. Πράγματι, εάν $z = a + b\mathrm{i}$ και $w = c + d\mathrm{i}$, $|z - w| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$.

Πρόταση 3.2 *Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w. Το μέτρο μιγαδικών αριθμών έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

α΄. $|z| = |\bar{z}| = |-z|$,

β΄. $|zw| = |z|\,|w|$,

γ΄. $\big|\,|z| - |w|\,\big| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$.

Οι δύο πρώτες ιδιότητες είναι άμεσες συνέπειες του ορισμού $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Η τρίτη είναι η τριγωνική ανισότητα στο επίπεδο: οι μιγαδικοί αριθμοί 0, z και $z + w$ αποτελούν τις κορυφές ενός τριγώνου με μήκη πλευρών $|z|$, $|w|$ και $|z+w|$, και σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα κάθε πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των άλλων δύο και μεγαλύτερη από την απόλυτη τιμή της διαφοράς τους.

Παράδειγμα 3.2 Η εξίσωση $|z - z_0| = r$ ικανοποιείται από τους μιγαδικούς αριθμούς που απέχουν σταθερή απόσταση r από τον z_0. Η εξίσωση παριστάνει έναν κύκλο με κέντρο z_0 και ακτίνα r.

Η εξίσωση $|z - z_1| = |z - z_2|$ ικανοποιείται από τους μιγαδικούς αριθμούς που απέχουν ίση απόσταση από τον z_1 και τον z_2. Η εξίσωση παριστάνει τη μεσοκάθετο των σημείων z_1 και z_2.

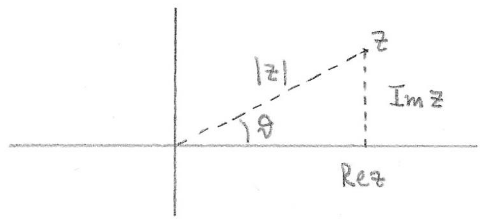
3.4 Όρισμα μιγαδικού αριθμού

Για ένα μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$, οι πραγματικοί αριθμοί $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ και $|z|$ αποτελούν τα μήκη πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. Συνεπώς υπάρχει πραγματικός αριθμός ϑ τέτοιος ώστε

$$\cos\vartheta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\,, \qquad \sin\vartheta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\,. \tag{3.1}$$

Οποιοσδήποτε αριθμός με αυτή την ιδιότητα ονομάζεται **όρισμα** του μιγαδικού αριθμού z. Προφανώς, εάν ϑ είναι ένα όρισμα του z, τότε $\vartheta + 2k\pi$ είναι επίσης όρισμα του z, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\vartheta \equiv \varphi$ για να δηλώσουμε οτι οι πραγματικοί αριθμοί ϑ και φ διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του 2π. Διακρίνουμε το **πρωτεύον** όρισμα, το οποίο ικανοποιεί τις ανισότητες $0 \leq \vartheta < 2\pi$ και το συμβολίζουμε $\operatorname{Arg} z$.

Γεωμετρικά, ϑ είναι η γωνία που σχηματίζει η ημιευθεία από το 0 που περνάει από το z, με τη θετική ημιευθεία του πραγματικού άξονα, Σχήμα 3.4.



Σχήμα 3.4: Όρισμα μιγαδικού αριθμού

Εάν ϑ είναι όρισμα του μιγαδικού αριθμού z, τότε $-\vartheta$ είναι ένα όρισμα του συζυγούς $\bar{z}$, αφού

$$\cos(-\vartheta) = \cos\vartheta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} = \frac{\operatorname{Re} \bar{z}}{|\bar{z}|}, \quad \sin(-\vartheta) = -\sin\vartheta = -\frac{\operatorname{Im} z}{|z|} = \frac{\operatorname{Im} \bar{z}}{|\bar{z}|}.$$

Παράδειγμα 3.3 Για να βρούμε το όρισμα του μιγαδικού αριθμού $z = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i}$, παρατηρούμε οτι $|z|^2 = 1 + 3$, άρα $|z| = 2$. Συνεπώς $\cos\vartheta = \frac{1}{2}$ και $\sin\vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Άρα ένα όρισμα του z είναι $\vartheta = -\frac{\pi}{3}$, ενώ το πρωτεύον όρισμα είναι $\operatorname{Arg} z = \frac{5\pi}{3}$.

> **Δραστηριότητα 3.8** Υπολογίστε το πρωτεύον όρισμα των μιγαδικών αριθμών
>
> $$1, \quad \mathrm{i}, \quad -\mathrm{i}, \quad -1, \quad 1+\mathrm{i}, \quad -(1+\mathrm{i}), \quad \sqrt{3}+\mathrm{i}.$$

3.5 Τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού αριθμού

Εάν ϑ είναι οποιοδήποτε όρισμα ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού z, παρατηρούμε οτι $\operatorname{Re} z = |z| \cos\vartheta$ και $\operatorname{Im} z = |z| \sin\vartheta$. Συνεπώς

$$z = |z|(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)\,.$$

Ορισμός 3.2. Η **τριγωνομετρική μορφή** ενός μιγαδικού αριθμού $z \neq 0$ είναι

$$z = r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)\,,$$

όπου $r > 0$ και $\vartheta \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3.4 Εάν $z = -2 + 2\mathrm{i}$, τότε $r = |z| = \sqrt{8}$ και

$$z = \sqrt{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)\,.$$

Ένα όρισμα του z είναι το $\vartheta = \frac{3\pi}{4}$. Προσέξτε οτι ο συντελεστής του $(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$ πρέπει να είναι θετικός. Το πρόσημο του πραγματικού και του φανταστικού μέρους λαμβάνονται υπ' όψη στον προσδιορισμό του ορίσματος ϑ.

Παράδειγμα 3.5 Εάν $\vartheta = \frac{11}{6}\pi$ και $r = 2$, τότε

$$\begin{aligned} z &= 2\left(\cos\frac{11}{6}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{11}{6}\pi\right) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \sqrt{3} - \mathrm{i}\,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.6 Εάν $z = r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$, τότε $\bar{z} = r(\cos\vartheta - \mathrm{i}\sin\vartheta) = r(\cos(-\vartheta) + \mathrm{i}\sin(-\vartheta))$.

Δραστηριότητα 3.9 Γράψτε σε τριγωνομετρική μορφή τους μιγαδικούς αριθμούς

$$1\,, \qquad -1\,, \qquad \mathrm{i}\,, \qquad -2\mathrm{i}\,, \qquad 1+\mathrm{i}\,, \qquad -(1+\mathrm{i})\,.$$

3.6 Πολλαπλασιασμός μιγαδικών αριθμών ως ομοιοθεσία

Η τριγωνομετρική μορφή έκφρασης των μιγαδικών αριθμών μας επιτρέπει να περιγράψουμε τον πολλαπλασιασμό μιγαδικών αριθμών γεωμετρικά.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $z = r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$ και $w = s(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, και υπολογίζουμε το γινόμενο

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) \\ &= rs\left[(\cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi) + \mathrm{i}(\cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi)\right]\,. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τις τριγωνομετρικές ταυτότητες για το άθροισμα των γωνιών,

$$\cos(\vartheta+\varphi) = \cos\vartheta\cos\varphi - \sin\vartheta\sin\varphi\,, \tag{3.2}$$

$$\sin(\vartheta+\varphi) = \cos\vartheta\sin\varphi + \sin\vartheta\cos\varphi \tag{3.3}$$

και έχουμε

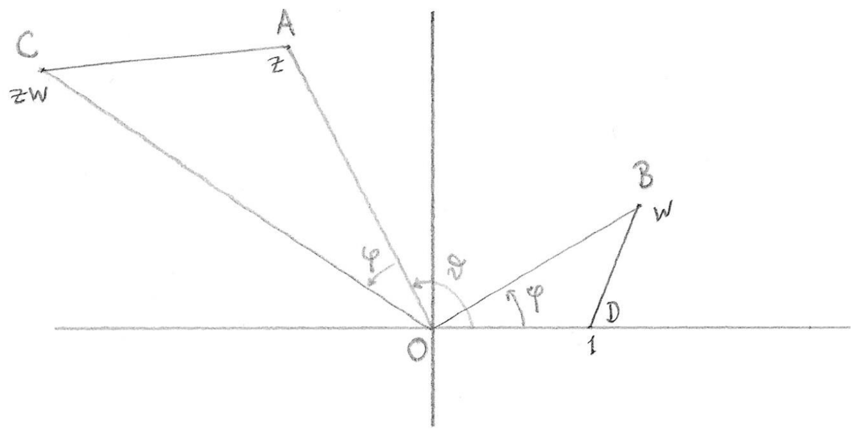
$$z = rs\left(\cos(\vartheta+\varphi) + \mathrm{i}\sin(\vartheta+\varphi)\right)\,. \tag{3.4}$$

Βλέπουμε δηλαδή οτι το γινόμενο των μέτρων των μιγαδικών αριθμών z και w είναι το μέτρο του γινομένου τους

$$|zw| = |z|\,|w|\,, \tag{3.5}$$

και το άθροισμα των ορισμάτων των μιγαδικών αριθμών z και w είναι ένα όρισμα του γινομένου τους,

$$\mathrm{Arg}\,(zw) \equiv \mathrm{Arg}\,z + \mathrm{Arg}\,w\,. \tag{3.6}$$



Σχήμα 3.5: Γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών

Στο Σχήμα 3.5, τα σημεία A, B, C, D αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς z, w, zw και 1 αντίστοιχα. Από τις σχέσεις 3.6 και 3.5 συμπεραίνουμε οτι τα τρίγωνα ODB και OAC είναι όμοια. Ο πολλαπλασιασμός με το z στο μιγαδικό επίπεδο είναι μία **ομοιοθεσία**, δηλαδή ένας μετασχηματισμός που απεικονίζει κάθε σημείο w του επιπέδου σε ένα σημείο w' τέτοιο ώστε το τρίγωνο που σχηματίζουν τα z και w' με το 0, να είναι όμοιο με το τρίγωνο που σχηματίζουν τα 1 και w με το 0. Με αυτή την έννοια, το zw είναι προς το z, όπως το w είναι προς το 1,

$$zw \,:\, z = w \,:\, 1\,.$$

όπου ως αναλογία δεν εννοούμε απλώς την ισότητα του λόγου των μηκών (όπως για ευθύγραμμα τμήματα στο ευκλείδειο επίπεδο) αλλά και την ισότητα των αντίστοιχων γωνιών.

Με όρους διανυσμάτων, ο πολλαπλασιασμός με το z, στρέφει το διάνυσμα θέσης του w κατά γωνία $\mathrm{Arg}\,(z)$, και το πολλαπλασιάζει με τον αριθμό $|z|$.

Παρατηρούμε οτι ο πολλαπλασιασμός με z τέτοιο ώστε $|z| = 1$, είναι απλώς στροφή του μιγαδικού επιπέδου κατά γωνία $\mathrm{Arg}\,(z)$. Ειδικότερα, ο πολλαπλασιασμός με τη φανταστική μονάδα i, είναι περιστροφή κατά

$\pi/2$. Όπως έχουμε παρατηρήσει, από αυτή την άποψη αποκτά γεωμετρικό νόημα η ιδιότητα $\mathrm{i}^2 = -1$: η επανάληψη της περιστροφής κατά $\pi/2$ δίδει περιστροφή κατά γωνία π, η οποία απεικονίζει κάθε σημείο στο αντίθετο του :

$$\mathrm{i}^2 w = -w\,.$$

Δραστηριότητα 3.10 Στο μιγαδικό επίπεδο σημειώστε το σημείο που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό $w = 1 + \mathrm{i}$. Σημειώστε επίσης έναν οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z με $\mathrm{Re}\, z < 0$, και βρείτε σχεδιαστικά το σημείο που αντιστοιχεί στο γινόμενο zw.
Κάνετε το ίδιο για έναν αριθμό u με $\mathrm{Im}\, u < 0$.

3.7 Δυνάμεις μιγαδικού αριθμού. Θεώρημα De Moivre

Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού αριθμού $z \neq 0$, υπολογίζεται εύκολα εάν ο z είναι σε τριγωνομετρική μορφή.

Έστω $z = r\,(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$, και υποθέτουμε οτι ο αντίστροφος έχει τριγωνομετρική μορφή $z^{-1} = t(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} 1 &= z\,w \\ &= r\,t\,(\cos(\vartheta+\varphi) + \mathrm{i}(\vartheta+\varphi))\ , \end{aligned}$$

αλλά ο μιγαδικός αριθμός 1 έχει μέτρο 1 και όρισμα 0. Συνεπώς $r\,t = 1$ και $\vartheta + \varphi \equiv 0$, και καταλήγουμε

$$z^{-1} = \frac{1}{r}\,(\cos(-\vartheta) + \mathrm{i}\sin(-\vartheta))\ ,$$

δηλαδή $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$, και $-\vartheta$ είναι ένα όρισμα του z^{-1}. Ειδικότερα, για το πρωτεύον όρισμα του z^{-1} έχουμε

$$\mathrm{Arg}\ z^{-1} = \begin{cases} 2\pi - \mathrm{Arg}\, z & \text{εάν } \mathrm{Arg}\, z \neq 0\,, \\ 0 & \text{εάν } \mathrm{Arg}\, z = 0\,. \end{cases}$$

Δραστηριότητα 3.11 Στο μιγαδικό επίπεδο σημειώστε τα σημεία που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς $z = \cos\frac{\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{\pi}{4}$ και $w = \cos\frac{5\pi}{4} + \mathrm{i}\,\sin\frac{5\pi}{4}$. Βρείτε σχεδιαστικά τα σημεία που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς $(-\mathrm{i})^{-1}$, $(2\mathrm{i})^{-1}$, z^{-1}, w^{-1}, $(2z)^{-1}$ και $(3w)^{-1}$.

Η τριγωνομετρική μορφή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για τον υπολογισμό δυνάμεων μιγαδικών αριθμών. Θεωρούμε τον αριθμό $z = r\,(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$ και τις δυνάμεις του

$$\begin{aligned} z^2 &= r\,r\ (\cos(\vartheta+\vartheta) + \mathrm{i}\sin(\vartheta+\vartheta)) \\ &= r^2\,(\cos(2\vartheta) + \mathrm{i}\sin(2\vartheta))\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z^3 &= r^2\,r\ (\cos(2\vartheta+\vartheta) + \mathrm{i}\sin(2\vartheta+\vartheta)) \\ &= r^3\,(\cos(3\vartheta) + \mathrm{i}\sin(3\vartheta)) \end{aligned}$$

και, όπως θα δείξουμε με επαγωγή στο n,

$$z^n = r^n\,(\cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\sin(n\vartheta))\ .$$

Αυτό το αποτέλεσμα ονομάζεται Θεώρημα του De Moivre. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα στο z^{-1}, βλέπουμε οτι μπορεί να επεκταθεί και σε αρνητικούς ακέραιους. Εάν $n \in \mathbb{N}$,

$$z^{-n} = r^{-n}\,(\cos(-n\vartheta) + \mathrm{i}\sin(-n\vartheta))\ .$$

Θεώρημα 3.3 *(Θεώρημα De Moivre) Για κάθε μιγαδικό αριθμό $z \neq 0$, και κάθε ακέραιο $n \in \mathbb{Z}$, εάν $z = r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$, τότε*

$$z^n = r^n\,(\cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\sin(n\vartheta))$$

Θα δούμε αναλυτικά την απόδειξη του Θεωρήματος De Moivre ως ένα παράδειγμα απόδειξης με επαγωγή.

Απόδειξη. Θεωρούμε μιγαδικό αριθμό $z = r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta) \neq 0$. Αρχικά θα δείξουμε με επαγωγή οτι για κάθε φυσικό αριθμό n ισχύει $z^n = r^n\,(\cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\sin(n\vartheta))$.

Εάν $n = 1$, το ζητούμενο είναι $z = r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$, το οποίο ισχύει από τα δεδομένα.

Τώρα θεωρούμε δεδομένο οτι για κάποιο k ισχύει $z^k = r^k\left(\cos(k\vartheta) + \mathrm{i}\sin(k\vartheta)\right)$ και θέλουμε να δείξουμε οτι ισχύει $z^{k+1} = r^{k+1}\left(\cos((k+1)\vartheta) + \mathrm{i}\sin((k+1)\vartheta)\right)$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
z^{k+1} &= z\,z^k \\
&= r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)r^k\left(\cos(k\vartheta) + \mathrm{i}\sin(k\vartheta)\right) \\
&= r^{k+1}(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)\left(\cos(k\vartheta) + \mathrm{i}\sin(k\vartheta)\right) \\
&= r^{k+1}\left((\cos\vartheta\cos(k\vartheta) - \sin\vartheta\sin(k\vartheta)) + \mathrm{i}(\cos\vartheta\sin(k\vartheta) + \sin\vartheta\cos(k\vartheta))\right) \\
&= r^{k+1}\left(\cos((k+1)\vartheta) + \mathrm{i}\sin((k+1)\vartheta)\right)\,.
\end{aligned}$$

Αφού το ζητούμενο ισχύει για $n = 1$, και αποδείξαμε οτι εάν ισχύει για κάποιο φυσικό αριθμό k τότε ισχύει και για τον επόμενο φυσικό αριθμό $k+1$, από το Αξίωμα της Επαγωγής, ισχύει για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό.

Απομένει να δείξουμε οτι ισχύει για $n = 0$ και για $n < 0$.

Για $n = 0$, έχουμε $z^0 = 1$ και $r^0(\cos 0 + \mathrm{i}\sin 0) = 1$, άρα το ζητούμενο ισχύει.

Για $n < 0$, παρατηρούμε οτι $-n > 0$, άρα το ζητούμενο ισχύει για $-n$. Θεωρούμε το $z^{-1} = r^{-1}(\cos(-\vartheta) + \mathrm{i}\sin(-\vartheta)$, και έχουμε

$$\begin{aligned}
z^n &= \left(z^{-1}\right)^{-n} \\
&= \left(r^{-1}(\cos(-\vartheta) + \mathrm{i}\sin(-\vartheta))\right)^{-n}.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε το ζητούμενο για το θετικό αριθμό $-n$,

$$\begin{aligned}
\left(r^{-1}(\cos(-\vartheta) + \mathrm{i}\sin(-\vartheta))\right)^{-n} &= r^n(\cos(-n(-\vartheta)) + \mathrm{i}\sin(-n(-\vartheta)) \\
&= r^n\left(\cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\sin(n\vartheta)\right)\,.
\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

□

Δραστηριότητα 3.12 Βρείτε σχεδιαστικά τις δυνάμεις z^2, z^3, z^4 για $z = \cos\frac{2\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{3}$, και τις δυνάμεις $w^2, \ldots, w^8$ για $w = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$.

Χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική μορφή μιγαδικών αριθμών μπορούμε να βρούμε ταυτότητες που συσχετίζουν τις δυνάμεις των τριγωνομετρικών συναρτήσεων του ϑ με τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις των πολλαπλασίων του ϑ.

Παράδειγμα 3.7 Αναπτύγματα δυνάμεων των $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$. Εάν $z = \cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta$, τότε $\frac{1}{z} = \cos\vartheta - \mathrm{i}\sin\vartheta$ και

$$\begin{aligned} 2\cos\vartheta &= z + \frac{1}{z} \\ 2\mathrm{i}\sin\vartheta &= z - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Από τους τύπους του De Moivre, $z^n = \cos n\vartheta + \mathrm{i}\sin n\vartheta$ και $z^{-n} = \cos n\vartheta - \mathrm{i}\sin n\vartheta$. Άρα

$$2\cos n\vartheta = z^n + \frac{1}{z^n} \tag{3.7}$$

$$2\mathrm{i}\sin n\vartheta = z^n - \frac{1}{z^n}\,. \tag{3.8}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την 3.7 και το ανάπτυγμα του διωνύμου $\left(z + \frac{1}{z}\right)^6$ για να εκφράσουμε το $\cos^6\vartheta$ σε συνημίτονα πολλαπλασίων της ϑ:

$$\begin{aligned} 2^6\cos^6\vartheta &= \left(z + \frac{1}{z}\right)^6 \\ &= z^6 + 6z^4 + 15z^2 + 20 + 15\frac{1}{z^2} + 6\frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^6} \\ &= \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + 6\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 15\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 20 \\ &= 2\cos 6\vartheta + 12\cos 4\vartheta + 30\cos 2\vartheta + 20 \end{aligned}$$

και καταλήγουμε

$$\cos^6\vartheta = \frac{1}{32}\left(\cos 6\vartheta + 6\cos 4\vartheta + 15\cos 2\vartheta + 10\right)\,.$$

Ανάλογα υπολογίζουμε οτι

$$\begin{aligned}(2\mathrm{i})^5\sin^5\vartheta &= \left(z-\frac{1}{z}\right)^5\\ &= \left(z^5-\frac{1}{z^5}\right)-5\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)+10\left(z-\frac{1}{z}\right)\end{aligned}$$

και από την 3.8 έχουμε

$$2^5\sin^5\vartheta = 2(\sin 5\vartheta - 5\sin 3\vartheta + 10\sin\vartheta)$$

και

$$\sin^5\vartheta = \frac{1}{16}(\sin 5\vartheta - 5\sin 3\vartheta + 10\sin\vartheta).$$

Παράδειγμα 3.8 Αναπτύγματα των $\cos n\vartheta$, $\sin n\vartheta$ σε δυνάμεις.

Από το Θεώρημα De Moivre, $\cos n\vartheta$ είναι το πραγματικό μέρος του $(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)^n$, ενώ $\sin n\vartheta$ είναι το φανταστικό μέρος του $(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)^n$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα του διωνύμου $(\cos\vartheta+\mathrm{i}\sin\vartheta)^6$ για να υπολογίσουμε τα $\cos 6\vartheta$ και $\sin 6\vartheta$ σε δυνάμεις των $\cos\vartheta$ και $\sin\vartheta$,

$$\begin{aligned}(\cos 6\vartheta + \mathrm{i}\sin 6\vartheta) &= (\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)^6\\ &= \cos^6\vartheta + 6\mathrm{i}\cos^5\vartheta\sin\vartheta + 15\mathrm{i}^2\cos^4\vartheta\sin^2\vartheta\\ &\quad +20\mathrm{i}^3\cos^3\vartheta\sin^3\vartheta + 15\mathrm{i}^4\cos^2\vartheta\sin^4\vartheta\\ &\quad +6\mathrm{i}^5\cos\vartheta\sin^5\vartheta + \mathrm{i}^6\sin^6\vartheta\,.\end{aligned}$$

Χωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, έχουμε

$$\cos 6\vartheta = \cos^6\vartheta - 15\cos^4\vartheta\sin^2\vartheta + 15\cos^2\vartheta\sin^4\vartheta - \sin^6\vartheta$$

και

$$\sin 6\vartheta = 6\cos^5\vartheta\sin\vartheta - 20\cos^3\vartheta\sin^3\vartheta + 6\cos\vartheta\sin^5\vartheta.$$

3.8 Ασκήσεις

Άσκηση 3.1 Εάν $z = 3 - 5\mathrm{i}$ και $w = 3\mathrm{i} - 2$, υπολογίστε τους ακόλουθους μιγαδικούς αριθμούς, και σημειώστε τους στο μιγαδικό επίπεδο.

α′. $z + w$	β′. $z - w$
γ′. $z + \bar{w}$	δ′. $z - \bar{z}$
ε′. zw	ϛ′. $z\bar{w}$
ζ′. $z\bar{z}$	η′. $\frac{1}{z}$
ϑ′. $\frac{1}{\bar{w}}$	ι′. $\frac{w}{\bar{w}}$
ια′. $\frac{w}{z}$	ιβ′. $\frac{w-2z}{z\bar{w}}$

Άσκηση 3.2 Εάν $z = x + y\mathrm{i}$ και $w = u + v\mathrm{i}$, εκφράστε το πραγματικό μέρος, το φανταστικό μέρος και το μέτρο των ακόλουθων μιγαδικών παραστάσεων συναρτήσει των x, y, u, v.

α′. $z + 3\mathrm{i}$	β′. $z + \bar{w}$
γ′. $\frac{z-2\mathrm{i}}{w\mathrm{i}}$	δ′. $\frac{z(2-\mathrm{i})}{w+\mathrm{i}}$
ε′. $\frac{1}{z}$	ϛ′. $\frac{z}{\bar{w}}$

Άσκηση 3.3 Εκφράστε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των ακόλουθων παραστάσεων συναρτήσει του z και του $\bar{z}$. Για παράδειγμα, $\mathrm{Re}\,(2z) = z + \bar{z}$, $\mathrm{Im}\,(2z^2) = -\mathrm{i}(z^2 - \bar{z}^2)$.

α′. $z + 3\mathrm{i}$	β′. $z(2 - \mathrm{i})$
γ′. $\frac{z-2\mathrm{i}}{\mathrm{i}-1}$	δ′. $\frac{z(2-\mathrm{i})}{2+\mathrm{i}}$
ε′. $\frac{1}{z}$	ϛ′. $\frac{z}{\bar{z}}$

Άσκηση 3.4 α′. Αν z είναι οποιοσδήποτε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός, δείξτε ότι $z^{-1} = \bar{z}$ εάν και μόνον εάν $|z| = 1$.

β′. Βρείτε όλους τους αριθμούς z για τους οποίους $z^2 = \bar{z}$, (υπάρχουν 4 τέτοιοι αριθμοί).

Άσκηση 3.5 Βρείτε τους μιγαδικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει

α′. $\lvert z^2 \rvert = z^2$	β′. $\lvert z^2 \rvert = -z^2$
γ′. $\lvert z-1 \rvert = z$	δ′. $\lvert z+\mathrm{i} \rvert = 2\bar{z}$

Άσκηση 3.6 Περιγράψτε γεωμετρικά τα υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου

α′. $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-1| \leq 1\}$

β′. $\{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z\}$

γ′. $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z^2+2z| = 3|z|\}$

δ′. $\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z-\mathrm{i}| > |z+1|\}$

ε′. $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} \,:\, \operatorname{Re} z > 0\}$

ϛ′. $\{z \in \mathbb{C} \,:\, z+\bar{z} = 0\}$

Άσκηση 3.7 Βρείτε το πρωτεύον όρισμα των μιγαδικών αριθμών

α′. -2	β′. $-3\mathrm{i}$
γ′. $z = -1+\mathrm{i}\sqrt{3}$	δ′. $\bar{z} = -1-\mathrm{i}\sqrt{3}$

Άσκηση 3.8 Δείξτε οτι το πρωτεύον όρισμα του συζυγούς μιγαδικού αριθμού είναι

$$\operatorname{Arg}\,\bar{z} = \begin{cases} 2\pi - \operatorname{Arg} z & \text{εάν } \operatorname{Arg} z \neq 0 \\ 0 & \text{εάν } \operatorname{Arg} z = 0 \end{cases}$$

Άσκηση 3.9 Γράψτε σε τριγωνομετρική μορφή τους αριθμούς

α′. -10	β′. $10\mathrm{i}$
γ′. $1+\mathrm{i}\sqrt{3}$	δ′. $-1+\mathrm{i}\sqrt{3}$
ε′. $-4\left(\sqrt{2}-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)$	ϛ′. $-5\left(-\mathrm{i}+\sqrt{3}\right)$

Άσκηση 3.10 Υπολογίστε τους μιγαδικούς αριθμούς

α′. $(1+\mathrm{i})^{2017}$ β′. $\left(\frac{\sqrt{27}}{6}-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{2017}$

γ′. $\frac{7(\cos 130^\circ+\mathrm{i}\sin 130^\circ)}{14(\cos(-20^\circ)+\mathrm{i}\sin(-20^\circ))}$ δ′. $\left[3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^8$

Υπόδειξη: Για το (γ′), εκτελέστε τις πράξεις σε τριγωνομετρική μορφή, και θα καταλήξετε σε γωνίες των οποίων γνωρίζετε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Άσκηση 3.11 Θεωρήστε τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου $a=1-\mathrm{i}$, $b=4-3\mathrm{i}$ και $c=\frac{3}{2}-\frac{7}{2}\mathrm{i}$. Δείξτε, χρησιμοποιώντας μιγαδικούς αριθμούς, οτι abc είναι ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο.

Άσκηση 3.12 Χρησιμοποιήστε τους μιγαδικούς αριθμούς $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ και $1+\mathrm{i}$ για να υπολογίσετε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις του $\pi/12$.

Άσκηση 3.13 Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα De Moivre για να γράψετε τα $\cos(4\vartheta)$, $\sin(4\vartheta)$ ως πολυώνυμα στα $\cos\vartheta$, $\sin\vartheta$.

Υπόδειξη: Για αυτή και την επόμενη άσκηση, δείτε τις σημειώσεις, όπου υπάρχουν παρόμοια παραδείγματα.

Άσκηση 3.14 Χρησιμοποιήστε το Θεώρημα De Moivre για να γράψετε το $\cos^7\vartheta$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\cos\vartheta$, $\cos(3\vartheta), \cos(5\vartheta), \cos(7\vartheta)$.

Άσκηση 3.15 Εάν $|z|=1$ και $z\neq -1$, βρείτε το μέτρο και το όρισμα του $\frac{1+z}{1+\bar{z}}$ και υπολογίστε το μιγαδικό αριθμό $w=\left(\frac{1+z}{1+\bar{z}}\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$.

Εβδομάδα 6

3.9 Ρίζες της μονάδας

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, για κάθε φυσικό αριθμό n, ο αριθμός 1 έχει μία μοναδική n-οστή ρίζα εάν n είναι περιττός, ενώ έχει δύο n-οστές ρίζες, 1 και -1, εάν ο n είναι άρτιος. Θα δούμε οτι στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών ο αριθμός 1 έχει ακριβώς n n-οστές ρίζες για κάθε φυσικό αριθμό n.

Αναζητούμε τις λύσεις της εξίσωσης

$$z^n = 1\,.$$

Γράφουμε το z σε τριγωνομετρική μορφή, $z = r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$ και έχουμε

$$z^n = r^n\left(\cos(n\vartheta) + \mathrm{i}\sin(n\vartheta)\right) = 1\,,$$

συνεπώς $r^n = 1$, $\cos(n\vartheta) = 1$ και $\sin(n\vartheta) = 0$. Συμπεραίνουμε οτι κάθε n-οστή ρίζα της μονάδας γράφεται στη μορφή $\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta$, όπου ϑ ικανοποιεί τις σχέσεις $\cos(n\vartheta) = 1$ και $\sin(n\vartheta) = 0$. Από τις σχέσεις αυτές έχουμε οτι $n\vartheta = 2k\pi$ για $k \in \mathbb{Z}$, και συνεπώς οτι

$$\vartheta = \frac{k}{n}\,2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$

Απομένει να δούμε ποιές από αυτές τις τιμές του ορίσματος δίδουν διαφορετικούς μιγαδικούς αριθμούς. Εάν συμβολίσουμε $\vartheta_k = \frac{2k\pi}{n}$, έχουμε

$$\vartheta_{k+n} = \vartheta_k + 2\pi$$

και συνεπώς $\cos\vartheta_{k+n} + \mathrm{i}\sin\vartheta_{k+n} = \cos\vartheta_k + \mathrm{i}\sin\vartheta_k$. Για $k = 0, 1, \ldots, n-1$, έχουμε τις τιμές

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_1 = \frac{2\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \vartheta_k = \frac{2k\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \vartheta_{n-1} = \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

οι οποίες δίδουν όλες διαφορετικούς μιγαδικούς αριθμούς.

Συμπεραίνουμε οτι υπάρχουν ακριβώς n n-οστες ρίζες της μονάδας στο μιγαδικό επίπεδο, οι αριθμοί

$$\cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

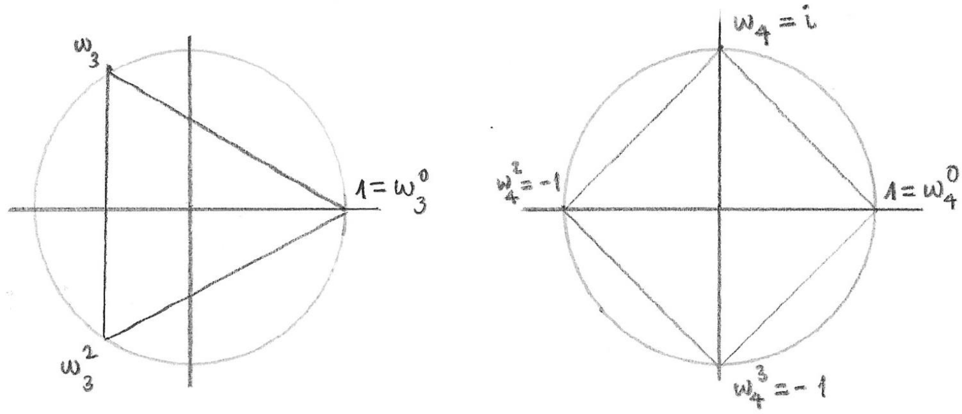
για $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Εάν τώρα ορίσουμε $\omega_n = \cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{n}$, οι δυνάμεις ω_n^k, για $k = 0, \ldots, n-1$, δίδουν όλες τις n διαφορετικές n-οστές ρίζες της μονάδας

$$\omega_n^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n}\,.$$

Η n-οστή ρίζα ω_n, η οποία έχει το μικρότερο θετικό όρισμα, ονομάζεται **πρωταρχική** n-οστή ρίζα της μονάδας.

Πού βρίσκονται αυτοί οι αριθμοί στο μιγαδικό επίπεδο; Για $k = 0$ έχουμε το 1. Όλες οι n-οστές ρίζες της μονάδας βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο, $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, και η γωνία που σχηματίζεται από το 0 μεταξύ διαφορετικών ριζών είναι πολλαπλάσιο του $\frac{2\pi}{n}$. Συμπεραίνουμε οτι οι n-οστές ρίζες βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου, με n κορυφές, μία εκ των οποίων βρίσκεται στο 1. Στο Σχήμα 3.6 βλέπουμε τις τρίτες ρίζες της μονάδας, που βρίσκονται στις κορυφές ενός ισοπλεύρου τριγώνου, και τις τέταρτες ρίζες, στις κορυφές ενός τετραγώνου.



Σχήμα 3.6: Τρίτες και τέταρτες ρίζες της μονάδας

Παράδειγμα 3.9 Θα υπολογίσουμε τις πέμπτες ρίζες της μονάδας. Εάν

$z = \cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta$ είναι μία πέμπτη ρίζα της μονάδας, τότε $z^5 = \cos(5\vartheta) + \mathrm{i}\sin(5\vartheta) = 1$, άρα $5\vartheta = 2k\pi$, για κάποιο ακέραιο k.

Ορίζουμε $\omega_5 = \cos(2\pi/5) + \mathrm{i}\sin(2\pi/5)$. Τότε οι διαφορετικές πέμπτες ρίζες της μονάδας είναι οι μιγαδικοί αριθμοί

$$\begin{aligned}
\omega_5^0 &= 1\,, \\
\omega_5 &= \cos(2\pi/5) + \mathrm{i}\sin(2\pi/5)\,, \\
\omega_5^2 &= \cos(4\pi/5) + \mathrm{i}\sin(4\pi/5)\,, \\
\omega_5^3 &= \cos(6\pi/5) + \mathrm{i}\sin(6\pi/5)\,, \\
\omega_5^4 &= \cos(8\pi/5) + \mathrm{i}\sin(8\pi/5)\,.
\end{aligned}$$

Δραστηριότητα 3.13 Στο μιγαδικό επίπεδο σχεδιάστε το κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο στον μοναδιαίο κύκλο S^1, έτσι ώστε να έχει μία κορυφή στο 1, και σημειώστε τις έκτες ρίζες της μονάδας.

Δραστηριότητα 3.14 Εάν ω_8 είναι η πρωταρχική όγδοη ρίζα της μονάδας, σημειώστε στο μιγαδικό επίπεδο και γράψτε στη μορφή $a + b\mathrm{i}$ τον μιγαδικό αριθμό ω_8^5.

Παράδειγμα 3.10 Εξετάζουμε το άθροισμα των $n-$οστών ριζών της μονάδας,

$$Q = 1 + w_n + w_n^2 + \ldots + w_n^{n-1}.$$

Παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned}
w_n Q &= w_n(1 + w_n + \ldots + w_n^{n-1}) \\
&= w_n + w_n^2 + \ldots + w_n^{n-1} + w_n^n \\
&= Q
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε οτι $(w_n - 1)Q = 0$, και εφ' όσον $w_n \neq 1$, έχουμε

$$1 + w_n + w_n^2 + \ldots + w_n^{n-1} = 0.$$

3.10 Ρίζες του $a \in \mathbb{C}$

Εάν $a = 0$, τότε για κάθε n, η μοναδική n-οστή ρίζα του a είναι 0:

$$z^n = 0 \Rightarrow z = 0\,.$$

Εάν $a \neq 0$, υποθέτουμε οτι a γράφεται σε τριγωνομετρική μορφή ως $a = s(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$. Ο πραγματικός αριθμός s είναι θετικός, και συμβολίζουμε $s^{1/n}$ τη θετική πραγματική n-οστή ρίζα του s. Θέτουμε $z_0 = s^{1/n}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{n}\right)$, και παρατηρούμε οτι $z_0^n = a$, δηλαδή z_0 είναι μία από τις n-οστές ρίζες του a.

Εάν z_k είναι μια άλλη n-οστή ρίζα του a, έχουμε $\left(\frac{z_k}{z_0}\right)^n = 1$, και συνεπώς $\frac{z_k}{z_0}$ είναι μία n-οστή ρίζα της μονάδας. Καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.4 *Κάθε μιγαδικός αριθμός $a \neq 0$, έχει n διαφορετικές μιγαδικές n-οστές ρίζες, και εάν $a = s(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ είναι μία τριγωνομετρική μορφή του a, οι n-οστές ρίζες είναι*

$$z_k = s^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$

για $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Παρατηρούμε οτι εάν ω_n είναι η πρωταρχική n-οστή ρίζα της μονάδας, τότε οι n-οστές ρίζες του a είναι

$$z_k = |a|^{1/n}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} a}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\operatorname{Arg} a}{n}\right)\omega_n^k\,,$$

για $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Στο μιγαδικό επίπεδο όλες οι n-οστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $a \neq 0$ βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο 0 και ακτίνα $|a|^{1/n}$ και σχηματίζουν κανονικό n-γωνο, μία κορυφή του οποίου είναι ο μιγαδικός αριθμός $|a|^{1/n}\left(\cos\frac{\operatorname{Arg} a}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\operatorname{Arg} a}{n}\right)$.

Δραστηριότητα 3.15 Στο μιγαδικό επίπεδο, σχεδιάστε έναν κύκλο ακτίνας 2, και σημειώστε τις τρίτες ρίζες του μιγαδικού αριθμού $8\left(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.
Σημειώστε επίσης τις τέταρτες ρίζες του μιγαδικού αριθμού -16. (Προσέξτε οτι μία τριγωνομετρική μορφή του -16 είναι $16(\cos\pi + \mathrm{i}\sin\pi)$.)

Παράδειγμα 3.11 Θα υπολογίσουμε τις τρίτες ρίζες του μιγαδικού αριθμού $-4(\sqrt{3} - \mathrm{i})$.

Πρώτα γράφουμε τον αριθμό στη μορφή $-4(\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 8(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2})$, ώστε ο αριθμός στην παρένθεση να έχει μέτρο 1 και ο συντελεστής του να είναι θετικός. Κατόπιν βρίσκουμε ϑ ώστε $\cos\vartheta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\sin\vartheta = \frac{1}{2}$, δηλαδή $\vartheta = \frac{5\pi}{6}$ και

$$-4(\sqrt{3} - \mathrm{i}) = 8\left(\cos\frac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{6}\right) .$$

Τότε μία τρίτη ρίζα είναι

$$(-4(\sqrt{3} - \mathrm{i}))^{\frac{1}{3}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{18} + \mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{18}\right) ,$$

ενώ οι άλλες δύο είναι, για γωνίες $\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{3}$ και $\frac{5\pi}{18} + \frac{4\pi}{3}$,

$$2\left(\cos\frac{17\pi}{18} + \mathrm{i}\sin\frac{17\pi}{18}\right) , \qquad \text{και} \qquad 2\left(\cos\frac{29\pi}{18} + \mathrm{i}\sin\frac{29\pi}{18}\right) .$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις του μισού της γωνίας, για να υπολογίσουμε τις τετραγωνικές ρίζες μιγαδικού αριθμού συναρτήσει του πραγματικού και του φανταστικού του μέρους. Από τις ταυτότητες 3.2 και 3.3, έχουμε για το διπλάσιο της γωνίας

$$\cos 2\vartheta = \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta , \tag{3.9}$$

$$\sin 2\vartheta = 2\sin\vartheta\cos\vartheta . \tag{3.10}$$

Από την 3.9 και την $\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$ έχουμε

$$\cos 2\vartheta = 2\cos^2\vartheta - 1 = 1 - 2\sin^2\vartheta\,.$$

Εκφράζουμε τις τελευταίες σχέσεις ως προς $\vartheta/2$ και έχουμε

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}\,, \tag{3.11}$$

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}}\,. \tag{3.12}$$

Παρατηρήστε οτι $\cos\frac{\vartheta}{2} \geq 0$ όταν $0 \leq \vartheta \leq \pi$, ενώ $\cos\frac{\vartheta}{2} < 0$ όταν $\pi < \vartheta < 2\pi$.

Παράδειγμα 3.12 Θα υπολογίσουμε τις τετραγωνικές ρίζες του $z = u + v\mathrm{i}$ συναρτήσει των u και v. Για $0 \leq \vartheta < 2\pi$ τέτοιο ώστε $\cos\vartheta = \frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}$ και $\sin\vartheta = \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}$, μία τετραγωνική ρίζα του z είναι

$$\begin{aligned}
(u+v\mathrm{i})^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{\sqrt{u^2+v^2}}\left(\cos\frac{\vartheta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\vartheta}{2}\right)\\
&= \left|(u^2+v^2)^{\frac{1}{4}}\right|\left(\pm\sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}}\right)\\
&= \left|(u^2+v^2)^{\frac{1}{4}}\right|\left(\pm\sqrt{\frac{1+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}}{2}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1-\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}}{2}}\right)\\
&= \left|(u^2+v^2)^{\frac{1}{4}}\right|\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2\sqrt{u^2+v^2}}} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2\sqrt{u^2+v^2}}}\right).
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε στην έκφραση

$$(u+v\mathrm{i})^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\pm\sqrt{\sqrt{u^2+v^2}+u} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{u^2+v^2}-u}\right). \tag{3.13}$$

3.11 Οι λύσεις της εξίσωσης $az^2 + bz + c = 0$ με μιγαδικούς συντελεστές

Οι λύσεις της εξίσωσης δευτέρου βαθμού με συντελεστές στο $\mathbb{C}$ υπολογίζονται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που υπολογίζονται οι λύσεις της εξίσωσης με πραγματικούς συντελεστές. Για να λύσουμε την εξίσωση $az^2 + bz + c = 0$ συμπληρώνουμε το τετράγωνο,

$$a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = 0\,,$$

και έχουμε

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,,$$

συνεπώς

$$z = \frac{-b + (b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}}}{2a}\,.$$

Εάν $b^2 - 4ac = 0$, η εξίσωση έχει μοναδική λύση $z = \frac{-b}{2a}$, η οποία είναι εν γένει μιγαδικός αριθμός. Πραγματικός αριθμός είναι μόνον όταν $\operatorname{Arg} a = \operatorname{Arg} b$ ή $|\operatorname{Arg} a - \operatorname{Arg} b| = \pi$.

Εάν $b^2 - 4ac = u + \mathrm{i}v \neq 0$, για u, $v \in \mathbb{R}$, από την 3.13,

$$(b^2 - 4ac)^{\frac{1}{2}} = (u + \mathrm{i}v)^{\frac{1}{2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{u^2+v^2}+u} + \mathrm{i}\sqrt{\sqrt{u^2+v^2}-u}\right)\,,$$

και η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μιγαδικές λύσεις.

3.12 Ρίζες πολυωνύμου βαθμού n. Το Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας

Θεώρημα 3.5 *Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού n,*

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0\,, \qquad a_n \neq 0,\ a_0,\ \ldots,\ a_n \in \mathbb{C}\,.$$

Τότε υπάρχουν n μιγαδικοί αριθμοί $w_1, \ldots, w_n$, όχι υποχρεωτικά διαφορετικοί, τέτοιοι ώστε

$$p(z) = a_n(z - w_1)(z - w_2)\cdots(z - w_n)\,.$$

Οι αριθμοί $w_1, \ldots, w_n$ ονομάζονται **ρίζες** του πολυωνύμου $p(z)$. Εάν ακριβως k από τους μιγαδικούς αριθμούς $w_1, \ldots, w_n$ είναι ίσοι με w, λέμε οτι w είναι ρίζα του $p(z)$ με **πολλαπλότητα** k. Τότε $(z-w)^k$ διαιρεί το πολυώνυμο $p(z)$, αλλά $(z-w)^{k+1}$ δεν το διαιρεί.

Είναι προφανές οτι οι ρίζες $w_1, \ldots, w_n$ του πολυωνύμου $p(z)$ αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $p(z) = 0$, αφού

$$p(w_i) = a_n(w_i - w_1)\cdots(w_i - w_i)\cdots(w_i - w_n) = 0\,.$$

Θα δούμε οτι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή οτι οι μόνες λύσεις της εξίσωσης $p(z) = 0$ είναι οι ρίζες $w_1, \ldots, w_n$.

Πρόταση 3.6 *Θεωρούμε ένα πολυώνυμο με μιγαδικούς συντελεστές, βαθμού n,*

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0\,, \qquad a_n \neq 0,\ a_0,\ \ldots,\ a_n \in \mathbb{C}\,.$$

Τότε $p(a) = 0$ εάν και μόνον εάν $z - a$ διαιρεί το πολυώνυμο $p(z)$.

Απόδειξη. Εάν $z-a$ διαιρεί το πολυώνυμο $p(z)$, τότε υπάρχει πολυώνυμο $q(z)$ τέτοιο ώστε $p(z) = q(z)(z-a)$. Αλλά τότε $p(a) = q(a)(a-a) = 0$.

Για να δείξουμε το αντίστροφο, χρησιμοποιούμε τον ευκλείδειο αλγόριθμο της διαίρεσης για πολυώνυμα: Για κάθε πολυώνυμο $p(z)$ και κάθε a

υπάρχουν πολυώνυμα $q(z)$ και $r(z)$ τέτοια ώστε $p(z) = q(z)(z-a)+r(z)$, με το βαθμό του $r(z)$ μικρότερο από το βαθμό του $(z - a)$. Αλλά αφού $z - a$ είναι πρώτου βαθμού, $r(z)$ είναι σταθερό ή μηδενικό πολυώνυμο, $r(z) = c \in \mathbb{C}$. Εάν τώρα a είναι λύση της εξίσωσης $p(z) = 0$, έχουμε

$$0 = p(a) = q(a)(a - a) + c\,,$$

συνεπώς $c = 0$, και $p(z) = q(z)(z - a)$, δηλαδή a είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(z)$.

□

3.13 Ρίζες πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές

Θεωρούμε ένα πολυώνυμο βαθμού n,

$$p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0\,, \qquad a_n \neq 0\,,$$

με πραγματικούς συντελεστές, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Εάν w είναι μία ρίζα του πολυωνύμου, ισχύει $a_n w^n + \cdots + a_1 w + a_0$. Αλλά τότε

$$0 = \overline{a_n w^n + \cdots + a_1 w + a_0} = a_n \bar{w}^n + \cdots + a_1 \bar{w} + a_0\,,$$

αφού $\bar{a}_n = a_n, \ldots, \bar{a}_1 = a_1$, $\bar{a}_0 = a_0$. Συνεπώς, εάν w είναι μία ρίζα του πολυωνύμου, $\bar{w}$ είναι επίσης ρίζα του πολυωνύμου. Δηλαδή οι ρίζες ενός πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές έρχονται σε ζευγάρια συζυγών μιγαδικών αριθμών. Εάν n είναι περιττός, $n = 2k + 1$, τότε μπορούν να υπάρχουν το πολύ k ζευγάρια μη πραγματικών συζυγών ριζών. Αυτό συνεπάγεται οτι τουλάχιστον μία ρίζα είναι πραγματική, αφού θα πρέπει να είναι ίση με το συζυγή της.

3.14 Ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο

Θεωρούμε ευθεία δ στο μιγαδικό επίπεδο. Με μία περιστροφή μπορούμε να φέρουμε τη δ να είναι παράλληλη με το φανταστικό άξονα. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε οτι η περιστροφή γύρω από το 0 κατά γωνία $-\vartheta$, για $0 \leq \vartheta < 2\pi$, απεικονίζει τη δ στην ευθεία η, που είναι παράλληλη με το φανταστικό άξονα και τέμνει τον πραγματικό άξονα στο σημείο $-\frac{c}{2}$, για $c \geq 0$. Τότε τα σημεία της ευθείας η αντιστοιχούν στους μιγαδικούς αριθμούς z με $\mathrm{Re}\, z = -\frac{c}{2}$. Αφού $z + \bar{z} = 2\mathrm{Re}\, z$, μία εξίσωση της ευθείας η είναι η

$$z + \bar{z} + c = 0\,.$$

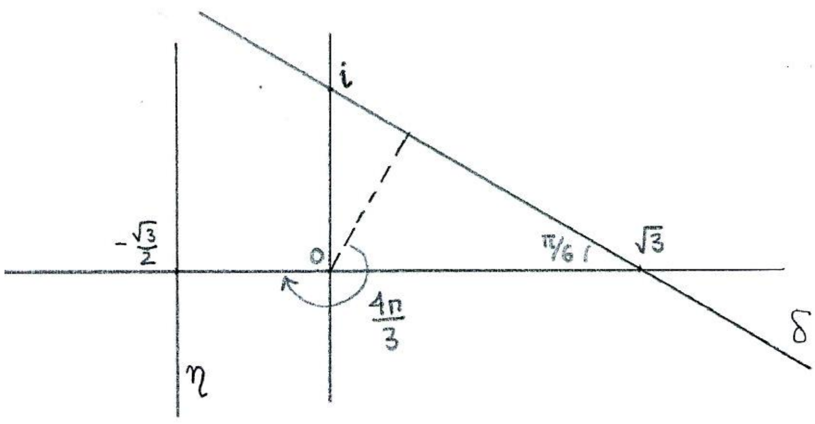
Αντίστροφα, η ευθεία δ είναι η εικόνα της η από την περιστροφή γύρω από το 0 κατά γωνία ϑ, δηλαδή ένα σημείο z ανήκει στην ευθεία δ εάν και μόνο εάν το $(\cos(-\vartheta) + \mathrm{i}\sin(-\vartheta))z$ ανήκει στην η. Συνεπώς μία εξίσωση της δ είναι η

$$(\cos(-\vartheta) + \mathrm{i}\sin(-\vartheta))z + \overline{(\cos(-\vartheta) + \mathrm{i}\sin(-\vartheta))z} + c = 0\,.$$

Θέτουμε $u = \cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta$ και έχουμε την εξίσωση της δ στη μορφή

$$\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0\,,$$

όπου $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$ και $c \geq 0$.



Σχήμα 3.7: Εξίσωση ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο.

Παράδειγμα 3.13 Θεωρούμε την ευθεία δ στο μιγαδικό επίπεδο που περνάει από τα σημεία i και $\sqrt{3}$, Σχήμα 3.7. Παρατηρούμε οτι τα σημεία 0, i, $\sqrt{3}$ σχηματίζουν ένα ορθογώνιο τρίγωνο με γωνίες $\pi/3$ και $\pi/6$ και ύψος $\sqrt{3}/2$. Περιστρέφουμε γύρω από το 0 κατά γωνία $-4\pi/3$, δηλαδή πολλαπλασιάζουμε με $\cos(-\frac{4\pi}{3}) + \mathrm{i}\sin(-\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. Αυτή η περιστροφή απεικονίζει το σημείο i στο $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mathrm{i}}{2}$, και το σημείο $\sqrt{3}$ στο $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}$. Η ευθεία δ απεικονίζεται στην ευθεία η με εξίσωση $2\mathrm{Re}\, z = \sqrt{3}$. Θέτουμε $u = \cos\frac{4\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Το σημείο z βρίσκεται στη δ εάν $\bar{u}z$ βρίσκεται στην η. Άρα η εξίσωση της δ είναι $\bar{u}z + u\bar{z} + \sqrt{3} = 0$.

Πρόταση 3.7 *Για κάθε ευθεία δ στο μιγαδικό επίπεδο υπάρχουν $u \in \mathbb{C}$, $|u| = 1$ και $c \in \mathbb{R}$, $c \geq 0$, τέτοια ώστε η δ έχει εξίσωση της μορφής*

$$\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0\,. \tag{3.14}$$

Σε αυτή τη μορφή, $\frac{c}{2}$ είναι η απόσταση της ευθείας δ από το $0 \in \mathbb{C}$, και ο μιγαδικός αριθμός u αντιστοιχεί σε μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην ευθεία δ, ενώ ο $\mathrm{i}u$ αντιστοιχεί σε μοναδιαίο διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας δ.

Δραστηριότητα 3.16 Σχεδιάστε στο μιγαδικό επίπεδο την ευθεία δ που περνάει από τα σημεία 2i και 2. Βρείτε τις εικόνες των σημείων 2i και 2 από την περιστροφή f κατά γωνία $-5\pi/4$. Σχεδιάστε την ευθεία η που περνάει από αυτά τα σημεία. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας η στη μορφή $z + \bar{z} + c = 0$. Βρείτε την εξίσωση της ευθείας δ στη μορφή 3.14.

Για να βρούμε τα σημεία στα οποία η ευθεία δ τέμνει τους άξονες, θέτουμε $z = \bar{z}$ (ο πραγματικός άξονας) ή $z = -\bar{z}$ (ο φανταστικός άξονας). Έτσι βρίσκουμε οτι εάν $\mathrm{Re}\, u \neq 0$, η ευθεία με εξίσωση $\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0$ τέμνει τον πραγματικό άξονα στο σημείο που δίδεται από την εξίσωση $\bar{u}z + uz + c = 0$, δηλαδή το σημείο $z = \frac{-c}{\bar{u}+u}$. Παρόμοια βρίσκουμε οτι εάν $\mathrm{Im}\, u \neq 0$, η ευθεία με εξίσωση $\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0$ τέμνει τον φανταστικό άξονα στο σημείο $z = \frac{-c}{\bar{u}-u}$.

Δραστηριότητα 3.17 Βρείτε τα σημεία τομής με τον πραγματικό και τον φανταστικό άξονα της ευθείας με εξίσωση $(\cos\frac{-7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{-7\pi}{6})z + (\cos\frac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{7\pi}{6})\bar{z} + 3 = 0$.

Εάν πολλαπλασιάσουμε την 3.14 με οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό $t \neq 0$, έχουμε μία άλλη εξίσωση της ίδιας ευθείας:

$$t\bar{u}z + tu\bar{z} + tc = 0\,.$$

Θέτουμε $\alpha = \bar{t}u$, $\beta = tu$ και $\gamma = tc$. Αφού c είναι πραγματικός αριθμός, $\bar{c} = c$ και $\frac{\bar{\gamma}}{\gamma} = \frac{\bar{t}}{t} = \frac{\alpha}{\beta}$. Συνεπώς οι μιγαδικοί αριθμοί α, β και γ ικανοποιούν τη σχέση $\alpha\gamma = \beta\bar{\gamma}$.

Πρόταση 3.8 *Θεωρούμε εξίσωση της μορφής*

$$\bar{\alpha}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0\,, \tag{3.15}$$

με α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$, $\alpha\beta \neq 0$.
Εάν $\gamma \neq 0$, *η 3.15 παριστάνει ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο εάν και μόνον εάν* $\alpha\gamma = \beta\bar{\gamma}$.
Εάν $\gamma = 0$, *η 3.15 παριστάνει ευθεία στο μιγαδικό επίπεδο εάν και μόνον εάν* $|\alpha| = |\beta|$.

Η απόδειξη της Πρότασης 3.8 δίδεται στο τέλος του Κεφαλαίου.

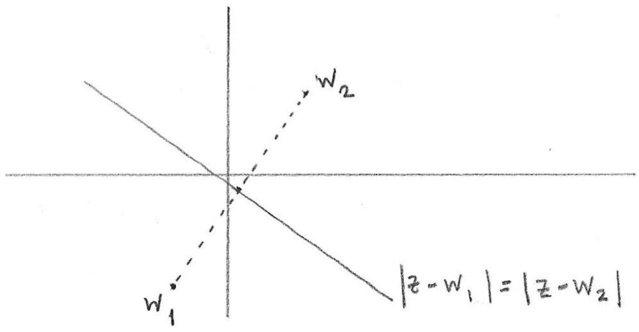
Στο Ευκλείδειο επίπεδο E^2 με ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς, θεωρούμε την ευθεία δ με εξίσωση $ax + by + c = 0$. Γνωρίζουμε οτι (a, b) είναι ένα διάνυσμα κάθετο στην ευθεία δ, ενώ $(-b, a)$ είναι ένα διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας δ. Για να εκφράσουμε την εξίσωση της ευθείας δ στο μιγαδικό επίπεδο αντικαθιστούμε $2x = 2\mathrm{Re}\,z = z + \bar{z}$ και $2y = 2\mathrm{Im}\,z = -\mathrm{i}(z - \bar{z})$, και έχουμε $a(z + \bar{z}) - b\mathrm{i}(z - \bar{z}) + 2c = 0$, ή

$$(a - b\mathrm{i})z + (a + b\mathrm{i})\bar{z} + 2c = 0\,.$$

Δραστηριότητα 3.18 Γράψτε σε μιγαδική μορφή την εξίσωση της ευθείας $3x + 5y = 1$.

Ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε μία ευθεία στο επίπεδο είναι ως τη μεσοκάθετο δύο σημείων. Εάν w_1 και w_2 είναι δύο σημεία του μιγαδικού επιπέδου, η μεσοκάθετος των δύο σημείων αποτελείται από τα σημεία z που ικανοποιούν την εξίσωση $|z-w_1| = |z-w_2|$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε $(z-w_1)(\bar{z}-\bar{w}_1) = (z-w_2)(\bar{z}-\bar{w}_2)$, που απλοποιείται σε $w_1\bar{w}_1 - \bar{w}_1 z - w_1\bar{z} = w_2\bar{w}_2 - \bar{w}_2 z - w_2\bar{z}$. Καταλήγουμε στην εξίσωση της μεσοκαθέτου των σημείων w_1 και w_2 του μιγαδικού επιπέδου, Σχήμα 3.8,

$$(\bar{w}_2 - \bar{w}_1)z + (w_2 - w_1)\bar{z} - (w_2\bar{w}_2 - w_1\bar{w}_1) = 0\,. \tag{3.16}$$



Σχήμα 3.8: Εξίσωση μεσοκαθέτου στο μιγαδικό επίπεδο.

Δραστηριότητα 3.19 Η μεσοκάθετος των σημείων w_1 και w_2 περνάει από το σημείο $\frac{1}{2}(w_1+w_2)$ και είναι κάθετος στη διεύθυνση $w_2 - w_1$. Ελέγξτε οτι εάν αντικαταστήσετε $w = \frac{1}{2}(w_1+w_2)$ και $q = w_2 - w_1$ στην 3.17 παίρνετε την 3.16.

Εάν η ευθεία δ περνάει από το σημείο $w \in \mathbb{C}$ και έχει διάνυσμα διεύθυνσης που αντιστοιχεί στο μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό q, τότε κάθε σημείο z της ευθείας γράφεται στη μορφή

$$z = w + tq\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Αυτή είναι η παραμετρική περιγραφή της ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο. Για να βρούμε την εξίσωση της ευθείας απαλείφουμε το t από τη σχέση $z = w + tq$ και τη συζυγή της $\bar{z} = \bar{w} + t\bar{q}$: πολλαπλασιάζουμε με $\bar{q}$ και q αντίστοιχα, και έχουμε $\bar{q}z - \bar{q}w = t\bar{q}q = q\bar{z} - q\bar{w}$. Καταλήγουμε στην εξίσωση

$$\bar{q}(z-w) - q(\bar{z}-\bar{w}) = 0\,.$$

Για να τη φέρουμε στη μορφή 3.14 πολλαπλασιάζουμε με $-\mathrm{i}$,

$$-\mathrm{i}\bar{q}(z-w) + \mathrm{i}q(\bar{z}-\bar{w}) = 0$$

και θέτουμε $u = \mathrm{i}q$. Καταλήγουμε στην εξίσωση της ευθείας στο μιγαδικό επίπεδο που περνάει από το σημείο w και είναι κάθετη στη διεύθυνση του μιγαδικού αριθμού u,

$$\bar{u}z + u\bar{z} - (\bar{u}w + u\bar{w}) = 0\,. \tag{3.17}$$

Δραστηριότητα 3.20 Βρείτε σε μιγαδική μορφή την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $-2-\mathrm{i}$ του μιγαδικού επιπέδου και είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση του $3+\mathrm{i}$.

3.15 Κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο

Ο κύκλος με κέντρο το σημείο με συντεταγμένες $(u,\, v)$ και ακτίνα $r > 0$ αποτελείται από όλα τα σημεία με συντεταγμένες $(x,\, y)$ που απέχουν r από το σημείο $(u,\, v)$, δηλαδή που ικανοποιούν την εξίσωση

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2\,. \tag{3.18}$$

Στο μιγαδικό επίπεδο ο κύκλος με κέντρο $w = u + v\mathrm{i}$ και ακτίνα $r > 0$ αποτελείται από τα σημεία z που ικανοποιούν την εξίσωση $|z-w| = r$, δηλαδή

$$(z-w)(\bar{z}-\bar{w}) = r^2\,. \tag{3.19}$$

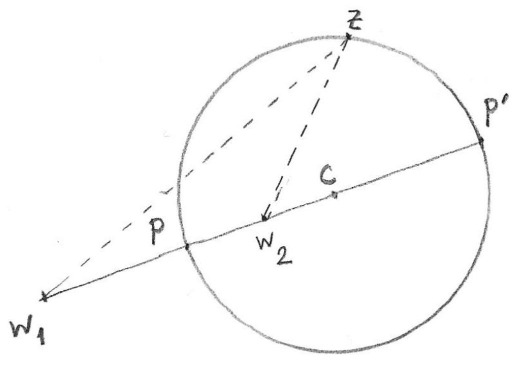
Δραστηριότητα 3.21 Δείξτε οτι εάν αντικαταστήσετε $z = x + y\mathrm{i}$ και $w = u + v\mathrm{i}$ στην 3.19 παίρνετε την 3.18.

Θα δούμε μία άλλη περιγραφή του κύκλου στο μιγαδικό επίπεδο. Θεωρούμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων z των οποίων οι αποστάσεις από δύο σημεία w_1 και w_2 έχουν σταθερό λόγο λ. Εάν $\lambda = 1$ έχουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων που ισαπέχουν από τα δύο σημεία, δηλαδή τη μεσοκάθετο των σημείων w_1 και w_2. Θα εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν $\lambda \neq 1$.

Θεωρούμε δύο σταθερά σημεία w_1 και w_2 του μιγαδικού επιπέδου και εξετάζουμε το γεωμετρικό τόπο των σημείων z του μιγαδικού επιπέδου, τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση

$$|z - w_1| = \lambda |z - w_2|, \quad \lambda > 0,\, \lambda \neq 1\,. \tag{3.20}$$

Εξετάζουμε πρώτα τα σημεία z τα οποία ικανοποιούν την εξίσωση και βρίσκονται πάνω στην ευθεία η οποία συνδέει τα $w_1\, w_2$. Υπάρχουν δύο τέτοια σημεία, ένα σημείο p που διαιρεί (εσωτερικά) το διάστημα $w_1\, w_2$ σε απλό λόγο λ, και ένα δεύτερο p' που διαιρεί (εξωτερικά) το διάστημα $w_1\, w_2$ σε απλό λόγο $-\lambda$.



Σχήμα 3.9: Ο γεωμετρικός τόπος της εξίσωσης $|z - w_1| = 2|z - w_2|$.

Με το συμβολισμό του απλού λόγου, Κεφάλαιο 1, σελ. 21,

$$(w_1,\, w_2,\, p) = \frac{p - w_1}{w_2 - p}\,,$$

και έχουμε

$$\frac{p - w_1}{w_2 - p} = \lambda = -\frac{p' - w_1}{w_2 - p'}\,.$$

Λύνοντας ως προς p και p',

$$p = \frac{w_1 + \lambda w_2}{1+\lambda}, \qquad p' = \frac{w_1 - \lambda w_2}{1-\lambda}.$$

Παρατηρούμε οτι εάν ένα σημείο z ικανοποιεί τη σχέση $|z - w_1| = \lambda|z - w_2|$, τότε το συμμετρικό του z ως προς την ευθεία που διέρχεται από τα w_1, w_2 επίσης ικανοποιεί τη σχέση. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί να εξετάσουμε την υπόθεση οτι το σύνολο των σημείων που ικανοποιούν την εξίσωση 3.20 βρίσκεται σε έναν κύκλο, με διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία p και p'. Εάν αληθεύει αυτό, το κέντρο του κύκλου θα είναι το μέσο του διαστήματος από το p στο p',

$$\begin{aligned} c &= \frac{p+p'}{2} \\ &= \frac{(w_1 + \lambda w_2)(1-\lambda) + (w_1 - \lambda w_2)(1+\lambda)}{2(1-\lambda^2)} \\ &= \frac{w_1 - \lambda^2 w_2}{1-\lambda^2}, \end{aligned} \tag{3.21}$$

και η ακτίνα του θα είναι

$$\begin{aligned} r &= \frac{|p-p'|}{2} \\ &= \frac{|(w_1 - \lambda w_2)(1-\lambda) - (w_1 - \lambda w_2)(1+\lambda)|}{2|1-\lambda^2|} \\ &= \frac{|\lambda|\,|w_1 - w_2|}{|1-\lambda^2|}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο c και ακτίνα r είναι

$$(z-c)(\bar{z}-\bar{c}) = r^2$$

και αντικαθιστώντας από τις 3.21, 3.22, έχουμε

$$\big(z(1-\lambda^2) - w_1 + \lambda^2 w_2\big)\left(\bar{z}(1-\lambda^2) - \bar{w}_1 + \lambda^2 \bar{w}_2\right) = \lambda^2(w_1 - w_2)(\bar{w}_1 - \bar{w}_2)$$

η οποία απλοποιείται στη μορφή

$$z\bar{z} - z\bar{w}_1 - \bar{z}w_1 + w_1\bar{w}_1 = \lambda^2(z\bar{z} - z\bar{w}_2 - \bar{z}w_2 + w_2\bar{w}_2)$$

δηλαδή

$$|z - w_1|^2 = \lambda^2 |z - w_2|^2 .$$

Συμπεραίνουμε οτι το σύνολο των σημείων των οποίων οι αποστάσεις από δοθέντα σημεία έχουν σταθερό λόγο $\lambda \neq 1$ είναι ένας κύκλος.

Δραστηριότητα 3.22 Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα των κύκλων με εξίσωση $|z + 1| = \lambda|z - 1|$, για $\lambda = 2$ και για $\lambda = \frac{1}{2}$.

Η οικογένεια των κύκλων με εξισώσεις $|z - w_1| = \lambda|z - w_2|$, για $\lambda > 0$, ονομάζεται οικογένεια Απολλωνίων κύκλων. Παρατηρήστε οτι περιλαμβάνει και μία ευθεία, τη μεσοκάθετο των w_1 και w_2, για $\lambda = 1$. Στην επόμενη παράγραφο θα συναντήσουμε ξανά αυτήν τη συγγένεια μεταξύ κύκλων και ευθειών στο μιγαδικό επίπεδο.

3.16 Ασκήσεις

Άσκηση 3.16 Υπολογίστε την τετραγωνική ρίζα $x + y\mathrm{i}$ του μιγαδικού αριθμού $u + v\mathrm{i}$ λύνοντας το σύστημα εξισώσεων $x^2 - y^2 = u$, $2xy = v$ και συγκρίνατε με το Παράδειγμα 3.12.

Άσκηση 3.17 Υπολογίστε και σημειώστε σε ένα σχέδιο στο μιγαδικό επίπεδο τις τρίτες ρίζες του αριθμού $-4(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2})$.

Άσκηση 3.18 Υπολογίστε και σημειώστε σε ένα σχέδιο στο μιγαδικό επίπεδο τις πέμπτες ρίζες του αριθμού -32.

Άσκηση 3.19 Δείξτε οτι οι δυνάμεις οποιασδήποτε πέμπτης ρίζας της μονάδας διαφορετικής από το 1, παράγουν και τις 5 πέμπτες ρίζες. Δείξτε οτι αυτό δεν ισχύει για τις 6 έκτες ρίζες: βρείτε δύο έκτες ρίζες της μονάδας τέτοιες ώστε καμία δύναμη της μίας να μην είναι ίση με την άλλη.

Άσκηση 3.20 Εάν ο αριθμός $2 + \mathrm{i}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $3z^3 - 10z^2 + 7z + 10$, να βρείτε τις άλλες ρίζες του πολυωνύμου.

Άσκηση 3.21 Βρείτε το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις $\mathrm{i}z - \mathrm{i}\bar{z} = 1$ και $(3 + \mathrm{i})z + (3 - \mathrm{i})\bar{z} = 2$.

Άσκηση 3.22 Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στον κύκλο $|z - 2 + \mathrm{i}| = \sqrt{5}$ στο σημείο $-2\mathrm{i}$.

Άσκηση 3.23 Δείξτε οτι τα σημεία $z \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την εξίσωση $|\frac{1}{\bar{z}} - 2| = 1$ βρίσκονται σε έναν κύκλο.

Άσκηση 3.24 Δείξτε οτι τα σημεία $z \in \mathbb{C}$ που ικανοποιούν την εξίσωση $|\frac{1}{\bar{z}} - 2| = 2$ βρίσκονται σε μία ευθεία.

Άσκηση 3.25 Βρείτε στη μορφή $\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0$ την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $w_1 = 3 - \mathrm{i}$ και $w_2 = -1 + \mathrm{i}$.

Άσκηση 3.26 Βρείτε στη μορφή $\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0$ την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $-2 - \mathrm{i}$ και είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $(1 - 2\mathrm{i})z + (1 + 2\mathrm{i})\bar{z} + 3 = 0$.

Άσκηση 3.27 Βρείτε το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις $\mathrm{i}z - \mathrm{i}\bar{z} = 1$ και $(3 + \mathrm{i})z + (3 - \mathrm{i})\bar{z} = 2$.

Άσκηση 3.28 Βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται στον κύκλο $|z - 2 + \mathrm{i}| = \sqrt{5}$ στο σημείο $-2\mathrm{i}$.
Υπόδειξη: Ο κύκλος με κέντρο c και ακτίνα r εφάπτεται στην ευθεία ε στο σημείο w όταν ευθεία ε είναι κάθετη στην ακτίνα στο w.

Άσκηση 3.29 Βρείτε την ακτίνα του κύκλου με κέντρο $c \in \mathbb{C}$, όταν ο κύκλος εφάπτεται στον πραγματικο άξονα.

Άσκηση 3.30 Δίδονται σημεία $w_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ και $w_2 = 5 - 2\mathrm{i}$. Βρείτε τις τιμές λ για τις οποίες ο κύκλος K_λ της οικογένειας Απολλωνίων κύκλων με εξίσωση $|z - w_1| = \lambda|z - w_2|$ εφάπτεται στον πραγματικό άξονα.

Άσκηση 3.31 Δίδονται οι οικογένειες Απολλωνίων κύκλων K_λ : $|z-1-2\mathrm{i}| = \lambda|z-5+2\mathrm{i}|$ και $C_\mu : |z+1-4\mathrm{i}| = \mu|z-5+2\mathrm{i}|$. Βρείτε τη σχέση μεταξύ των λ και μ όταν οι κύκλοι K_λ και C_μ εφάπτονται. Υπόδειξη: Όταν δύο κύκλοι εφάπτονται, το σημείο επαφής βρίσκεται πάνω στην ευθεία που συνδέει τα κέντρα τους.

Άσκηση 3.32 Δείξτε οτι η απόσταση του σημείου w από την ευθεία με εξίσωση $\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0$, $u \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$, είναι

$$d = \frac{|\bar{u}w + u\bar{w} + c|}{2|u|}\,.$$

Εβδομάδα 7

3.17 Οι απεικονίσεις αντιστροφής στο μιγαδικό επίπεδο

Στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ η απεικόνιση αντιστροφής $t \mapsto 1/t$ διατηρεί σταθερά τα σημεία 1 και -1 και απεικονίζει τα σημεία του διαστήματος $(0, 1)$ στο διάστημα $(1, \infty)$ και τα σημεία του διαστήματος $(-1, 0)$ στο διάστημα $(-\infty, -1)$, και αντίστροφα τα σημεία του διαστήματος $(1, \infty)$ στο διάστημα $(0, 1)$ και τα σημεία του διαστήματος $(-\infty, -1)$ στο διάστημα $(-1, 0)$. Η απεικόνιση αντιστροφής δεν ορίζεται στο 0.

Στο μιγαδικό επίπεδο θα θεωρήσουμε δύο απεικονίσεις αντιστροφής, την $z \mapsto 1/z$, την οποία θα ονομάσουμε **αναλυτική αντιστροφή**, και την $z \mapsto 1/\bar{z}$, την οποία θα ονομάσουμε **γεωμετρική αντιστροφή**. Και οι δύο αυτές απεικονίσεις ορίζονται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το 0.

Η αναλυτική αντιστροφή απεικονίζει το $z = r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$ στο $z^{-1} = r^{-1}(\cos\vartheta - \mathrm{i}\sin\vartheta)$, δηλαδή στο σημείο του οποίου το μέτρο είναι το αντίστροφο του μέτρου του z, και το όρισμα είναι το αντίθετο του ορίσματος του z.

Η γεωμετρική αντιστροφή απεικονίζει το $z = r(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$ στο $\bar{z}^{-1} = r^{-1}(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta)$, δηλαδή στο σημείο του οποίου το μέτρο είναι το αντίστροφο του μέτρου του z, και το όρισμα είναι ίσο με το όρισμα του z. Η γεωμετρική αντιστροφή διατηρεί σταθερά τα σημεία στο μοναδιαίο κύκλο S^1 με κέντρο στο 0, για τα οποία $|z| = 1$, και στέλνει τα σημεία στο εσωτερικό του S^1 σε σημεία στο εξωτερικό του S^1.

Θεωρούμε ένα κύκλο με κέντρο c και ακτίνα r, του οποίου τα σημεία ικανοποιούν την εξίσωση $|z - c| = r$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την εικόνα του κύκλου από την απεικόνιση $f(z) = 1/z$, δηλαδή το σύνολο

$$\left\{w \in \mathbb{C} \,:\, w = \frac{1}{z},\, |z - c| = r\right\} = \left\{w \in \mathbb{C} \,:\, \left|\frac{1}{w} - c\right| = r\right\}.$$

Από την εξίσωση του κύκλου έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{w}-c\right)\left(\frac{1}{\bar w}-\bar c\right) &= r^2\\ \frac{1}{w\bar w}-\frac{\bar c}{w}-\frac{c}{\bar w}+c\bar c &= r^2\\ \frac{1-\bar c\bar w-cw}{w\bar w} &= r^2-c\bar c\,.\end{aligned}$$

Εάν $r^2-c\bar c\neq 0$, η εξίσωση γίνεται

$$w\bar w=\frac{r^2-c\bar c}{(r^2-c\bar c)^2}-\frac{\bar c\bar w+cw}{r^2-c\bar c},$$

την οποία επεξεργαζόμαστε για να πάρουμε, διαδοχικά,

$$\begin{aligned}w\bar w+\frac{\bar c\bar w}{r^2-c\bar c}+\frac{cw}{r^2-c\bar c}+\frac{c\bar c}{(r^2-c\bar c)^2} &= \frac{r^2}{(r^2-c\bar c)^2}\\ \left(w-\frac{\bar c}{c\bar c-r^2}\right)\left(\bar w-\frac{c}{c\bar c-r^2}\right) &= \frac{r^2}{(c\bar c-r^2)^2}\\ \left|w-\frac{\bar c}{c\bar c-r^2}\right| &= \frac{r}{|c\bar c-r^2|}\,. \qquad (3.23)\end{aligned}$$

Δηλαδή το σημείο w βρίσκεται σε κύκλο με κέντρο $\frac{\bar c}{c\bar c-r^2}$ και ακτίνα $\frac{r}{|c\bar c-r^2|}$.

Εάν $r^2-c\bar c=0$, η εξίσωση γίνεται

$$cw+\bar c\bar w=1 \qquad (3.24)$$

που είναι η εξίσωση μίας ευθείας.

Δραστηριότητα 3.23 Δείξτε οτι η ευθεία με εξίσωση (3.24) περνάει από το σημείο $\frac{1}{2c}$ και είναι κάθετη προς την ευθεία που διέρχεται από το 0 και το $\bar c$.

Παρόμοια αποτελέσματα βρίσκουμε και για τη γεωμετρική αντιστροφή $z\mapsto 1/\bar z$: Ο κύκλος $C:|z-c|=r$ απεικονίζεται στον κύκλο με κέντρο $\frac{c}{c\bar c-r^2}$ και ακτίνα $\frac{r}{|c\bar c-r^2|}$ εάν $r^2-c\bar c\neq 0$, ενώ απεικονίζεται στην ευθεία με εξίσωση $\bar cw+c\bar w=1$ εάν $r^2-c\bar c=0$.

Συνοψίζοντας, τόσο η αναλυτική αντιστροφή $z\mapsto 1/z$ όσο και η γεωμετρική αντιστροφή $z\mapsto 1/\bar z$ απεικονίζουν τον κύκλο C

- σε κύκλο, εάν $0 \notin C$
- σε ευθεία, εάν $0 \in C$,

και απεικονίζουν την ευθεία ε

- σε κύκλο, εάν $0 \notin \varepsilon$
- σε ευθεία, εάν $0 \in \varepsilon$,

> **Δραστηριότητα 3.24** Βρείτε την εικόνα του κύκλου που υπολογίσατε στη Δραστηριότητα 3.22 από την αναλυτική και τη γεωμετρική αντιστροφή.

3.18 Μετασχηματισμοί Möbius του μιγαδικού επιπέδου

Οι μετασχηματισμοί Möbius είναι μία οικογένεια απεικονίσεων από το μιγαδικό επίπεδο στο μιγαδικό επίπεδο που περιλαμβάνουν τους ευκλείδειους μετασχηματισμούς και τις αντιστροφές. Εδώ θα περιοριστούμε στους μετασχηματισμούς Möbius που διατηρούν τον προσανατολισμό του επιπέδου, δηλαδή το πρόσημο της γωνίας περιστροφής.

Ορισμός 3.3. Ένας **μετασχηματισμός Möbius** είναι μία συνάρτηση της μορφής

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}\,, \text{ όπου } a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{C}, \text{ και } ad - bc \neq 0\,.$$

Ο περιορισμός $ad - bc \neq 0$ χρειάζεται για να εξασφαλίσουμε οτι η f δεν είναι μία σταθερή συνάρτηση. Για παράδειγμα, εάν $ad - bc = 0$ και $cd \neq 0$, τότε $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, και για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}$. Με αυτόν τον περιορισμό, εάν $c \neq 0$ η συνάρτηση f ορίζεται για κάθε μιγαδικό αριθμό εκτός από τον $-\frac{d}{c}$, και παίρνει τιμές σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το $\frac{a}{c}$. Δηλαδή ο μετασχηματισμός Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}\,.$$

Εάν $c = 0$ τότε η f ορίζεται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, και είναι μία αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Παράδειγμα 3.14 Η ταυτοτική απεικόνιση είναι μετασχηματισμός Möbius: $z = \frac{1z+0}{0z+1}$. Η αναλυτική αντιστροφή είναι επίσης μετασχηματισμός Möbius: $\frac{1}{z} = \frac{0z+1}{1z+0}$.

Δραστηριότητα 3.25 Γράψτε τις ακόλουθες συναρτήσεις στη μορφή $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, για να δείξετε οτι είναι μετασχηματισμοί Möbius.

α′. $f(z) = 2z$
β′. $f(z) = (3 + \mathrm{i})z$
γ′. $f(z) = z - 4\mathrm{i}$
δ′. $f(z) = \frac{2}{3z}$
ε′. $f(z) = \frac{1}{3z-\mathrm{i}}$
ϛ′. $f(z) = \frac{z}{1+z}$

Ένας μετασχηματισμός Möbius είναι αντιστρέψιμη απεικόνιση: εάν $f(z) = w$, μπορούμε να εκφράσουμε το z ως συνάρτηση του w. Από τη σχέση $w = \frac{az+b}{cz+d}$ έχουμε

$$\begin{aligned} az + b &= czw + dw \\ (-cw + a)z &= dw - b \\ \text{άρα } z &= \frac{dw - b}{-cw + a}\,. \end{aligned}$$

Καταλήγουμε οτι ο μετασχηματισμός Möbius $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ έχει αντίστροφη συνάρτηση

$$f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{a/c\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}\,, \quad f^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}\,.$$

Δραστηριότητα 3.26 Γράψτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό f^{-1} για τους μετασχηματισμούς Möbius της Δραστηριότητας 3.25

Θέλουμε να εξετάσουμε τα σταθερά σημεία ενός μετασχηματισμού Möbius, δηλαδή τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους $f(z) = z$.

Εάν $c = 0$, τότε $ad \neq 0$, άρα $d \neq 0$, και ο μετασχηματισμός Möbius $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ έχει τη μορφή $f(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Εάν $a \neq d$, ο f έχει ένα σταθερό σημείο, το $z = \frac{b}{d-a}$. Εάν $a = d$ και $b \neq 0$ ο f δεν έχει κανένα σταθερό σημείο.

Εάν $c \neq 0$, ο μετασχηματισμός $f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ έχει δύο σταθερά σημεία, τα οποία είναι οι λύσεις της εξίσωσης $az+b = (cz+d)z$, δηλαδή

$$z = \frac{1}{2c}\left(a - d + ((a-d)^2 + 4bc)^{1/2}\right) .$$

Παράδειγμα 3.15 Τα σταθερά σημεία του μετασχηματισμού Möbius $f(z) = \frac{z+1}{z-2}$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης $z^2 - 3z - 1 = 0$, δηλαδή $z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}$ και $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$.

> **Δραστηριότητα 3.27** Βρείτε τα σταθερά σημεία των μετασχηματισμών Möbius
>
> α′. $f(z) = (3+\mathrm{i})z$ β′. $f(z) = \frac{z}{1+z}$
>
> γ′. $f(z) = \frac{1}{3z-\mathrm{i}}$ δ′. $f(z) = \frac{2z-\mathrm{i}}{z+1-\mathrm{i}}$

Οι μετασχηματισμοί Möbius απεικονίζουν κύκλους σε κύκλους ή σε ευθείες, και ευθείες σε κύκλους ή σε ευθείες.

Παράδειγμα 3.16 Θέλουμε να βρούμε την εικόνα του **μοναδιαίου κύκλου**, δηλαδή του κύκλου με κέντρο 0 και ακτίνα 1, $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, από το μετασχηματισμό Möbius $f(z) = \frac{z+1}{z-2}$. Εάν ο μιγαδικός αριθμός $w = \frac{z+1}{z-2}$ ανήκει στο συνολο $f(S)$, τότε ο $f^{-1}(w) \in S$.

Υπολογίζουμε την αντίστροφη συνάρτηση: αφού $w(z-2) = z+1$, έχουμε $z(w-1) = 2w+1$ και

$$f^{-1}(w) = z = \frac{2w+1}{w-1} . \tag{3.25}$$

Άρα η εικόνα $f(S)$ αποτελείται απο τους μιγαδικούς αριθμούς w για τους οποίους $|f^{-1}(w)| = 1$, δηλαδή

$$\left|\frac{2w+1}{w-1}\right| = 1 .$$

Αφού $|z|^2 = z\bar{z}$, υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε

$$(2w+1)(2\bar{w}+1) = (w-1)(\bar{w}-1)\,,$$

απ' όπου βρίσκουμε $w\bar{w} + w + \bar{w} = 0$. Προσθέτουμε 1 και στις δύο πλευρές, παραγοντοποιούμε και βρίσκουμε

$$(w+1)(\bar{w}+1) = 1\,,$$

δηλαδή την εξίσωση του κύκλου με κέντρο -1 και ακτίνα 1. Άρα η εικόνα $f(S)$ είναι ο κύκλος με κέντρο -1 και ακτίνα 1.

Κατόπιν θέλουμε να βρούμε την εικόνα του φανταστικού άξονα $\mathrm{i}\mathbb{R}$, με εξίσωση $z + \bar{z} = 0$ από το μετασχηματισμό f. Ο μιγαδικός αριθμός w θα ανήκει στην εικόνα $f(\mathrm{i}\mathbb{R})$ εάν $f^{-1}(w) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$, δηλαδή εάν $f^{-1}(w) + \overline{f^{-1}(w)} = 0$. Αντικαθιστώντας από την 3.25 βρίσκουμε την εξίσωση του συνόλου $f(\mathrm{i}\mathbb{R})$,

$$(2w+1)(\bar{w}-1) = -(2\bar{w}+1)(w-1)\,,$$

η οποία γίνεται διαδοχικά

$$\begin{aligned} 4w\bar{w} - w - \bar{w} &= 2 \\ w\bar{w} - \frac{1}{4}w - \frac{1}{4}\bar{w} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} &= \frac{1}{2} \\ \left(w - \frac{1}{4}\right)\left(\bar{w} - \frac{1}{4}\right) &= \frac{9}{16}\,. \end{aligned}$$

Άρα η εικόνα του φανταστικού άξονα από το μετασχηματισμό f είναι ο κύκλος με κέντρο $\frac{1}{4}$ και ακτίνα $\frac{3}{4}$.

Παράδειγμα 3.17 Θα βρούμε την εικόνα του κύκλου C, με κέντρο i και ακτίνα 1, από το μετασχηματισμό $f(z) = \frac{2z-1}{z+1-\mathrm{i}}$. Αρχικά βρίσκουμε τον αντίστροφο, $f^{-1}(w) = \frac{(1-\mathrm{i})w+1}{-w+2}$. Άρα w βρίσκεται στην εικόνα του κύκλου εάν

$$\left|\frac{(1-\mathrm{i})w+1}{-w+2} - \mathrm{i}\right| = 1\,,$$

που γίνεται $|w+1-2\mathrm{i}| = |w-2|$. Δηλαδή η εικόνα $f(C)$ είναι μία ευθεία, η μεσοκάθετος των σημείων 2 και $-1+2\mathrm{i}$.

Αφού η απεικόνιση f είναι συνεχής, το εσωτερικό του κύκλου C απεικονίζεται στο ένα από τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζει η ευθεία $f(C)$. Για να βρούμε σε ποιό, αρκεί να ελέγξουμε ένα σημείο, για παράδειγμα την εικόνα του κέντρου του κύκλου, $f(\mathrm{i}) = \frac{2\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}+1-\mathrm{i}} = 2\mathrm{i}-1$. Άρα το εσωτερικό του κύκλου απεικονίζεται στο ημιεπίπεδο $|w+1-2\mathrm{i}| < |w-2|$.

Δραστηριότητα 3.28 Δείξτε οτι ο μετασχηματισμός Möbius $f(z) = \frac{z+1}{z-2}$ απεικονίζει τον κύκλο $|z-\frac{1}{2}| = \frac{3}{2}$ στον φανταστικό άξονα.

3.19 Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση

Θεωρούμε τους αριθμούς $t+\mathrm{i}\vartheta$ και $s+\mathrm{i}\varphi$, καθώς και τους $e^t(\cos\vartheta+\mathrm{i}\sin\vartheta)$ και $e^s(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$. Παρατηρούμε οτι

$$e^t(\cos\vartheta+\mathrm{i}\sin\vartheta)\cdot e^s(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi) = e^{t+s}\left(\cos(\vartheta+\varphi)+\sin\mathrm{i}(\vartheta+\varphi)\right)$$

και

$$\left[e^t(\cos\vartheta+\mathrm{i}\sin\vartheta)\right]^n = e^{nt}\left(\cos(n\vartheta)+\mathrm{i}\sin(n\vartheta)\right)\,,$$

δηλαδή οτι η αντιστοίχιση

$$t+\mathrm{i}\vartheta \mapsto e^t(\cos\vartheta+\mathrm{i}\sin\vartheta)$$

έχει τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης, να απεικονίζει αθροίσματα σε γινόμενα και ακέραια πολλαπλάσια σε δυνάμεις.

Με βάση αυτή την παρατήρηση θα ορίσουμε τη **μιγαδική εκθετική συνάρτηση**

$$\exp(z) = e^{t+\mathrm{i}\vartheta} = e^t(\cos\vartheta+\mathrm{i}\sin\vartheta)\,,$$

ή

$$\exp(z) = e^z = e^{\mathrm{Re}\,(z)}\left(\cos(\mathrm{Im}\,z)+\mathrm{i}\sin(\mathrm{Im}\,z)\right)\,.$$

Η συνάρτηση $\exp : z \mapsto e^z$ έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{C}$, και σύνολο τιμών όλους τους μη μηδενικούς μιγαδικούς αριθμούς. Συνεπώς κάθε μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός μπορεί να εκφραστεί σε **εκθετική μορφή**

$$z = e^{\log|z| + \mathrm{i}\operatorname{Arg} z}\,.$$

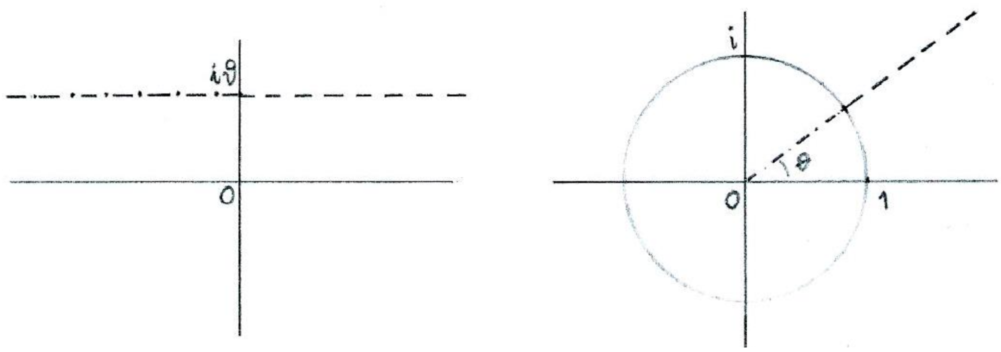
Η εκθετική μορφή μπορεί να θεωρηθεί και ως συντομότερος τρόπος γραφής της τριγωνομετρικής μορφής, αφού

$$e^t(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta) = e^{t+\mathrm{i}\vartheta}\,.$$

Δραστηριότητα 3.29 Γράψτε τους ακόλουθους αριθμούς στη μορφή $a + b\mathrm{i}$ για $a,\, b \in \mathbb{R}$.

α′. $e^{\mathrm{i}\pi/3}$	β′. $e^{-\mathrm{i}\pi/3}$
γ′. $e^{\log 3 + \mathrm{i}\pi}$	δ′. $e^{\frac{1}{2} + 5\mathrm{i}\pi}$
ε′. $e^{2 - \frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}$	ϛ′. $e^{2 + \frac{3\mathrm{i}\pi}{4}}$

Η εκθετική συνάρτηση απεικονίζει την ευθεία $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\vartheta$, δηλαδή το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με φανταστικό μέρος ίσο με ϑ, στην ημιευθεία από το 0 που σχηματίζει γωνία ϑ με το θετικό πραγματικό ημιάξονα, Σχέδιο 3.10. Για $t > 0$, ο μιγαδικός αριθμός $e^{t+\mathrm{i}\vartheta}$ βρίσκεται στο μέρος αυτής της ημιευθείας που είναι έξω από το μοναδιαίο κύκλο. Για $t = 0$, ο μιγαδικός αριθμός $e^{\mathrm{i}\vartheta}$ βρίσκεται πάνω στο μοναδιαίο κύκλο. Ενώ για $t < 0$, ο μιγαδικός αριθμός $e^{t+\mathrm{i}\vartheta}$ βρίσκεται στο μέρος αυτής της ημιευθείας που είναι στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου.

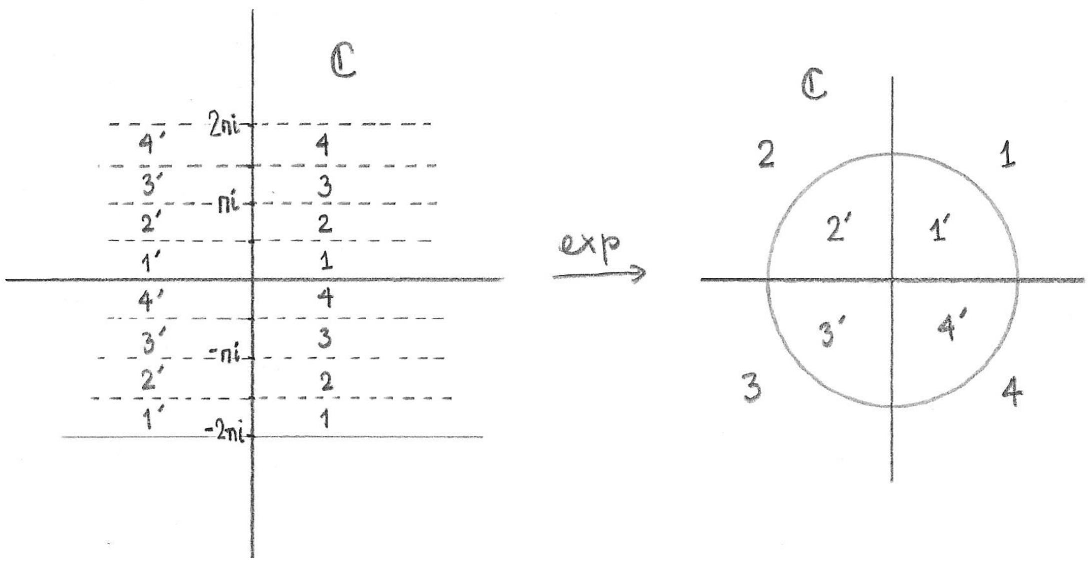


Σχήμα 3.10: Η εικόνα της ευθείας $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}\vartheta$.

Εάν $\vartheta - \varphi = 2k\pi$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$, τότε

$$e^{t+\mathrm{i}\vartheta} = e^t(\cos\vartheta + \mathrm{i}\sin\vartheta) = e^t(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = e^{t+\mathrm{i}\varphi}\,.$$

Το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi\}$, δηλαδή η λωρίδα στο μιγαδικό επίπεδο μεταξύ της πραγματικής ευθείας (που ανήκει στο σύνολο) και της ευθείας $\operatorname{Im} z = 2\pi$ (που δεν ανήκει στο σύνολο) απεικονίζεται σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, εκτός από το 0. Το ίδιο ισχύει για κάθε οριζόντια λωρίδα με πλάτος 2π που περιλαμβάνει τη μία από τις δύο ευθείες που αποτελούν το σύνορό της. Στο Σχήμα 3.11 τέτοιες λωρίδες είναι, για παράδειγμα, οι $\{t + \mathrm{i}\vartheta : 0 \leq \vartheta < 0\}$, $\{t + \mathrm{i}\vartheta : -\pi \leq \vartheta < \pi\}$ και $\{t + \mathrm{i}\vartheta : -\frac{\pi}{2} \leq \vartheta < \frac{3\pi}{2}\}$. Προσέξτε τις περιοχές 1, 2, 3, 4 και $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ κάθε λωρίδας, που απεικονίζονται στις αντίστοιχες περιοχές του εσωτερικού ή του εξωτερικού του μοναδιαίου κύκλου.



Σχήμα 3.11: Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση.

Μπορούμε να φανταστούμε οτι η μιγαδική εκθετική συνάρτηση τυλίγει τη λωρίδα $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Im} z < 2\pi\}$ ώστε να σχηματιστεί ένας κύλινδρος, στη συνέχεια τυλίγει όλο το μιγαδικό επίπεδο άπειρες φορές γύρω από αυτόν τον κύλινδρο, και τέλος ανοίγει τον κύλινδρο πάνω στο επίπεδο (χωρίς το 0!) όπως ανοίγει μία ομπρέλα.

Δραστηριότητα 3.30 Δείξτε οτι η εκθετική συνάρτηση απεικονίζει την ευθεία $\mathrm{Re}\, z = 2$ στον κύκλο $|w| = e^2$.
Δείξτε οτι η εκθετική συνάρτηση απεικονίζει την ευθεία $\mathrm{Im}\, z = \pi/4$ στην ημιευθεία $w = t(1 + \mathrm{i})$, για $t > 0$.

Συνοψίζουμε τις ιδιότητες της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 3.9 *Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση* $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$,

$$\exp(z) = e^z = e^{\mathrm{Re}\,(z)}(\cos \mathrm{Im}\,(z) + \mathrm{i} \sin \mathrm{Im}\,(z))\,,$$

έχει τις ιδιότητες

α΄. $e^z\, e^w = e^{z+w}$,

β΄. $(e^z)^n = e^{nz}$,

γ΄. $e^{z+2k\pi \mathrm{i}} = e^z$,

δ΄. $(e^z)^{-1} = e^{-z}$,

ε΄. $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$,

ς΄. $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$ *και* $\mathrm{Arg}\,(e^z) \equiv \mathrm{Im}\, z$.

3.20 Ασκήσεις

Άσκηση 3.33 Βρείτε και χαρακτηρίστε γεωμετρικά την εικόνα της ευθείας $y - x = 1$ μέσω της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z}$, όπου $z = x + \mathrm{i}y$.

Άσκηση 3.34 Δείξτε οτι η σύνθεση δύο μετασχηματισμών Möbius είναι μετασχηματισμός Möbius: Εάν $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ και $g(z) = \frac{pz+q}{rz+s}$, δείξτε οτι $f \circ g(z)$ γράφεται επίσης στη μορφή $\frac{Az+B}{Cz+D}$ για κατάλληλα A, B, C, D.

Άσκηση 3.35 Δίδονται οι συναρτήσεις $f(z) = \mathrm{i}z - 4$ και $g(z) = \frac{z}{z+1}$. Γράψτε στη μορφή $\frac{az+b}{cz+d}$ με $ad - bc \neq 0$, τις συναρτήσεις

α′. $g(z)$	β′. $f^{-1}(z)$
γ′. $g^{-1}(z)$	δ′. $g \circ f(z)$
ε′. $f \circ g(z)$	ϛ′. $f \circ g \circ f^{-1}(z)$

Άσκηση 3.36 Δίδονται οι συναρτήσεις $f(z) = \mathrm{i}z$ και $g(z) = \frac{2z+1}{z+2}$. Βρείτε τα σταθερά σημεία των απεικονίσεων f, g, $f \circ g \circ f^{-1}$.

Άσκηση 3.37 Θεωρήστε την οικογένεια Απολλώνιων κύκλων $|z+1| = \lambda|z-1|$, για $\lambda > 0, \lambda \neq 1$. Δείξτε οτι ο μετασχηματισμός Möbius $g(z) = \frac{z-\mathrm{i}}{-\mathrm{i}z+1}$ έχει σταθερά σημεία 1 και -1 και διατηρεί αμετάβλητο το λόγο των αποστάσεων του z από τα σημεία 1 και -1, δηλαδή οτι

$$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = \left|\frac{g(z)+1}{g(z)-1}\right| .$$

Αυτό σημαίνει οτι απεικονίζει κάθε κύκλο της δέσμης $|z+1| = \lambda|z-1|$ στον εαυτό του.

Άσκηση 3.38 Επαληθεύστε τις ιδιότητες της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης στην Πρόταση 3.9.

Άσκηση 3.39 Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο $\exp(R)$, όπου R είναι η λωρίδα $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq \mathrm{Re}\,(z) \leq 2\}$.

Άσκηση 3.40 Περιγράψτε γεωμετρικά την εικόνα μέσω της εκθετικής συνάρτησης των υποσυνόλων του μιγαδικού επιπέδου

α′. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \leq 1\}$
β′. $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq 0,\ 2\pi/3 \leq \mathrm{Im}\, z \leq 5\pi/6\}$
γ′. $\{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1,\ \mathrm{Im}\, z = -9\pi/4\}$
δ′. $\{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq \mathrm{Re}\, z \leq 1,\ 3\pi/4 \leq \mathrm{Im}\, z \leq \pi\}$

Άσκηση 3.41 Περιγράψτε γεωμετρικά την εικόνα των υποσυνόλων του μιγαδικού επιπέδου $F = \{z \in \mathbb{C} : z + \bar{z} = 4\}$ και $G = \{z \in \mathbb{C} : z - \bar{z} = 3\pi\mathrm{i}\}$ από τις απεικονίσεις

α′. $\exp(z) = e^z$

β′. $f(z) = e^z - \mathrm{i}$

γ′. $g(z) = e^{-2z}$

δ′. $h(z) = e^{z+2}$

3.21 Παράρτημα: Η απόδειξη της Πρότασης 3.8.

Απόδειξη. Υποθέτουμε οτι α, β, $\gamma \in \mathbb{C}$, με $\alpha\beta\gamma \neq 0$ και $\alpha\gamma = \beta\bar{\gamma}$. Επιλέγουμε $c > 0$ και φ, $\vartheta \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\gamma = |\alpha|ce^{\mathrm{i}\varphi}$ και $\alpha = |\alpha|e^{-\mathrm{i}\varphi}e^{\mathrm{i}\vartheta}$. Τότε

$$\beta|\alpha|ce^{-\mathrm{i}\varphi} = \beta\bar{\gamma} = \alpha\gamma = |\alpha|e^{-\mathrm{i}\varphi}e^{\mathrm{i}\vartheta}|\alpha|ce^{\mathrm{i}\varphi}\,,$$

συνεπώς $\beta = |\alpha|e^{\mathrm{i}\varphi}e^{\mathrm{i}\vartheta}$. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 3.15 έχουμε

$$|\alpha|e^{\mathrm{i}\varphi}e^{-\mathrm{i}\vartheta}z + |\alpha|e^{\mathrm{i}\varphi}e^{\mathrm{i}\vartheta}\bar{z} + |\alpha|ce^{\mathrm{i}\varphi} = 0\,.$$

Διαιρούμε με $|\alpha|e^{\mathrm{i}\varphi}$ και έχουμε την εξίσωση μίας ευθείας στη μορφή 3.14.

Για το αντίστροφο, υποθέτουμε οτι η εξίσωση $\bar{\alpha}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$, με $\alpha\beta\gamma \neq 0$, ικανοποιείται από τα σημεία μίας ευθείας ε και θα δείξουμε οτι τότε $\alpha\gamma = \beta\bar{\gamma}$.

Γνωρίζουμε οτι η ε έχει μία εξίσωση της μορφής $\bar{u}z + u\bar{z} + c = 0$, με $c > 0$ και $|u| = 1$. Εάν $\operatorname{Re} u \neq 0$, η ε περνάει από τα σημεία $-\frac{c}{\bar{u}+u}$ και $-\frac{c}{\bar{u}+u} + \mathrm{i}u$. Αντικαθιστώντας την πρώτη τιμή του z στην 3.15 έχουμε $-\bar{\alpha}\frac{c}{\bar{u}+u} - \beta\frac{c}{\bar{u}+u} + \gamma = 0$, από την οποία βρίσκουμε $\gamma = \frac{c}{\bar{u}+u}(\bar{\alpha} + \beta)$. Αντικαθιστώντας τη δεύτερη τιμή του z στην 3.15 έχουμε $\bar{\alpha}(-\frac{c}{\bar{u}+u} + \mathrm{i}u) + \beta(-\frac{c}{\bar{u}+u} - \mathrm{i}\bar{u}) + \frac{c}{\bar{u}+u}(\bar{\alpha} + \beta) = 0$, από την οποία έχουμε $\bar{\alpha}u - \beta\bar{u} = 0$. Συνεπώς $|\alpha| = |\beta|$, δηλαδή $\alpha\bar{\alpha} = \beta\bar{\beta}$.

Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned}
\alpha\gamma &= \alpha\frac{c}{\bar{u}+u}(\bar{\alpha}+\beta) \\
&= \frac{c}{\bar{u}+u}(\alpha\bar{\alpha}+\alpha\beta) \\
&= \frac{c}{\bar{u}+u}(\beta\bar{\beta}+\alpha\beta) \\
&= \beta\frac{c}{\bar{u}+u}(\alpha+\bar{\beta}) \\
&= \beta\bar{\gamma}\,.
\end{aligned}$$

Εάν $\operatorname{Re} u = 0$, χρησιμοποιούμε τα σημεία $-\frac{c}{\bar{u}-u}$ και $-\frac{c}{\bar{u}-u} + \mathrm{i}u$. Αντικαθιστώντας αυτά τα σημεία στην 3.15 έχουμε $\gamma = \frac{c}{\bar{u}-u}(\bar{\alpha} - \beta)$ και

$\bar{\alpha}u - \beta\bar{u} = 0$. Ένας παρόμοιος υπολογισμός δίνει $\alpha\gamma = \beta\bar{\gamma}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη για την περίπτωση όπου $\gamma \neq 0$.

Τώρα υποθέτουμε οτι $\gamma = 0$, δηλαδή οτι έχουμε εξίσωση της μορφής $\bar{\alpha}z + \beta\bar{z} = 0$. Επιλέγουμε $r > 0$ και ϑ, $\varphi \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\alpha = re^{\mathrm{i}\vartheta}$ και $\beta = re^{\mathrm{i}\vartheta}e^{2\mathrm{i}\varphi}$. Αντικαθιστούμε στην 3.15, διαιρούμε με $re^{\mathrm{i}\varphi}$ και έχουμε την εξίσωση μίας ευθείας στη μορφή 3.14.

Για το αντίστροφο, εάν $\bar{\alpha}z + \beta\bar{z} = 0$ ικανοποιείται από τα σημεία μίας ευθείας ε, τότε το 0 ανήκει στην ε. Θεωρούμε την εξίσωση της μορφής 3.14 της ε, $\bar{u}z + u\bar{z} = 0$. Αυτή ικανοποιείται από το σημείο $\mathrm{i}u$. Αντικαθιστώντας το στην 3.15 έχουμε $\bar{\alpha}u - \beta\bar{u} = 0$, και συνεπώς $|\alpha| = |\beta|$.

$\square$

Κεφάλαιο 4

Καμπύλες 2ου βαθμού στο επίπεδο.

Σε αυτό το Κεφάλαιο επιστρέφουμε στην Αναλυτική Γεωμετρία του επιπέδου, για να μελετήσουμε σχήματα που περιγράφονται από εξισώσεις 2ου βαθμού, δηλαδή εξισώσεις στις οποίες οι μεταβλητές x και y εμφανίζονται και σε όρους δευτέρου βαθμού, x^2, y^2 και xy. Τέτοια σχήματα είναι οι *κωνικές τομές*, δηλαδή καμπύλες που προκύπτουν ως η τομή ενός κώνου με ένα επίπεδο: ο κύκλος και η έλλειψη, η παραβολή και η υπερβολή. Ειδικές περιπτώσεις εξισώσεων δευτέρου βαθμού δίδουν *εκφυλισμένες* κωνικές τομές, για παράδειγμα, $x^2 + y^2 = -1$ δεν ικανοποιείται από κανένα ζεύγος στο $\mathbb{R}^2$.

Θα εξετάσουμε κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες κωνικών τομών και τις σχετικές θέσεις μίας κωνικής τομής και μίας ευθείας στο επίπεδο. Τέλος θα δούμε κριτήρια για να διακρίνουμε το είδος μίας με εκφυλισμένης κωνικής τομής όταν η εξίσωση δεν δίδεται σε κανονική μορφή.

Εβδομάδα 8

4.1 Ο Κύκλος

Ο κύκλος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν σταθερή απόσταση $r > 0$ από ένα σημείο P, το κέντρο του κύκλου.

Η διανυσματική εξίσωση που ικανοποιεί το γενικό σημείο $X : (x, y)$ του κύκλου είναι

$$|\overrightarrow{PX}| = r$$

Εάν το κέντρο έχει συντεταγμένες $P : (p, q)$ ως προς το σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j})$, η εξίσωση του κύκλου είναι

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \tag{4.1}$$

Εάν το κέντρο βρίσκεται στο σημείο αναφοράς O, η εξίσωση του κύκλου είναι

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{4.2}$$

Η γενική εξίσωση του κύκλου είναι της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0\,. \tag{4.3}$$

Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(x+\frac{A}{2}\right)^2 - \frac{A^2}{4} + \left(y+\frac{B}{2}\right)^2 - \frac{B^2}{4} + C &= 0 \\
\left(x+\frac{A}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{B}{2}\right)^2 &= \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C\,.
\end{aligned}$$

Εάν $A^2 + B^2 - 4C > 0$ η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$ και ακτίνα $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$. Εάν $A^2 + B^2 - 4C = 0$ η εξίσωση ικανοποιείται μόνον από το σημείο $(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$, ενώ εάν $A^2 + B^2 - 4C < 0$ δεν υπάρχουν πραγματικές τιμές που να ικανοποιούν την εξίσωση.

Δραστηριότητα 4.1 Βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$.

Μπορούμε να βρούμε τον μοναδικό κύκλο που περνάει από τρία σημεία που δεν βρίσκονται σε ευθεία.

Παράδειγμα 4.1 Ο κύκλος που περνάει από τα σημεία (1, 2), (0, 1) και (2, 0) έχει εξίσωση της μορφής 4.3. Αντικαθιστώντας τις συντεταγμένες των σημείων έχουμε τις εξισώσεις

$$\begin{array}{ccccccc} A & + & 2B & + & C & = & -5 \\ 0 & + & B & + & C & = & -1 \\ 2A & + & 0 & + & C & = & -4 \end{array}$$

από τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές A, B, C. Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε $3A = -7$, $3B = -5$, $3C = 2$. Άρα η εξίσωση του κύκλου είναι $3x^2 + 3y^2 - 7x - 5y + 2 = 0$. Ο κύκλος έχει κέντρο (7/6, 5/6) και ακτίνα $r = 5\sqrt{2}/6$.

Πρόταση 4.1 *Ο κύκλος που περνάει από τα σημεία* (a_1, b_1), (a_2, b_2) *και* (a_3, b_3) *έχει εξίσωση*

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0\,,$$

όπου A, B, C *ικανοποιούν τις εξισώσεις*

$$\begin{array}{ccccccc} a_1A & + & b_1B & + & C & = & -a_1^2 - b_1^2\,, \\ a_2A & + & b_2B & + & C & = & -a_2^2 - b_2^2\,, \\ a_3A & + & b_3B & + & C & = & -a_3^2 - b_3^2\,. \end{array}$$

Δραστηριότητα 4.2 Βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνάει από τα σημεία (0, 0), (2, 0) και (0, 4).

4.2 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τις σχετικές θέσεις της ευθείας και του κύκλου. Θα περιοριστούμε στην περίπτωση που το κέντρο του κύκλου είναι στο σημείο αναφοράς. Οι εξισώσεις για τη γενική περίπτωση μπορούν εύκολα να υπολογιστούν με αλλαγή του σημείου αναφοράς, και δίδονται ως ασκήσεις.

Ορισμός 4.1. Μία ευθεία είναι **εφαπτομένη** ενός κύκλου εάν έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τον κύκλο.

Θεωρούμε κύκλο K με κέντρο O και ακτίνα r, και μία ευθεία ε που περνάει από τα σημεία $X_1 : (x_1, y_1)$ και $X_2 : (x_2, y_2)$. Υπενθυμίζουμε οτι το γενικό σημείο $X : (x, y)$ της ευθείας ε, μπορεί να προσδιοριστεί από τον απλό λόγο (X_1, X_2, X), που είναι ο λόγος των προσημασμένων μηκών $\frac{(\overrightarrow{X_1X})}{(\overrightarrow{XX_2})}$. Από την 1.5, το σημείο με απλό λόγο $(X_1, X_2, X) = t$, έχει συντεταγμένες,

$$x = \frac{x_1 + tx_2}{1+t}, \qquad y = \frac{y_1 + ty_2}{1+t}. \tag{4.4}$$

Το σημείο X βρίσκεται στον κύκλο εάν

$$\left(\frac{x_1 + tx_2}{1+t}\right)^2 + \left(\frac{y_1 + ty_2}{1+t}\right)^2 = r^2,$$

ή, αφού ο απλός λόγος δεν παίρνει την τιμή -1,

$$(x_1 + tx_2)^2 + (y_1 + ty_2)^2 = r^2(1+t)^2.$$

Συγκεντρώνουμε τους όρους ίδιου βαθμού σε t,

$$(x_2^2 + y_2^2 - r^2)t^2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2 - r^2)t + (x_1^2 + y_1^2 - r^2) = 0. \tag{4.5}$$

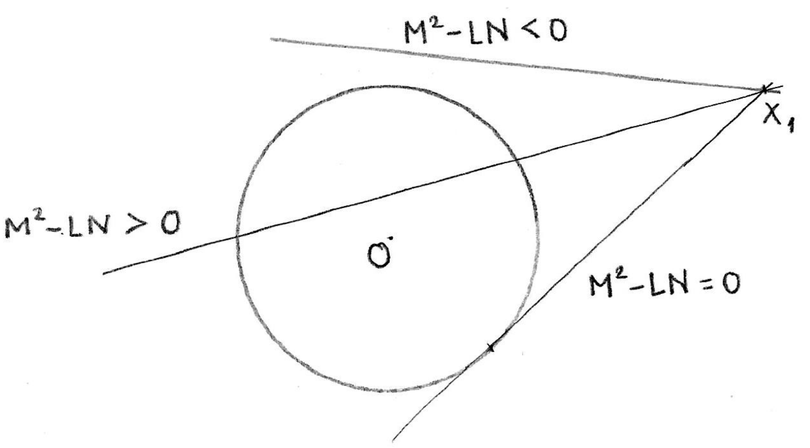
Θέτουμε

$$L = x_2^2+y_2^2-r^2, \qquad M = x_1x_2+y_1y_2-r^2, \qquad N = x_1^2+y_1^2-r^2, \tag{4.6}$$

ώστε η 4.5 να γίνει

$$Lt^2 + 2Mt + N = 0. \tag{4.7}$$

Το σημείο X της ευθείας ε με συντεταγμένες 4.4 ανήκει στον κύκλο K εάν και μόνον εάν η παράμετρος t ικανοποιεί την εξίσωση 4.7. Η εξίσωση 4.7 έχει δύο λύσεις όταν η διακρίνουσα είναι θετική, δηλαδή όταν $M^2 -$



Σχήμα 4.1: Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου.

$LN > 0$, μία λύση όταν $M^2 - LN = 0$ και καμμία λύση όταν $M^2 - LN < 0$, Σχήμα 4.1.

Ειδικότερα, η ευθεία ε που περνάει από τα σημεία X_1 και X_2 έχει μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο K όταν η εξίσωση 4.7 έχει μοναδική λύση, δηλαδή όταν η διακρίνουσα της εξίσωσης 4.7 είναι μηδέν,

$$M^2 - LN = 0\,. \tag{4.8}$$

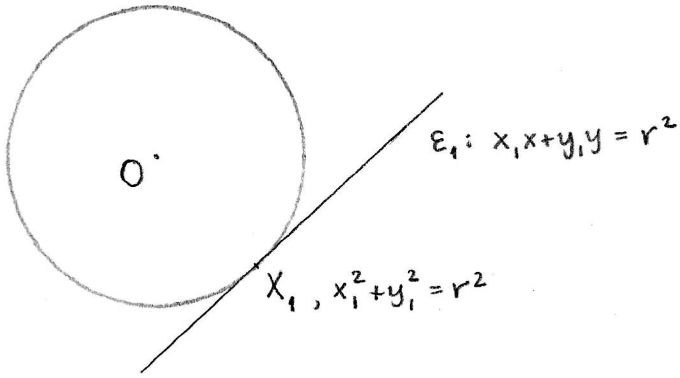
Αυτή είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι η ευθεία ε εφαπτομένη του κύκλου K.

Σημείο στον κύκλο

Εάν X_1 βρίσκεται στον κύκλο, $N = x_1^2 + y_1^2 - r^2 = 0$, και η συνθήκη 4.8 γίνεται $M = 0$. Συμπεραίνουμε οτι η ευθεία που περνάει από το σημείο του κύκλου $X_1 : (x_1,\, y_1)$ και ένα σημείο του επιπέδου $X : (x,\, y)$, είναι εφαπτομένη του κύκλου εάν $x_1 x + y_1 y = r^2$. Άρα ένα σημείο X βρίσκεται στην ευθεία που εφάπτεται στον κύκλο K στο σημείο X_1 εάν και μόνον εάν

$$x_1 x + y_1 y = r^2\,.$$

Παρατηρούμε οτι τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{X_1X} = (x - x_1,\, y - y_1)$, που είναι ένα διάνυσμα διεύθυνσης της ευθείας, είναι κάθετο στην ακτίνα από το κέντρο του κύκλου στο σημείο X_1, $\overrightarrow{OX_1} = (x_1,\, y_1)$.



Σχήμα 4.2: Εφαπτόμενη ευθεία στο σημείο X_1 του κύκλου.

Πρόταση 4.2 *Θεωρούμε κύκλο K με κέντρο O και ακτίνα r, και σημείο $X_1 : (x_1,\, y_1)$ που ανήκει στον κύκλο. Η εφαπτομένη του κύκλου K στο σημείο X_1 είναι η ευθεία με εξίσωση*

$$x_1 x + y_1 y = r^2\,. \tag{4.9}$$

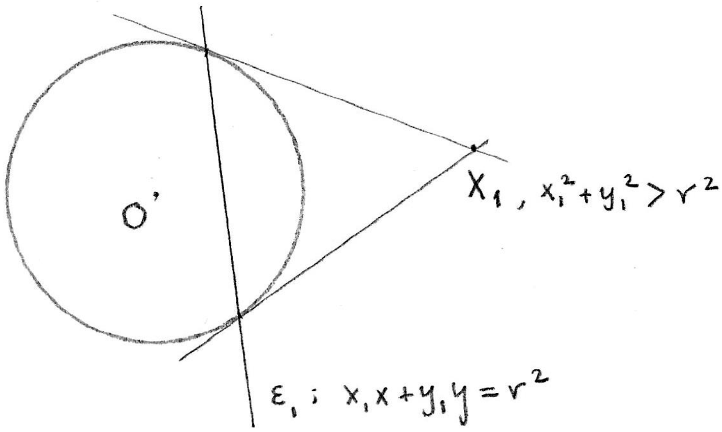
Η εφαπτομένη στον κύκλο στο σημείο X_1 είναι κάθετη στην ακτίνα OX_1.

Σημείο έξω από τον κύκλο

Τώρα εξετάζουμε την περίπτωση που X_1 βρίσκεται έξω από τον κύκλο, και $x_1^2 + y_1^2 > r^2$. Εάν $X : (x,\, y)$ είναι ένα σημείο μίας ευθείας που περνάει από το X_1 και εφάπτεται στον κύκλο, τα X_1 και X ικανοποιούν τη σχέση 4.8, δηλαδή

$$(x_1 x + y_1 y - r^2)^2 - (x_1^2 + y_1^2 - r^2)(x^2 + y^2 - r^2) = 0\,. \tag{4.10}$$

Διαισθητικά καταλαβαίνουμε οτι από ένα σημείο έξω από τον κύκλο, υπάρχουν δύο ευθείες που εφάπτονται στον κύκλο, Σχήμα 4.3. Θα επαληθεύσουμε οτι η εξίσωση 4.10 παριστάνει δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο X_1.



Σχήμα 4.3: Εφαπτόμενες στον κύκλο από το σημείο X_1.

Η γενική εξίσωση της ένωσης δύο ευθειών που τέμνονται στο σημείο $X_1 : (x_1, y_1)$ είναι

$$(A(x - x_1) + B(y - y_1))\,(C(x - x_1) + D(y - y_1)) = 0\,. \qquad (4.11)$$

Δραστηριότητα 4.3 Εξηγήστε γιατί αληθεύει ο παραπάνω ι-σχυρισμός.

Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές A, B, C και D, στην περίπτωση που $AC \neq 0$, δηλαδή όταν καμμία από τις δύο ευθείες δεν είναι παράλληλη στον άξονα $y = 0$. Θέτουμε $a = \frac{B}{A}$, $c = \frac{D}{C}$, και γράφουμε την 4.11 στη μορφή

$$((x - x_1) + a(y - y_1))\,((x - x_1) + c(y - y_1)) = 0\,. \qquad (4.12)$$

Αναπτύσσουμε την αριστερή πλευρά ως πολυώνυμο με δύο μεταβλητές, x και y. Τότε οι όροι δευτέρου βαθμού είναι

$$x^2 + acy^2 + (a + c)xy\,. \qquad (4.13)$$

Κάνουμε το ίδιο για την 4.10, και βρίσκουμε τους όρους δευτέρου βαθμού
$$(r^2 - y_1^2)x^2 + (r^2 - x_1^2)y^2 + 2x_1y_1xy\,. \tag{4.14}$$
Εάν διαιρέσουμε την 4.10 με $r^2 - y_1^2$, οι όροι δεύτερου βαθμού είναι
$$x^2 + \frac{r^2 - x_1^2}{r^2 - y_1^2}y^2 + \frac{2x_1y_1}{r^2 - y_1^2}xy\,. \tag{4.15}$$
Συγκρίνοντας την 4.15 με την 4.13, βλέπουμε οτι οι συντελεστές a και c πρέπει να ικανοποιούν τις σχέσεις
$$ac = \frac{r^2 - x_1^2}{r^2 - y_1^2} \quad \text{και} \quad a + c = \frac{2x_1y_1}{r^2 - y_1^2}\,.$$
Αντικαθιστούμε το c στη δεύτερη σχέση και έχουμε
$$a + \frac{r^2 - x_1^2}{a(r^2 - y_1^2)} = \frac{2x_1y_1}{r^2 - y_1^2}\,.$$
Οι συντελεστές a και c δίδονται από τις λύσεις της εξίσωσης δευτέρου βαθμού
$$(r^2 - y_1^2)t^2 - 2x_1y_1t + (r^2 - x_1^2) = 0\,,$$
δηλαδή
$$a,\, c = \frac{1}{r^2 - y_1^2}\left(x_1y_1 \pm r\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}\right)\,.$$

Δραστηριότητα 4.4 Εξηγήστε τον παραπάνω ισχυρισμό.

Συμπεραίνουμε οτι οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο K από το σημείο X_1 είναι οι ευθείες με εξισώσεις
$$\left(r^2 - y_1^2\right)x + \left(x_1y_1 \pm r\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}\right)y = 0\,. \tag{4.16}$$

Δραστηριότητα 4.5 Συμπληρώστε τους υπολογισμούς.

Δραστηριότητα 4.6 Εάν το κέντρο του κύκλου K βρίσκεται στο σημείο $P : (p,\, q)$, αντικαταστείστε $x{-}p$, $y{-}q$, $x_1{-}p$, $y_1{-}q$ στις εξισώσεις 4.10 και 4.16, για να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων από το σημείο X_1 προς τον κύκλο ακτίνας r με κέντρο στο σημείο P.

Άσκηση 4.1 Με ανάλογο τρόπο, βρείτε τις εξισώσεις όταν μία από τις εφαπτόμενες από το X_1 είναι παράλληλη προς τον άξονα $y = 0$.

Τα σημεία $X_2 : (x_2, y_2)$ και $X_3 : (x_3, y_3)$ στα οποία αυτές οι ευθείες εφάπτονται στον κύκλο ικανοποιούν την 4.10 και την $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, συνεπώς βρίσκονται στην ευθεία με εξίσωση $x_1 x + y_1 y = r^2$. Θα υπολογίσουμε τις συντεταγμένες αυτών των σημείων.

Εάν $y_1 = 0$, τότε $x_1^2 > r^2$, και βρίσκουμε $x_2 = x_3 = \frac{r^2}{x_1}$ και $y_2, y_3 = \pm\frac{r}{x_1}\sqrt{x_1^2 - r^2}$.

Εάν $y_1 \neq 0$, αντικαθιστούμε $y = \frac{r^2 - x_1 x}{y_1}$ στην $x^2 + y^2 = r^2$ και έχουμε $(x_1^2 + y_1^2)x^2 - 2x_1 r^2 x + r^2(r^2 - y_1^2) = 0$, την οποία λύνουμε και βρίσκουμε

$$x_2, x_3 = \frac{x_1 r^2 \pm r y_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}{x_1^2 + y_1^2}\,.$$

Αντικαθιστώντας στην 4.10 βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές των y_2, y_3

$$y_2, y_3 = \frac{y_1 r^2 \mp r x_1 \sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}{x_1^2 + y_1^2}\,.$$

Εάν θέσουμε ϑ τη γωνία $\widehat{X_1 O X_2}$, έτσι ώστε $\cos\vartheta = \frac{r}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$ και $\sin\vartheta = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}$, έχουμε

$$x_2, x_3 = x_1 \cos^2\vartheta \pm y_1 \cos\vartheta \sin\vartheta$$

και

$$y_2, y_3 = y_1 \cos^2\vartheta \mp x_1 \cos\vartheta \sin\vartheta\,.$$

Συγκεντρώνουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 4.3 *Εάν $X_1 : (x_1, y_1)$ είναι σημείο έξω από τον κύκλο K, $x_1^2 + y_1^2 > r^2$, τότε υπάρχουν δύο ευθείες από το X_1 που εφάπτονται στον κύκλο. Αυτές έχουν εξισώσεις*

$$\left(r^2 - y_1^2\right) x + \left(x_1 y_1 \pm r\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}\right) y = 0\,.$$

Τα σημεία επαφής X_2 και X_3 βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $x_1 x + y_1 y = r^2$ και έχουν συντεταγμένες $(x_2,\, y_2)$ και $(x_3,\, y_3)$ που δίδονται από

$$x_2,\, x_3 = x_1 \cos^2\vartheta \pm y_1 \cos\vartheta \sin\vartheta$$

και

$$y_2,\, y_3 = y_1 \cos^2\vartheta \mp x_1 \cos\vartheta \sin\vartheta\,,$$

όπου $\cos\vartheta = \frac{r}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$ *και* $\sin\vartheta = \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2-r^2}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$.

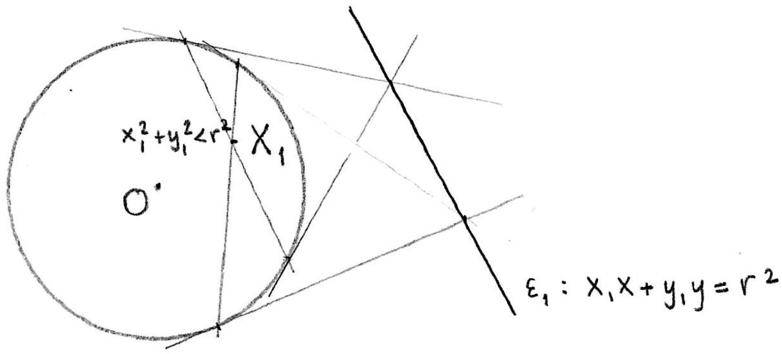
Σημείο στο εσωτερικό του κύκλου

Τέλος εξετάζουμε την περίπτωση όπου το X_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου, και $x_1^2 + y_1^2 < r^2$. Τότε κάθε ευθεία από το X_1 τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία.

Θεωρούμε πάλι την εξίσωση $x_1 x + y_1 y = r^2$, για $(x_1,\, y_1) \neq (0,\, 0)$. Αφού

$$x_1 x + y_1 y = \overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OX_1} \le |\overrightarrow{OX}|\,|\overrightarrow{OX_1}|\,,$$

και $|\overrightarrow{OX_1}| < r$, συμπεραίνουμε οτι $|\overrightarrow{OX}| > r$, δηλαδή οτι η ευθεία με εξίσωση $x_1 x + y_1 y = r^2$ βρίσκεται ολόκληρη έξω από τον κύκλο. Εάν X_1' είναι σημείο αυτής της ευθείας, τότε ${x_1'}^2 + {y_1'}^2 > r^2$, και από την Πρόταση 4.3, υπάρχουν δύο εφαπτόμενες από το X_1' προς τον κύκλο και τα σημεία επαφής αυτών των δύο εφαπτομένων βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $x_1' x + y_1' y = r^2$. Αλλά το σημείο X_1 ικανοποιεί αυτή την εξίσωση. Συμπεραίνουμε οτι το X_1 βρίσκεται πάνω στην ευθεία που συνδέει τα δύο σημεία επαφής των εφαπτομένων από οποιοδήποτε σημείο της ευθείας με εξίσωση $x_1x + y_1y = r^2$.



Σχήμα 4.4: X_1 εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Πρόταση 4.4 *Εάν $X_1 : (x_1, y_1)$ είναι σημείο στο εσωτερικό του κύκλου K, διαφορετικό από το O, $0 < x_1^2 + y_1^2 < r^2$, τότε η ευθεία με εξίσωση $x_1x + y_1y = r^2$ βρίσκεται ολόκληρη έξω από τον κύκλο K. Εάν X_1' είναι σημείο αυτής της ευθείας, τότε το X_1 βρίσκεται πάνω στην ευθεία που συνδέει το σημεία επαφής των εφαπτομένων από το X_1' προς τον κύκλο K.*

4.3 Πόλοι και πολικές ευθείες ως προς κύκλο

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε οτι σε κάθε σημείο του επιπέδου $X_1 : (x_1, y_1)$ αντιστοιχεί μία ευθεία $\varepsilon_1 : x_1x + y_1y - r^2 = 0$, η οποία έχει διαφορετικές γεωμετρικές ιδιότητες, ανάλογα με την απόσταση του X_1 από το κέντρο του κύκλου, και συνεπώς τη θέση του X_1 προς τον κύκλο K.

- Εάν $|OX_1| = r$, η ευθεία ep_1 είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο K.
- Εάν $|OX_1| > r$, η ευθεία ε_1 τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία X_2 και X_3, τα οποία ανηκουν στις εφαπτόμενες από το X_1 προς τον κύκλο.

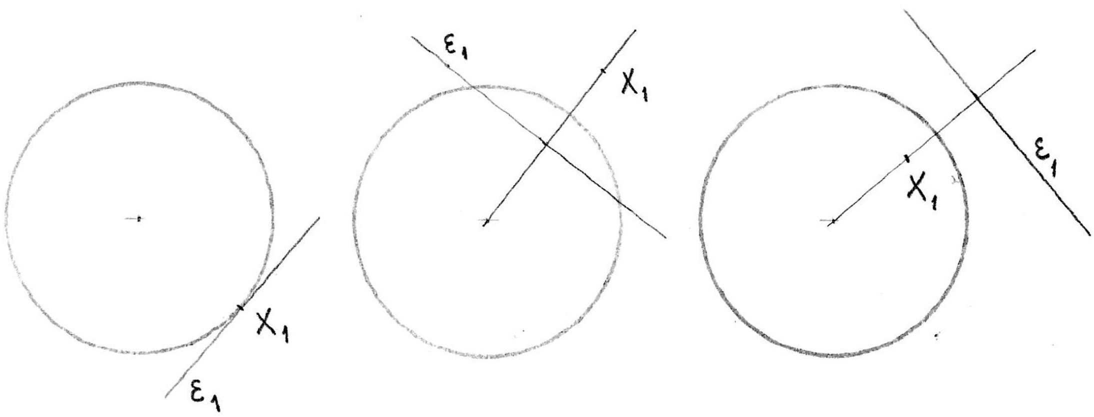
- Εάν $|OX_1| < r$, η ευθεία ε_1 δεν τέμνει τον κύκλο. Από κάθε σδημείο της ε_1 μπορουμε να φέρουμε δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο, με σημεια επαφής X_2 και X_3. Τότε το σημείο X_1 βρίσκεται πάνω στο διάστημα X_2X_3.

Αυτή η αντιστοιχία μεταξύ σημείων του επιπέδου και ευθειών, προσδιορίζει τους πόλους και τις πολικές ευθείες ως προς οποιονδήποτε κύκλο.

Ορισμός 4.2. Θεωρούμε κύκλο K με κέντρο $P : (p, q)$ και ακτίνα r, $K : (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, και σημείο $X_1 : (x_1, y_1)$ διαφορετικό από το P. Η ευθεία με εξίσωση

$$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2 \tag{4.17}$$

ονομάζεται **πολική ευθεία** του σημείου X_1 ως προς τον κύκλο K. Εάν ε_1 είναι ευθεία του επιπέδου που δεν περνάει από το σημείο P, υπάρχει μοναδικό σημείο X_1 τέτοιο ώστε ε_1 είναι η πολική ευθεία του X_1. Το σημείο X_1 ονομάζεται **πόλος** της ευθείας ε_1 ως προς τον κύκλο K.



Σχήμα 4.5: Πόλοι και πολικές ευθείες.

Η πολική ευθεία του σημείου X_1 είναι κάθετη στο διάνυσμα $\overrightarrow{PX_1}$: Η ευθεία με εξίσωση 4.17 έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{u} = (-y_1 + q,\, x_1 - p)$, και $\overrightarrow{PX_1} \cdot \vec{u} = 0$.

Συγκρίνοντας την εξίσωση $Ax + By + C = 0$ της ευθείας ε_1 με την εξίσωση 4.17 της πολικής του σημείου X_1, βλέπουμε οτι

$$\lambda A = x_1 - p\,, \quad \lambda B = y_1 - q\,, \quad -\lambda C = p(x_1 - p) + q(y_1 - q) + r^2\,.$$

Άρα $\lambda(Ap + Bq + C) = -r^2$.

Πρόταση 4.5 *Εάν η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση $Ax + By + C = 0$, ο πόλος X_1 της ε_1 ως προς τον κύκλο $K : (x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ έχει συντεταγμένες*

$$x_1 = p - \frac{Ar^2}{Ap + Bq + C}\,, \qquad y_1 = q - \frac{Br^2}{Ap + Bq + C}\,.$$

4.4 Γωνία τομής δύο κύκλων.

Γωνία μεταξύ δύο τεμνόμενων κύκλων ονομάζουμε τη γωνία φ μεταξύ των εφαπτομένων των κύκλων στα σημεία τομής τους, με προσανατολισμό που προκύπτει από τον προσανατολισμό των κύκλων, Σχήμα 4.6. Βλέπουμε οτι εάν οι δύο κύκλοι έχουν τον ίδιο προσανατολισμό, αυτή είναι ίση με τη γωνία μεταξύ των ακτίνων στο σημείο τομής. Η γωνία είναι 0 όταν οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά και π όταν οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.

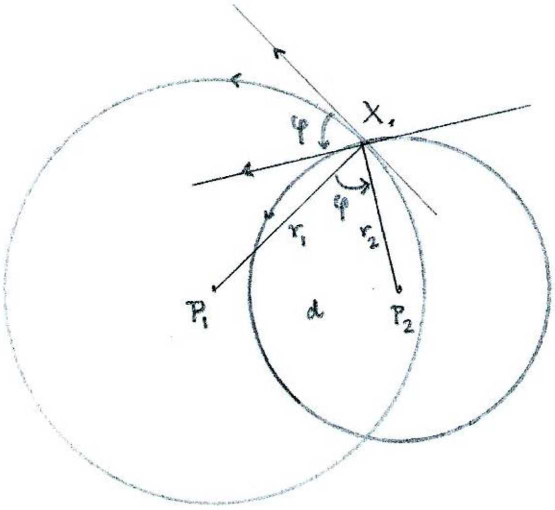
Εάν d είναι η απόσταση μεταξύ των κέντρων των δύο κύκλων, τότε $\cos\varphi$ δίδεται από τον κανόνα του συνημιτόνου, $d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\varphi$,

$$\cos\varphi = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}\,.$$

Όταν $\varphi = \pi/2$, λέμε οτι οι κύκλοι είναι ορθογώνιοι. Δύο κύκλοι είναι ορθογώνιοι εάν $d^2 = r_1^2 + r_2^2$.

4.5 Οικογένειες κύκλων.

Οικογένεια κύκλων θα ονομάζουμε ένα σύνολο κλύκλων που χαρακτηρίζεται από κάποιες γεωμετρικές σχέσεις. Χρησιμοποιώντας αυτές τις σχέ-



Σχήμα 4.6: Η γωνία μεταξύ δύο κύκλων.

σεις, θέλουμε να βρούμε τις εξισώσεις των κύκλων της οικογένειας, που εξαρτώνται από μία ή περισσότερες παραμέτρους.

Παράδειγμα 4.2 Θα βρούμε τις εξισώσεις της οικογένειας κύκλων που περνούν από το σημείο $P : (2, -1)$ και εφάπτονται στην ευθεία $x = -1$. Υποθέτουμε οτι ένας κύκλος της οικογένειας έχει ακτίνα r και κέντρο (x_0, y_0). Αφού το σημείο $(2, -1)$ ανήκει στον κύκλο,

$$r^2 = (2 - x_0)^2 + (1 + y_0)^2 \, .$$

Αφού ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία $x = -1$, η απόσταση του κέντρου από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα, δηλαδή

$$r = x_0 + 1 \, .$$

Καταλήγουμε οτι τα κέντρα των κύκλων που ανήκουν στην οικογένεια, ικανοποιούν τη συνθήκη $(x_0 + 1)^2 = (x_0 - 2)^2 + (y_0 + 1)^2$, δηλαδή

$$6x_0 = y_0^2 + 2y_0 + 4 \, .$$

Άρα ο κύκλος της οικογένειας με κέντρο της μορφής $(\frac{y_0^2}{6} + \frac{y_0}{3} + \frac{2}{3}, \, y_0)$ έχει ακτίνα $r = \frac{y_0^2}{6} + \frac{y_0}{3} + \frac{5}{3}$. Επιλέγουμε ως παράμετρο $t = y_0$, και η εξίσωση της οικογένειας κύκλων είναι

$$\left(x - \left(\frac{t^2}{6} + \frac{t}{3} + \frac{2}{3}\right)\right)^2 + (y-t)^2 = \left(\frac{t^2}{6} + \frac{t}{3} + \frac{5}{3}\right)^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

4.6 Δύναμη σημείου ως προς κύκλο.

Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία γνωρίζουμε οτι για οποιαδήποτε ευθεία από το X_1 τέμνει τον κύκλο στα σημεία X_2, X_3, η ποσότητα $|X_1X_2|\,|X_1X_3|$ είναι σταθερή, και εάν το X_1 βρίσκεται έξω από τον κύκλο, είναι ίση με το τετράγωνο του μήκους της εφαπτομένης από το X_1, $|X_1X_0|^2 = |PX_1|^2 - r^2$.

Θα γενικεύσουμε αυτό τον ορισμό, και θα ορίσουμε για κάθε σημείο $X_1 : (x_1, y_1)$ του επιπέδου, τη **δύναμη** του σημείου X_1 ως προς τον κύκλο με κέντρο P και ακτίνα r,

$$\mathfrak{p} = (x_1 - p)^2 + (y_1 - q)^2 - r^2. \tag{4.18}$$

Θα δείξουμε οτι εάν μία ευθεία από το X_1 τέμνει τον κύκλο στα σημεία X_2 και X_3, η δύναμη του σημείου X_1 ως προς τον κύκλο είναι ίση με το γινόμενο των προσημασμένων μέτρων $(\overrightarrow{X_1X_2})(\overrightarrow{X_1X_3})$.

Για να απλοποιήσουμε τον υπολογισμό επιλέγουμε ως σημείο αναφοράς το κέντρο του κύκλου, ώστε $x_2^2 + y_2^2 = r^2$. Το σημείο X_3 βρίσκεται στην ευθεία X_1X_2 και στον κύκλο. Δηλαδή υπάρχει t για το οποίο $(x_3, y_3) = (x_1, y_1) + t(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ και $x_3^2 + y_3^2 = r^2$. Άρα t ικανοποιεί την εξίσωση

$$\begin{aligned} r^2 &= ((1-t)x_1 + tx_2)^2 + ((1-t)y_1 + ty_2)^2 \\ &= (1-t)^2(x_1^2 + y_1^2) + t^2(x_2^2 + y_2^2) + 2t(1-t)(x_1x_2 + y_1y_2). \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε $x_1^2 + y_1^2 = r^2$, διαιρούμε με $1 - t$ και έχουμε

$$(1-t)(x_1^2 + y_1^2) - (1+t)r^2 + 2t(x_1x_2 + y_1y_2) = 0,$$

από το οποίο βρίσκουμε

$$t = \frac{x_1^2 + y_1^2 - r^2}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{\mathfrak{p}}{|\overrightarrow{X_1X_2}|^2}\,.$$

Άρα $\overrightarrow{X_1X_3} = \dfrac{\mathfrak{p}}{|\overrightarrow{X_1X_2}|^2}\overrightarrow{X_1X_2}$, και

$$\mathfrak{p} = (\overrightarrow{X_1X_2})(\overrightarrow{X_1X_3})\,.$$

Εάν έχουμε δύο κύκλους με εξισώσεις

$$\begin{aligned} (x-p_1)^2 + (y-q_1)^2 &= r_1^2\,, \\ (x-p_2)^2 + (y-q_2)^2 &= r_2^2\,, \end{aligned}$$

ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X που έχουν την ίδια δύναμη ως προς τους δύο κύκλους δίδεται από την εξίσωση

$$(x-p_1)^2 + (y-q_1)^2 - r_1^2 = (x-p_2)^2 + (y-q_2)^2 - r_2^2\,,$$

από την οποία καταλήγουμε στην εξίσωση μίας ευθείας,

$$2(p_1 - p_2)x + 2(q_1 - q_2)y = p_1^2 + q_1^2 - r_1^2 - p_2^2 - q_2^2 + r_2^2\,.$$

Αυτή η ευθεία είναι κάθετη στην ευθεία που περνάει από τα κέντρα των δύο κύκλων, και ονομάζεται **ριζικός άξονας** των δύο κύκλων.

4.7 Δέσμες κύκλων.

Θα εξετάσουμε μία ειδική περίπτωση οικογένειας κύκλων. Θεωρούμε δύο κύκλους K_0 και K_1 με εξισώσεις

$$\begin{aligned} K_0: \quad x^2 + y^2 + A_0x + B_0y + C_0 &= 0\,, \\ K_1: \quad x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ ο γραμμικός συνδυασμός των δύο εξισώσεων

$$(1-\lambda)(x^2 + y^2 + A_0x + B_0y + C_0) + \lambda(x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1) = 0$$

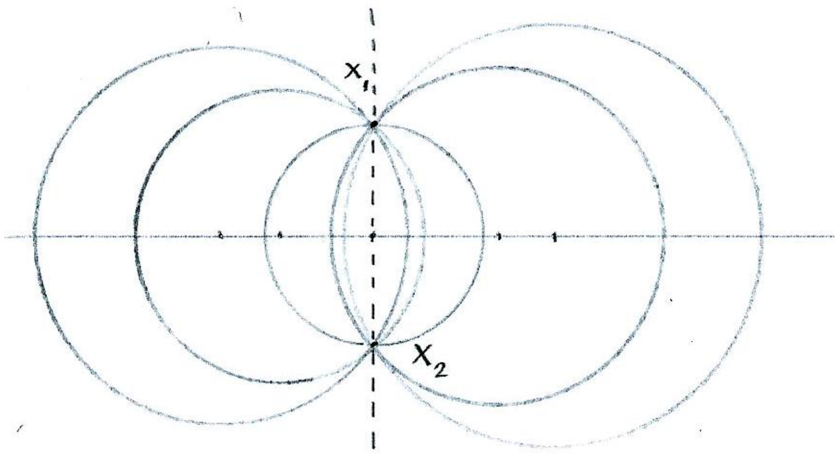
δίδει την εξίσωση

$$K_\lambda: \quad x^2+y^2+((1-\lambda)A_0+\lambda A_1)x+((1-\lambda)B_0+\lambda B_1)y+((1-\lambda)A_0+\lambda A_1)=0\,, \tag{4.19}$$

η οποία παριστάνει έναν κύκλο. Η οικογένεια των κύκλων K_λ για $\lambda \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **δέσμη κύκλων**.

Διακρίνουμε τρία είδη δεσμών κύκλων.

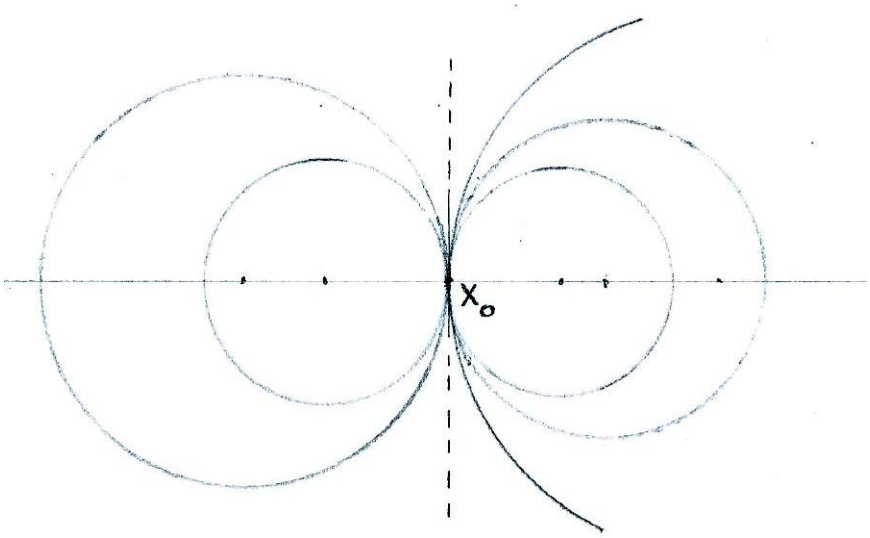
Εάν οι K_0 και K_1 τέμνονται σε δύο σημεία X_1 και X_2, τότε οι συντεταγμένες των X_1 και X_2 ικανοποιούν την 4.19 για κάθε λ. Η δέσμη αποτελείται από όλους τους κύκλους που περνούν από τα σημεία X_1 και X_2, και ονομάζεται **δέσμη τεμνομένων κύκλων** (ή **ελλειπτική δέσμη**), Σχήμα 4.7.



Σχήμα 4.7: Δέσμη τεμνομένων κύκλων.

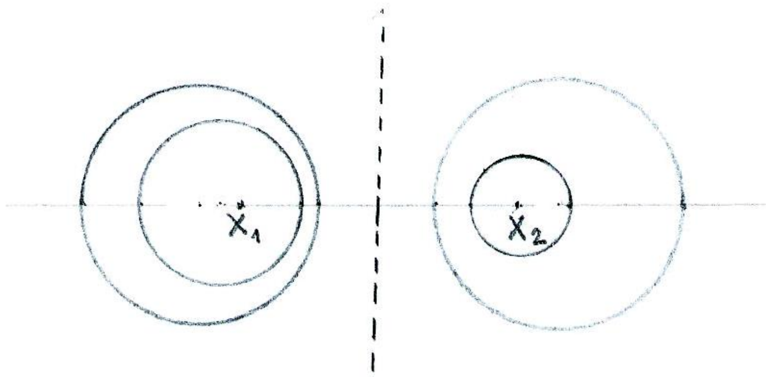
Εάν οι K_0 και K_1 εφάπτονται στο σημείο X_0, τότε X_0 είναι το μοναδικό κοινό σημείο κάθε ζεύγους κύκλων της δέσμης. Η δέσμη ονομάζεται **δέσμη εφαπτομένων κύκλων** (ή **παραβολική δέσμη**), Σχήμα 4.8.

Εάν οι κύκλοι K_0 και K_1 δεν έχουν κοινά σημεία, τότε υπάρχουν σημεία X_0 και X_1 πάνω στην ευθεία των δύο κέντρων P_0P_1, και πραγματικοί αριθμοί μ_0, μ_1, τέτοια ώστε οι κύκλοι K_0 και K_1 είναι Απολλώνιοι κύκλοι του διαστήματος X_0X_1. Δηλαδή, για κάθε σημείο X του K_0, $|X_0X| =$



Σχήμα 4.8: Δέσμη εφαπτομένων κύκλων.

$\mu_0|X_1X|$, και για κάθε σημείο X του K_1, $|X_1X| = \mu_1|X_0X|$. Σε αυτή την περίπτωση η δέσμη ονομάζεται **δέσμη μη τεμνομένων κύκλων** (ή **υπερβολική δέσμη**), Σχήμα 4.9.



Σχήμα 4.9: Δέσμη μη τεμνομένων κύκλων.

Ως ειδική περίπτωση δέσμης μη τεμνομένων κύκλων θεωρούμε τη δέσμη ομόκεντρων κύκλων: Εάν K_0 και K_1 έχουν το ίδιο κέντρο, τότε κάθε κύκλος της δέσμης K_λ θα έχει το ίδιο κέντρο.

Εάν οι δύο κύκλοι K_0 και K_1 δεν είναι ομόκεντροι, τότε ο γραμμικός συνδυασμός

$$(x^2 + y^2 + A_0x + B_0y + C_0) - (x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1) = 0$$

δίδει την εξίσωση μίας ευθείας,

$$K_\infty : \quad (A_0 - A_1)x + (B_0 - B_1)y + C_0 - C_1 = 0\,. \tag{4.20}$$

Αυτή η ευθεία ονομάζεται **ριζικός άξονας** της δέσμης. Ο ριζικός άξονας μίας δέσμης είναι κάθετος στον άξονα των κέντρων των κύκλων της δέσμης.

Πρόταση 4.6 *Ο ριζικός άξονας μίας δέσμης είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων X με την ιδιότητα: Εάν K_λ και K_μ είναι κύκλοι της δέσμης, η δύναμη του σημείου X ως προς τον κύκλο K_λ είναι ίση με τη δύναμη του σημείου X ως προς τον κύκλο K_μ.*

α΄. Σε μία δέσμη τεμνομένων κύκλων, ο ριζικός άξονας είναι η ευθεία X_1X_2 που περιέχει τα σημεία τομής.

β΄. Σε μία δέσμη εφαπτομένων κύκλων, ο ριζικός άξονας είναι η κοινή εφαπτομένη στο X_0 όλων των κύκλων της δέσμης.

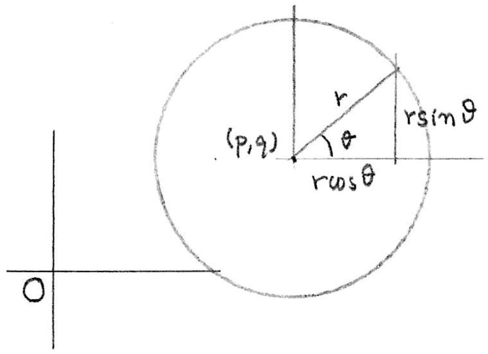
γ΄. Σε μία δέσμη μη τεμνομένων κύκλων, ο ριζικός άξονας είναι η μεσοκάθετος του διαστήματος X_0X_1 των Απολλωνίων κύκλων.

4.8 Παραμετρήσεις του κύκλου.

Εάν ϑ είναι η προσημασμένη γωνία μεταξύ του διανύσματος $\vec{i}$ και της ακτίνας $\overrightarrow{PX}$, Σχήμα 4.10, το σημείο $X : (x,\, y)$ του κύκλου έχει παραμετρική έκφραση

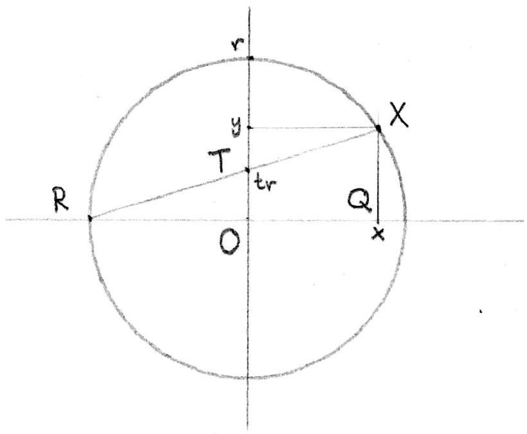
$$(x,\, y) = (p,\, q) + r(\cos\vartheta,\, \sin\vartheta) \quad \text{για } 0 \le \vartheta < 2\pi.$$

Θα δούμε μία εναλλακτική παραμετρική έκφραση, που χρησιμοποιεί μόνο ρητές συναρτήσεις και σχετίζεται με τη στερεογραφική προβολή στη σφαίρα. Θεωρούμε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα r. Από το σημείο $R : (-r,\, 0)$



Σχήμα 4.10: Τριγωνομετρική παραμέτρηση του κύκλου.

σχεδιάζουμε ευθεία που να τέμνει τον κύκλο στο σημείο $(x,\, y)$. Αυτή η ευθεία τέμνει τον Oy-άξονα σε ένα σημείο $T : (0,\, tr)$. Σημειώνουμε και την προβολή του X στον Ox-άξονα, $Q : (x,\, 0)$. Τότε έχουμε δύο όμοια τρίγωνα, RTO και RXQ, Σχήμα 4.11, και $tr : r = y : (x + r)$.



Σχήμα 4.11: Στερεογραφική παραμέτρηση του κύκλου.

Αντικαθιστώντας $y = t(x + r)$ στην 4.2 βρίσκουμε

$$x = r\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\,, \qquad y = r\frac{2t}{1 + t^2}\,.$$

Εάν το κέντρο του κύκλου είναι στο $P : (p,\, q)$, έχουμε την παραμέτρηση

$$(x,\, y) = (p,\, q) + r\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2},\, \frac{2t}{1 + t^2}\right)\,, \quad t \in (-\infty,\, \infty)$$

η οποία δίδει όλα τα σημεία του κύκλου εκτός από το σημείο $(p - r,\, q)$. Αυτό το σημείο είναι το όριο καθώς $t \to \pm\infty$.

4.9 Ασκήσεις

Άσκηση 4.2 Δείξτε οτι η παράμετρος t σχετίζεται με την παράμετρο ϑ του ίδιου σημείου μέσω της

$$t = \frac{\sin\vartheta}{1 + \cos\vartheta}.$$

Άσκηση 4.3 Βρείτε τη συνθήκη ώστε οι κύκλοι με εξισώσεις

$$x^2+y^2+A_1x+B_1y+C_1 = 0\,, \qquad x^2+y^2+A_2x+B_2y+C_2 = 0\,,$$

να εφάπτονται εσωτερικά ή να εφάπτονται εξωτερικά.

Άσκηση 4.4 Βρείτε την εξίσωση της δέσμης κύκλων που περιέχει τον κύκλο $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ και έχει ριζικό άξονα $A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Άσκηση 4.5 Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας κύκλων που έχουν το κέντρο τους στον x-άξονα και περνούν από το σημείο $(-1,\, 2)$.

Άσκηση 4.6 Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας κύκλων που έχουν το κέντρο τους στην ευθεία $y = 2x + 2$ και περνούν από το σημείο $(1,\, -1)$.

Άσκηση 4.7 Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας κύκλων που εφάπτονται στην ευθεία $x = 0$ και περνούν από το σημείο $(2,\, 0)$.

Άσκηση 4.8 Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας κύκλων που εφάπτονται στην ευθεία $y = 2x + 2$ και περνούν από το σημείο $(1,\, -1)$.

Άσκηση 4.9 Βρείτε την εξίσωση της οικογένειας κύκλων που εφάπτονται στην ευθεία $3x + 4y = 10$ και έχουν το κέντρο τους στην ευθεία $y = 2x$.

Άσκηση 4.10 Δείξτε οτι οι κύκλοι με εξίσωση $x^2+y^2+2\lambda x = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ αποτελούν δέσμη κύκλων που εφάπτονται σε ένα σημείο.

Άσκηση 4.11 Δείξτε οτι οι πολικές ευθείες του σημείου (x_1, y_1) ως προς τους κύκλους της δέσμης της Άσκησης 4.10 περνούν από το σημείο $(-x_1, \frac{x_1^2}{y_1})$.

Εβδομάδα 9

4.10 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού στο επίπεδο

Η γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού στο επίπεδο, δηλαδή με δύο αγνώστους, μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0\,, \tag{4.21}$$

όπου A, B, C δεν είναι και τα τρία μηδέν. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ικανοποιούν μία εξίσωση αυτής της μορφής είναι μία **κωνική τομή**, δηλαδή μία καμπύλη που μπορεί να προκύψει ως η τομή ενός επιπέδου με έναν κώνο.

Οι κωνικές τομές περιλαμβάνουν τρία είδη καμπυλών, τις ελλείψεις, τις παραβολές και τις υπερβολές. Θεωρούμε τον κύκλο ως ειδική περίπτωση έλλειψης. Αλλά, όπως είδαμε για την εξίσωση 4.10, μία εξίσωση της μορφής 4.21 μπορεί επίσης να παριστάνει ένα σύστημα δύο ευθειών (που μπορεί να είναι παράλληλες, να τέμνονται ή να συμπίπτουν) ή ένα σημείο ή το κενό σύνολο. Σε αυτές τις περιπτώσεις λέμε οτι έχουμε *εκφυλισμένη* κωνική τομή. Στις επόμενες παραγράφους θα μελετήσουμε τα τρία είδη μη εκφυλισμένων κωνικών τομών.

4.11 Έλλειψη

Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν σταθερό άθροισμα αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία, τα οποία ονομάζουμε εστίες της έλλειψης.

Εάν F_1, F_2 είναι οι εστίες, υποθέτουμε οτι το σημείο αναφοράς είναι το μέσο του διαστήματος F_1F_2, και $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{F_1F_2}}{|\overrightarrow{F_1F_2}|}$. Τότε οι εστίες F_1, F_2 έχουν συντεταγμένες $(-c,\, 0)$ και $(c,\, 0)$ ως προς το $(O,\, \vec{i},\, \vec{j})$. Εάν το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου X της έλλειψης από τα F_1, F_2 είναι $2a$, τότε από την τριγωνική ανισότητα $a > c$, και έχουμε

$$|\overrightarrow{F_1X}| + |\overrightarrow{F_2X}| = 2a\,,$$

δηλαδή $\sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$ απ' όπου παίρνουμε

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2\,,$$

που απλοποιείται σε

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,.$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε $c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2)$, και τελικά

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2 + y^2 = a^2 - c^2\,.$$

Εφ' όσον $a > c$, $a^2 - c^2 > 0$ και εάν θέσουμε $b^2 = a^2 - c^2$, έχουμε την εξίσωση της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{4.22}$$

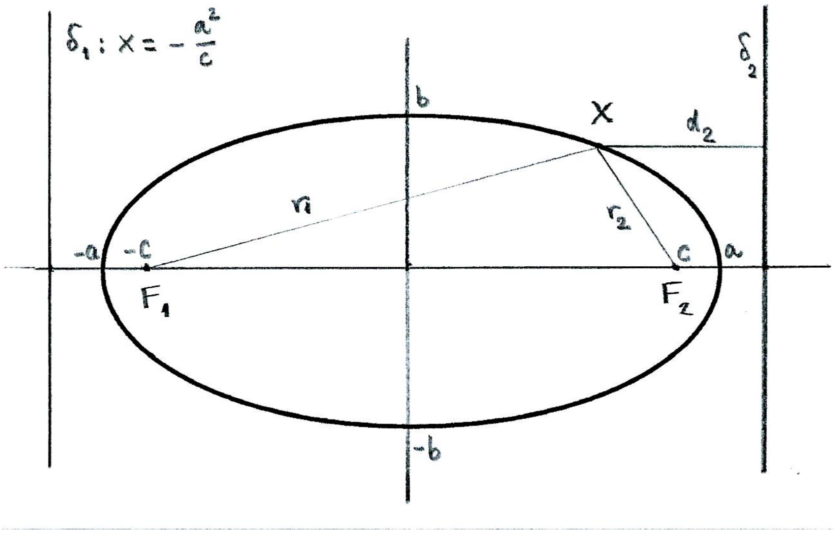
Ως οριακές περιπτώσεις, βλέπουμε οτι για σταθερό a, καθώς c τείνει προς το 0, οι δύο εστίες πλησιάζουν προς το κέντρο και έχουμε έναν κύκλο, $x^2 + y^2 = a^2$, ενώ καθώς c τείνει προς το a, b τείνει στο 0 και η έλλειψη εκφυλίζεται στο ευθύγραμμο τμήμα F_1F_2.

Από την 4.22 έχουμε $|x| \leq a$ και $|y| \leq b$. Άρα η έλλειψη περιέχεται στο ορθογώνιο $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$. Παρατηρούμε επίσης οτι εάν (x, y) ανήκει στην έλλειψη, τότε το ίδιο ισχύει για τα $(-x, y)$, $(x, -y)$ και $(-x, -y)$. Δηλαδή η έλλειψη είναι συμμετρική ως προς τους άξονες $x = 0$, $y = 0$ και ως προς το σημείο αναφοράς O.

Ορισμός 4.3. Ο λόγος $e = \dfrac{c}{a}$ ονομάζεται **εκκεντρότητα** της έλλειψης.
Οι ευθείες

$$\delta_1 : x = -\frac{a^2}{c} \quad \text{και} \quad \delta_2 : x = \frac{a^2}{c}$$

ονομάζονται **διευθετούσες** της έλλειψης.



Σχήμα 4.12: Η έλλειψη.

Θεώρημα 4.7 *Ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου της ελλείψης από μία εστία και την αντίστοιχη διευθετούσα είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα.*

Απόδειξη. Αν X είναι σημείο της έλλείψης και r_1, r_2 οι αποστάσεις του X από τις εστίες F_1, F_2, έχουμε

$$r_1^2 = (x+c)^2 + y^2 \quad , \quad r_2^2 = (x-c)^2 + y^2 \,.$$

Άρα $r_1^2 - r_2^2 = 4cx$, άλλα $r_1 + r_2 = 2a$, άρα $r_1 - r_2 = \dfrac{2cx}{a}$. Δηλαδή

$$r_1 = a + \frac{cx}{a} \quad \text{και} \quad r_2 = a - \frac{cx}{a} \,. \tag{4.23}$$

Η απόσταση του X από τις διευθετούσες είναι

$$d_1 = d(X,\, \delta_1) = \frac{a^2}{c} + x \quad \text{και} \quad d_2 = d(X,\, \delta_2) = \frac{a^2}{c} - x \,,$$

απ' όπου βρίσκουμε οτι

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a^2+cx}{a}\,\frac{c}{a^2+cx} = \frac{c}{a} = e$$

και ανάλογα για $\dfrac{r_2}{d_2}$.

□

Σχετικές θέσεις ευθείας και έλλειψης

Ορισμός 4.4. Μία ευθεία είναι **εφαπτομένη** μίας έλλειψης εάν έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την έλλειψη.

Αν $X_1 : (x_1, y_1)$ και $X_2 : (x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου, και $X : (x, y)$ είναι σημείο της ευθείας X_1X_2, τότε οι συντεταγμένες του X δίδονται από

$$x = \frac{x_1 + tx_2}{1+t} \quad , \quad y = \frac{y_1 + ty_2}{1+t} ,$$

όπου $t = (X_1X_2X)$ είναι ο απλός λόγος $\dfrac{(X_1X)}{(XX_2)}$.

Το σημείο (x, y) ανήκει στην έλλειψη εάν το t ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{(x_1 + tx_2)^2}{a^2(1+t)^2} + \frac{(y_1 + ty_2)^2}{b^2(1+t)^2} = 1 ,$$

ή, αφού $t \neq -1$,

$$\frac{x_1^2 + 2tx_1x_2 + t^2x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2 + 2ty_1y_2 + t^2y_2^2}{b^2} = 1 + 2t + t^2 .$$

Δηλαδή η ευθεία X_1X_2 τέμνει την έλλειψη στα σημεία όπου t είναι ρίζα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης

$$\left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1\right) t^2 + 2\left(\frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} - 1\right) t + \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) = 0 \tag{4.24}$$

Εάν θέσουμε

$$L = \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - 1, \quad M = \frac{x_1x_2}{a^2} + \frac{y_1y_2}{b^2} - 1 \;\text{ και }\; N = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 ,$$

η εξίσωση (4.24) έχει μοναδική ρίζα ακριβώς όταν

$$M^2 - LN = 0 .$$

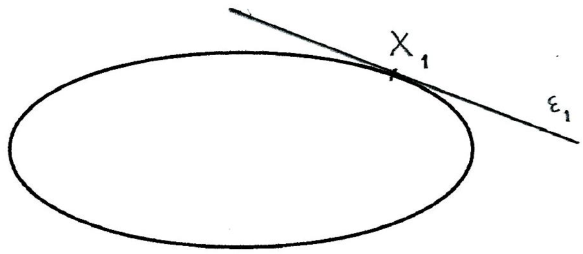
Συνεπώς αυτή είναι ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η ευθεία X_1X_2 εφαπτομένη στην έλλειψη.

Ειδικότερα, όταν X_1 βρίσκεται στην έλλειψη, η συνθήκη γίνεται

$$M = 0$$

και συνεπώς η εξίσωση της εφαπτόμενης της έλλειψης στο σημείο X_1 είναι

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1\,, \text{ όπου } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1\,. \tag{4.25}$$



Σχήμα 4.13: Εφαπτομένη σε έλλειψη.

Εάν το X_1 βρίσκεται έξω από την έλλειψη, τότε $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} > 1$. Με τρόπο ανάλογο προς την περίπτωση του κύκλου (δες σελ. 166, δείχνουμε οτι η εξίσωση

$$\left(\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} - 1\right)^2 - \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0 \tag{4.26}$$

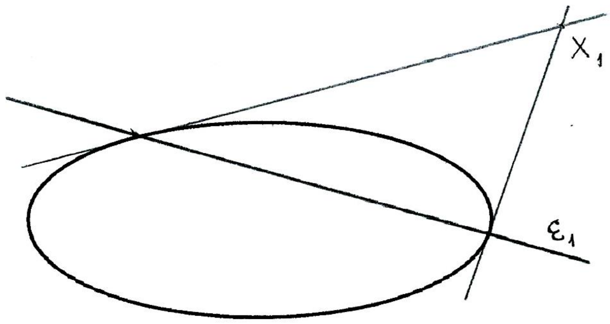
παριστάνει δύο ευθείες που τέμνονται στο X_1 και είναι εφαπτόμενες στην έλλειψη.

Εάν τώρα θεωρήσουμε τα σημεία στα οποία οι ευθείες 4.26 εφάπτονται στην έλλειψη, αυτά ικανοποιούν την 4.26 και την 4.22, και συνεπώς ικανοποιούν την

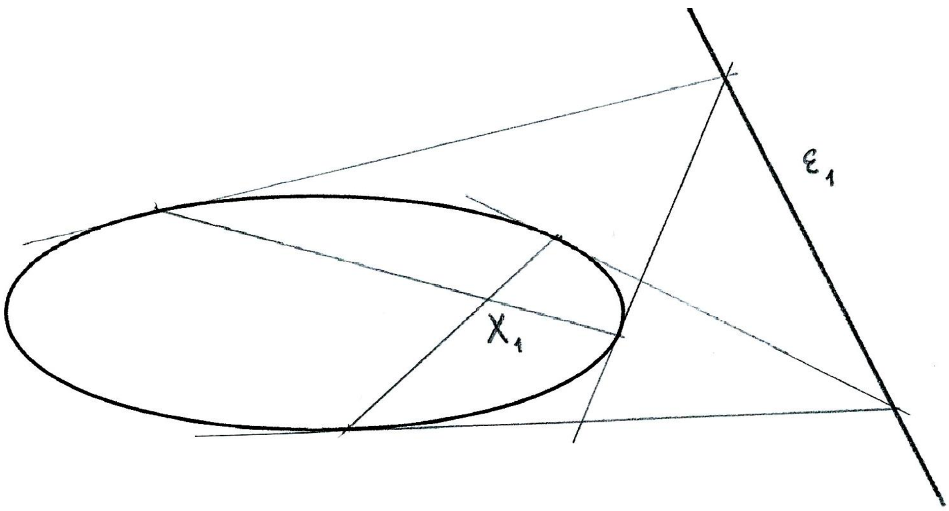
$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1\,, \text{ όπου } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1\,. \tag{4.27}$$

Εάν τέλος θεωρήσουμε το X_1 στο εσωτερικό της έλλειψης, τότε τα σημεία του επιπέδου που ικανοποιούν την

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1\,, \text{ όπου } \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1\,, \tag{4.28}$$



Σχήμα 4.14: Εφαπτόμενες από σημείο έξω από την έλλειψη.



Σχήμα 4.15: Πολική ευθεία σημείου μέσα στην έλλειψη.

αποτελούν μία ευθεία που βρίσκεται ολόκληρη έξω από την έλλειψη.

Ορισμός 4.5. Εάν $X_1 : (x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο διαφορετικό από το O, η **πολική ευθεία** του X_1 ως προς την έλλειψη 4.22 είναι η ευθεία ε_1 με εξίσωση

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1\,.$$

Εάν $\varepsilon_1 : Ax + By + C = 0$ είναι μία ευθεία που δεν περνάει από το O, ο **πόλος** της ε_1 ως προς την έλλειψη 4.22 είναι το σημείο

$$X_1 : \left(-\frac{Aa^2}{C}, -\frac{Bb^2}{C}\right)\,.$$

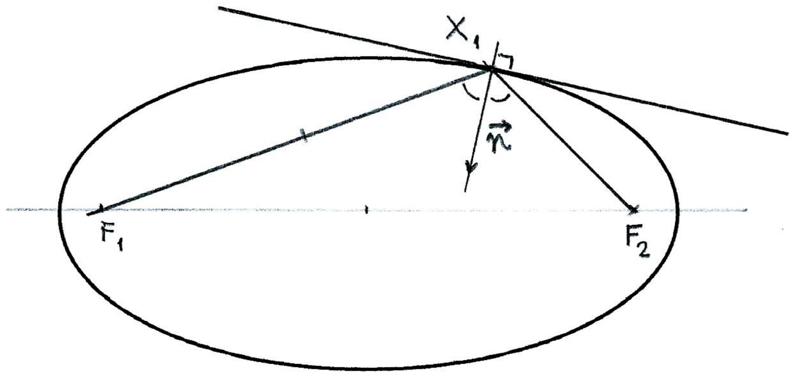
Ακριβώς όπως και στον κύκλο, για κάθε σημείο του επιπέδου $X_1 : (x_1, y_1)$, διαφορετικό από το κέντρο συμμετρίας της έλλειψης, αντιστοιχεί η **πολική ευθεία** ε_1 του σημείου X_1 ως προς την έλλειψη.

- Εάν X_1 ανήκει στην έλλειψη, η ε_1 είναι η εφαπτομένη στην έλλειψη στο σημείο X_1,
- Εάν X_1 βρίσκεται έξω από την έλλειψη, η ε_1 περνάει από τα σημεία επαφής των εφαπτομένων από το X_1 προς την έλλειψη.
- Εάν X_1 βρίσκεται μέσα στην έλλειψη, η ευθεία ε_1 βρίσκεται ολόκληρη έξω από την έλλειψη και αποτελείται από τα σημεία των οποίων η πολική ευθεία περνάει από το X_1.

Γεωμετρικές ιδιότητες της έλλειψης

Θεώρημα 4.8 *Η κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο X_1, διχοτομεί τη γωνία $\angle(\overrightarrow{X_1F_1}, \overrightarrow{X_1F_2})$.*

Απόδειξη. Η εφαπτομένη στο σημείο $X_1 : (x_1, y_1)$ της έλλειψης έχει εξίσωση $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$, άρα ένα κάθετο διάνυσμα είναι το $\vec{n} = -(b^2x_1, a^2y_1)$. Θέλουμε να δείξουμε οτι οι γωνίες $\vartheta_1 = \measuredangle(\overrightarrow{X_1F_1}$ και



Σχήμα 4.16: Κάθετη ευθεία στην εφαπτομένη στην έλλειψη.

$\vartheta_2 = \measuredangle(\overrightarrow{X_1F_2}$ είναι ίσες. Θα υπολογίσουμε τα συνημίτονα,

$$\cos\vartheta_1 = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{X_1F_1}}{|\vec{n}|\,|\overrightarrow{X_1F_1}|} \quad \text{και} \quad \cos\vartheta_2\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{X_1F_2}}{|\vec{n}|\,|\overrightarrow{X_1F_2}|}\,.$$

Έχουμε $\overrightarrow{X_1F_1} = -(x_1 + c,\, y_1)$ και $|\overrightarrow{X_1F_1}| = r_1 = a + \frac{cx_1}{a}$ από την 4.23. Επίσης $\overrightarrow{X_1F_2} = -(x_1 - c,\, y_1)$ και $|\overrightarrow{X_1F_2}| = r_2 = a - \frac{cx_1}{a}$. Συνεπώς $\vec{n}\cdot\overrightarrow{X_1F_1} = a^2b^2 + b^2x_1c$ και $\vec{n}\cdot\overrightarrow{X_1F_2} = a^2b^2 - b^2x_1c$. Άρα

$$\cos\vartheta_1 = \frac{a(a^2b^2 + b^2x_1c)}{|\vec{n}|\,(a^2 + cx_1)} = \frac{ab^2}{|\vec{n}|}$$

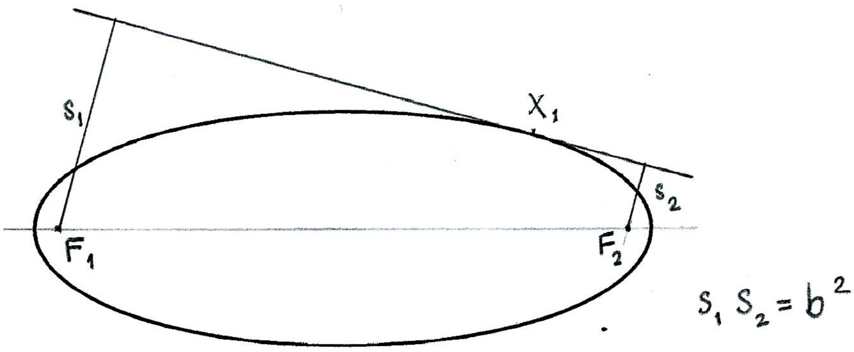
και

$$\cos\vartheta_2 = \frac{a(a^2b^2 - b^2x_1c)}{|\vec{n}|\,(a^2 - cx_1)} = \frac{ab^2}{|\vec{n}|}\,.$$

□

Θεώρημα 4.9 *Το γινόμενο των αποστάσεων των εστιών από μία εφαπτομένη της έλλειψης είναι σταθερό.*

Απόδειξη. Η εφαπτομένη στο σημείο $X_1 : (x_1,\, y_1)$ της έλλειψης έχει εξίσωση $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$, άρα οι αποστάσεις των εστιών $F_1 : (-c,\, 0)$



Σχήμα 4.17: Απόσταση εφαπτομένων από εστίες στην έλλειψη.

και $F_2 : (c,\, 0)$ είναι

$$d(F_1,\, \varepsilon_1) = \frac{|-b^2x_1c - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}} \quad \text{και} \quad d(F_2,\, \varepsilon_1) = \frac{|+b^2x_1c - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_1^2 + a^4y_1^2}}\,.$$

Άρα το γινόμενο είναι

$$\begin{aligned} d(F_1,\, \varepsilon_1)d(F_2,\, \varepsilon_1) &= \frac{b^4(a^2 + x_1c)(a^2 - x_1c)}{b^4x_1^2 + a^4y_1^2} \\ &= \frac{b^4(a^4 - x_1^2c^2)}{b^4x_1^2 + a^4y_1^2} \\ &= \frac{b^4(a^4 - x_1^2(a^2 - b^2)}{b^4x_1^2 + a^4y_1^2} \\ &= \frac{b^2(a^2(b^2x_1^2 + a^2y_1^2) - b^2x_1^2(a^2 - b^2)}{b^4x_1^2 + a^4y_1^2} \\ &= b^2\,. \end{aligned}$$

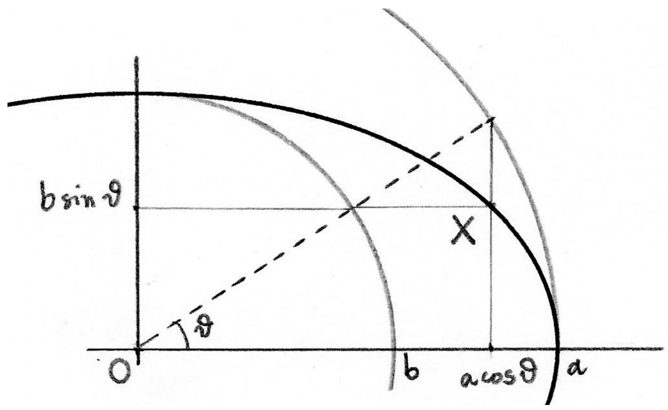
□

Παραμετρική παράσταση έλλειψης

Εύκολα διαπιστώνουμε οτι τα σημεία με συντεταγμένες $(a\cos\vartheta,\, b\sin\vartheta)$ικανοποιούν την εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Πράγματι, για να κατασκευάσουμε ένα σημείο της έλλειψης σχεδιάζουμε δύο ομόκεντρους κύκλους με ακτίνες a και b.

Οι τομές του ημιάξονα που σχηματίζει γωνία ϑ με τον θετικό $x-$ημιάξονα με τους δύο κύκλους δίδουν τις συντεταγμένες ενός σημείου της έλλειψης, Σχήμα 4.18. Η τριγωνομετρική παραμέτρηση της έλλειψης 4.22 είναι

$$(x,\, y) = (a\cos\vartheta,\, b\sin\vartheta)\,, \qquad 0 \leq \vartheta < 2\pi\,.$$



Σχήμα 4.18: Η τριγωνομετρική παραμέτρηση της έλλειψης.

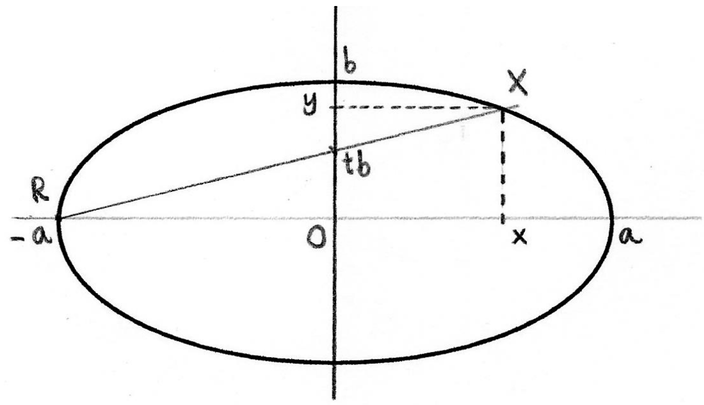
Θεωρούμε το σημείο $R : (-a,\, 0)$ της έλλειψης. Εάν προβάλουμε ένα διαφορετικό σημείο της έλλειψης, από το R στον άξονα $x = 0$, όπως στο Σχήμα 4.19, ορίζεται η παράμετρος t, η οποία ικανοποιεί τη σχέση $tb : a = y : (x + a)$. Για όλα τα σημεία της έλλειψης εκτός από το $(-a,\, 0)$, έχουμε τη στερεογραφική παραμέτρηση, με ρητές συναρτήσεις

$$(x,\, y) = \left(\frac{a(1-t^2)}{1+t^2},\, \frac{2bt}{1+t^2}\right)\,.$$

4.12 Υπερβολή

Υπερβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου με την ιδιότητα οτι η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία είναι σταθερή.

Εάν $F_1,\, F_2$ είναι τα σταθερά σημεία, υποθέτουμε οτι το σημείο αναφοράς είναι το μέσο του διαστήματος F_1F_2, και $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{F_1F_2}}{|\overrightarrow{F_1F_2}|}$. Τότε τα σημεία



Σχήμα 4.19: Η στερεογραφική παραμέτρηση της έλλειψης.

F_1, F_2 έχουν συντεταγμένες $(-c, 0)$ και $(c, 0)$ αντίστοιχα. Αν X είναι ένα σημείο της υπερβολής και

$$\left||\overrightarrow{XF_1}| - |\overrightarrow{XF_2}|\right| = 2a$$

τότε από την τριγωνική ανισότητα $\left||\overrightarrow{XF_1}| - |\overrightarrow{XF_2}|\right| \leq |\overrightarrow{F_1F_2}|$. Εάν $c = a$, τα μόνα σημεία που ικανοποιούν τη συνθήκη είναι οι δύο ημιευθείες $x \geq c$, $y = 0$ και $x \leq c$, $y = 0$. Στη συνέχεια υποθέτουμε οτι $c > a$.

Από τον ορισμό της υπερβολής έχουμε

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

απ' όπου παίρνουμε

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2\,,$$

που απλοποιείται σε

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

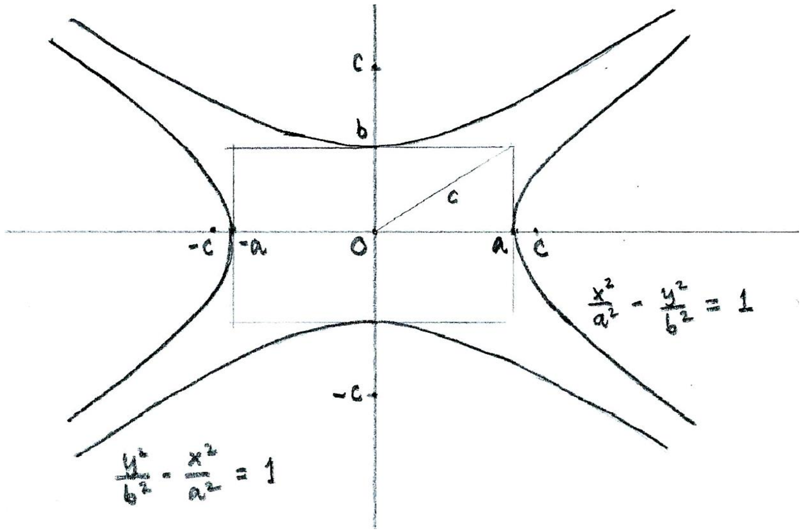
και τελικά

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)\,.$$

Εφ' όσον $c > a$, μπορούμε να θέσουμε $b^2 = c^2 - a^2$, και να καταλήξουμε στην εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,. \tag{4.29}$$

Αφού $\dfrac{x^2}{a^2} - 1 = \dfrac{y^2}{b^2} > 0$, όλα τα σημεία της υπερβολής ικανοποιούν τη σχέση $|x| > a$.



Σχήμα 4.20: Οι συζυγείς υπερβολές $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ και $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Η εξίσωση

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \tag{4.30}$$

παριστάνει επίσης μία υπερβολή, με εστίες τα σημεία $(0, c)$ και $(0, -c)$. Οι υπερβολές 4.29 και 4.30 ονομάζονται **συζυγείς**.

Ο λόγος $e = \dfrac{c}{a}$ ονομάζεται **εκκεντρότητα** της υπερβολής 4.29. Η υπερβολή 4.30 έχει εκκεντρότητα $e' = \dfrac{c}{b}$.

Για την εκκεντρότητα της υπερβολής ισχύει $e > 1$. Θα περιγράψουμε τι συμβαίνει καθώς $e \to 1$ ή $e \to +\infty$.

Εάν θεωρήσουμε τις εστίες σταθερές και το $a \to c$, έτσι ώστε $e \to 1$, τα σημεία της υπερβολής πλησιάζουν τον x-άξονα με την ακόλουθη έννοια: για σταθερό x, καθώς $a \to c$, $y \to 0$. Λέμε οτι η υπερβολή τείνει στις ημιευθείες $|x| \geq c$, $y = 0$, αλλά όχι ομοιόμορφα.

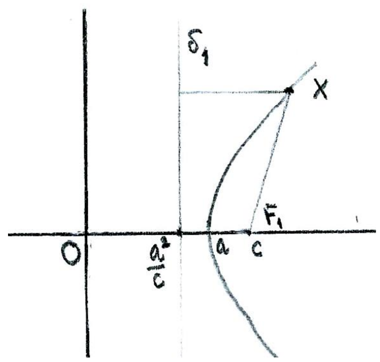
Εάν θεωρήσουμε τις εστίες σταθερές και το $a \to 0$, έτσι ώστε $e \to= \infty$, τα σημεία της υπερβολής πλησιάζουν τον y-άξονα με την ακόλουθη έννοια: για σταθερό y, καθώς $a \to 0$, $\pm x \to 0$. Λέμε οτι η υπερβολή τείνει στην ευθεία $x = 0$, αλλά όχι ομοιόμορφα.

Οι ευθείες

$$\delta_1 \,:\, x = -\frac{a^2}{c} \quad \text{και} \quad \delta_2 \,:\, x = \frac{a^2}{c}$$

ονομάζονται **διευθετούσες** της υπερβολής

Θεώρημα 4.10 *Ο λόγος των αποστάσεων ενός σημείου της υπερβολής από μία εστία και την αντίστοιχη διευθετούσα είναι σταθερός και ίσος προς την εκκεντρότητα της υπερβολής.*



Σχήμα 4.21: Διευθετούσα της υπερβολής.

Απόδειξη. Εάν η υπερβολή έχει εξίσωση 4.29, και r_1, r_2 είναι οι αποστάσεις ενός σημείου $X : (x,\, y)$ από τις εστίες $(-c,\, 0)$ και $(c,\, 0)$ αντίστοιχα, Σχήμα 4.21, έχουμε $r_1^2 = (x+c)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x-c)^2 + y^2$ και από τον ορισμό της υπερβολής, $r_1 - r_2 = \pm 2a$. Άρα $\pm r_1 = \dfrac{cx}{a} + a$ και $\pm r_2 = \dfrac{cx}{a} - a$.

Η απόσταση του X από τις διευθετούσες είναι

$$d_1 = d(X,\, \delta_1) = -\frac{a^2}{c} - x \quad \text{και} \quad d_2 = d(X,\, \delta_2) = \frac{a^2}{c} - x\,,$$

απ' όπου βρίσκουμε οτι

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a^2 + cx}{a}\frac{c}{a^2 - cx} = \frac{c}{a} = e$$

και ανάλογα για $\dfrac{r_2}{d_2}$.

□

Σχετικές θέσεις ευθείας και υπερβολής

Ορισμός 4.6. Μία ευθεία είναι **εφαπτομένη** της υπερβολής $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ εάν έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την υπερβολή και η κλίση της δεν είναι ίση με $\pm\frac{b}{a}$.

Θα δούμε αργότερα γιατί χρειάζεται αυτός ο περιορισμός.

Το σημείο

$$X : (x,\, y) = \left(\frac{x_1 + tx_2}{1+t},\, \frac{y_1 + ty_2}{1+t}\right)$$

της ευθείας που περνάει από τα σημεία $X_1 : (x_1,\, y_1)$ και $X_2 : (x_2,\, y_2)$, βρίσκεται στην υπερβολή εάν το t ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{(x_1 + tx_2)^2}{a^2(1+t)^2} - \frac{(y_1 + ty_2)^2}{b^2(1+t^2)} = 1\,,$$

ή

$$\left(\frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - 1\right)t^2 + 2\left(\frac{x_1x_2}{a^2} - \frac{y_1y_2}{b^2} - 1\right)t + \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right) = 0\,. \tag{4.31}$$

Εάν θέσουμε

$$L = \frac{x_2^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} - 1\,, \quad M = \frac{x_1x_2}{a^2} - \frac{y_1y_2}{b^2} - 1 \ \text{ και } \ N = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1\,,$$

η εξίσωση 4.31 έχει μοναδική ρίζα όταν

$$M^2 - LN = 0 \tag{4.32}$$

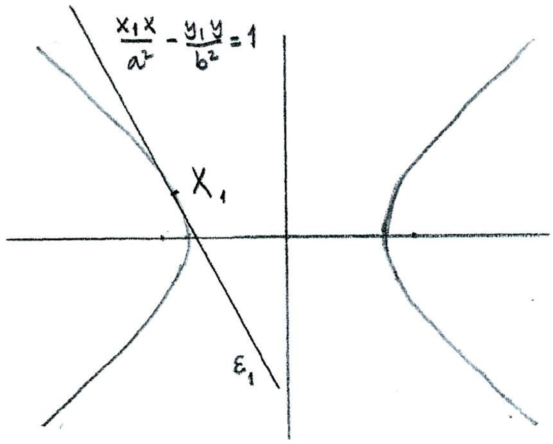
Αυτή είναι αναγκαία συνθήκη για να είναι η ευθεία X_1X_2 εφαπτομένη στην υπερβολή.

Ειδικότερα, όταν X_1 βρίσκεται στην υπερβολή, Σχήμα 4.22, τότε $N = 0$, και η συνθήκη για να είναι η ευθεία X_1X_2 εφαπτομένη γίνεται

$$M = 0$$

. Συμπεραίνουμε οτι το γενικό σημείο X της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο X_1 ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1\,, \text{ όπου } \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1\,. \tag{4.33}$$



Σχήμα 4.22: Εφαπτομένη στην υπερβολή στο σημείο X_1.

Ορισμός 4.7. Εάν $X_1 : (x_1, y_1)$ είναι ένα σημείο διαφορετικό από το O, η **πολική ευθεία** του X_1 ως προς την υπερβολή 4.29 είναι η ευθεία ε_1 με εξίσωση

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1\,.$$

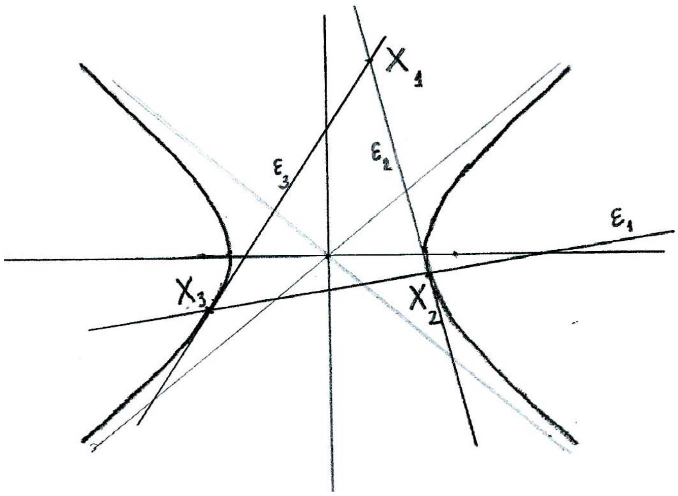
Εάν $\varepsilon_1 : Ax + By + C = 0$ είναι μία ευθεία που δεν περνάει από το O, ο **πόλος** της ε_1 ως προς την υπερβολή 4.29 είναι το σημείο

$$X_1 : \left(-\frac{Aa^2}{C}, \frac{Bb^2}{C}\right)\,.$$

Εάν το X_1 βρίσκεται μεταξύ των δύο κλάδων της υπερβολής, δηλαδή όταν $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, το γενικό σημείο X της εφαπτομένης προς την υπερβολή από το σημείο X_1 ικανοποιεί την εξίσωση

$$\left(\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} - 1\right)^2 - \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right) = 0 \tag{4.34}$$

η οποία παριστάνει δύο ευθείες που τέμνονται στο X_1. Εάν $y_1 \neq \pm\frac{b}{a}x_1$, τότε οι δύο ευθείες εφάπτονται στην υπερβολή, Σχήμα 4.23. Η πολική ευθεία ε_1 του σημείου X_1 περνάει από τα σημεία στα οποία εφάπτονται οι εφαπτόμενες της υπερβολής από το σημείο X_1.



Σχήμα 4.23: Εφαπτόμενες στην υπερβολή από το σημείο X_1.

Εάν $X_1 = (0, 0)$, η εξίσωση 4.34 γίνεται

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

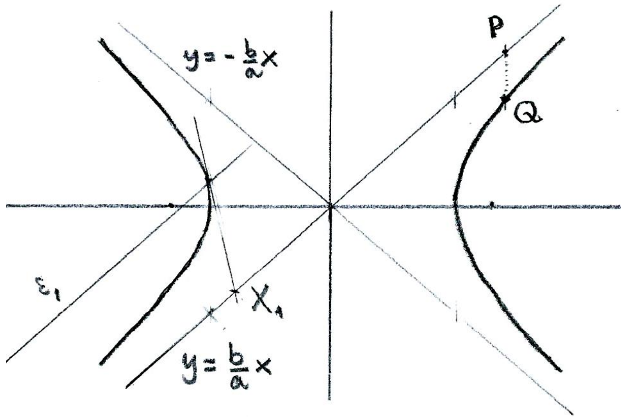
που είναι η εξίσωση δύο ευθειών $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Ορισμός 4.8. Οι ευθείες $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ είναι οι **ασύμπτωτες** της υπερβολής 4.29.

Θεωρούμε ένα σημείο $P : \left(x, \frac{bx}{a}\right)$ πάνω στην ευθεία $y = \frac{b}{a}x$, και το σημείο $Q : \left(x, \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right)$ το οποίο βρίσκεται πάνω στην υπερβολή, Σχήμα 4.24. Η απόσταση μεταξύ του σημείου στην υπερβολή και του αντίστοιχου σημείου πάνω στην ευθεία είναι

$$|\overrightarrow{PQ}| = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})}{a} = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\,.$$

Έτσι καθώς $x \to \infty$ τα σημεία $\left(x,\, \frac{bx}{a}\right)$ και $\left(x,\, -\frac{bx}{a}\right)$ πλησιάζουν τα $\left(x,\, \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)$ και $\left(x,\, -\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)$ αντίστοιχα, ενώ καθώς $x \to -\infty$ τα σημεία $\left(x,\, \frac{bx}{a}\right)$ και $\left(x,\, -\frac{bx}{a}\right)$ πλησιάζουν τα $\left(x,\, -\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)$ και $\left(x,\, \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)$ αντίστοιχα .



Σχήμα 4.24: Ασύμπτωτες της υπερβολής.

Εάν X_1 βρίσκεται πάνω σε μία από τις ασύμπτωτες, $y_1 = \pm\frac{b}{a}x_1$, αλλά $x_1 \neq 0$, τότε η μία ευθεία που ικανοποιεί την εξίσωση 4.34 είναι η ασύμπτωτη και η άλλη η εφαπτομένη στην υπερβολή. Η πολική ευθεία του X_1 σε αυτή την περίπτωση είναι παράλληλη προς την ασύμπτωτη και τέμνει την υπερβολή στο σημείο επαφής της εφαπτομένης από το X_1, Σχήμα 4.24. Παρατηρούμε οτι ευθείες παράλληλες προς τις ασύμπτωτες τέμνουν την υπερβολή σε ένα σημείο αλλά δεν είναι εφαπτόμενες.

Πρόταση 4.11 *Η κλίση λ μίας εφαπτομένης της υπερβολής 4.29 ικανοποιεί*

$$|\lambda| > \frac{b}{a}\,.$$

Εάν το σημείο X_1 βρίσκεται μεταξύ της υπερβολής και των ασυμπτώτων, δηλαδή εάν $0 < \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} < 1$, τότε οι δύο εφαπτόμενες προς την υπερβολή από το X_1 εφάπτονται στον ίδιο κλάδο της υπερβολής.
Εάν $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} < 0$ τότε οι δύο εφαπτόμενες προς την υπερβολή από το X_1 εφάπτονται σε διαφορετικούς κλάδους της υπερβολής.

Απόδειξη. Εάν X_1 βρίσκεται στην υπερβολή, από τις 4.29 και 4.33 έχουμε $y - y_1 = \dfrac{b^2 x_1}{y_1 a^2}(x - x_1)$, δηλαδή $\lambda = \dfrac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$. Αλλά

$$\left|\frac{x_1}{y_1}\right| = \sqrt{\frac{a^2}{y_1^2} + \frac{a^2}{b^2}} > \frac{a}{b}\,,$$

άρα $|\lambda > \dfrac{b}{a}$.

Τώρα θεωρούμε X_1 το οποίο βρίσκεται μεταξύ της υπερβολής και των ασυμπτώτων, δηλαδή $0 < \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} < 1$, και υποθέτουμε οτι $x_1 > 0$. Δείχνουμε οτι εάν X_2 βρίσκεται στην υπερβολή και $x_2 < 0$, τότε

$$\left|\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right| < \frac{b}{a}\,,$$

άρα μία ευθεία από το X_1 στο X_2 δεν μπορεί να είναι εφαπτομένη της υπερβολής.

$\square$

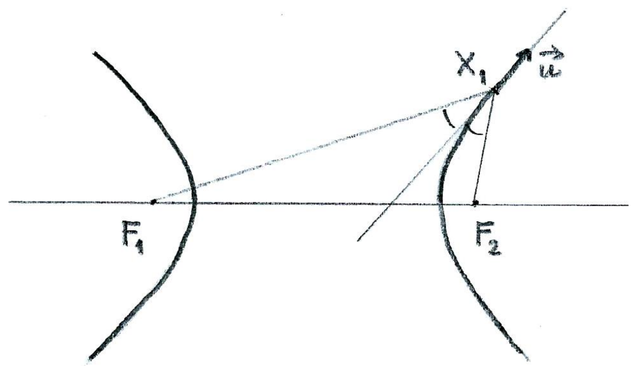
Εάν X_1 ικανοποιεί την $\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2} > 1$, δεν υπάρχουν εφαπτόμενες στην υπερβολή από το X_1. Όλα τα σημεία της πολικής ευθείας $\varepsilon_1 : \dfrac{x_1 x}{a^2} - \dfrac{y_1 y}{b^2} = 1$ του σημείου X_1 βρίσκονται μεταξύ των δύο κλάδων της υπερβολής, δηλαδή ικανοποιούν την $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} < 1$. Κάθε σημείο της ε_1 είναι πόλος μίας ευθείας που περνάει από το X_1.

Γεωμετρικές ιδιότητες της υπερβολής.

Θεώρημα 4.12 *Η εφαπτομένη στην υπερβολή σε ένα σημείο X_1 διχοτομεί τη γωνία $\angle(\overrightarrow{X_1F_1}, \overrightarrow{X_1F_2})$.*

Απόδειξη. Η εφαπτομένη 4.33 έχει διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{u} = \left(\dfrac{y_1}{b^2}, \dfrac{x_1}{a^2}\right)$, Σχήμα 4.25. Θα δείξουμε οτι το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ του $\vec{u}$ και των $\overrightarrow{X_1F_1} = -(x_1 + c,\, y_1)$, $\overrightarrow{X_1F_2} = -(x_1 - c,\, y_1)$ είναι ίσο. Έχουμε

$$\frac{\vec{u} \cdot \overrightarrow{X_1F_1}}{|\overrightarrow{X_1F_1}|} = -\frac{(x_1 + c)\frac{y_1}{b^2} + \frac{x_1 y_1}{a^2}}{\frac{c}{a} x_1 + a}\,,$$



Σχήμα 4.25: Η διχοτόμος της γωνίας μεταξύ των εστιακών ακτίνων της υπερβολής.

και

$$\frac{\vec{u}\cdot\overrightarrow{X_1F_2}}{|\overrightarrow{X_1F_2}|} = -\frac{(x_1-c)\frac{y_1}{b^2}+\frac{x_1y_1}{a^2}}{\frac{c}{a}x_1-a}\,.$$

Δείχνουμε οτι και τα δύο είναι ίσα με $\dfrac{cy_1}{ab^2}$. Για παράδειγμα,

$$\begin{aligned}(x_1+c)\frac{y_1}{b^2}+\frac{x_1y_1}{a^2} &= x_1y_1\left(\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}\right)+\frac{cy_1}{b^2}\\ &= \frac{x_1y_1c^2}{a^2b^2}+\frac{cy_1}{b^2}\\ &= \frac{cy_1}{ab^2}\left(\frac{c}{a}x_1+a\right).\end{aligned}$$

□

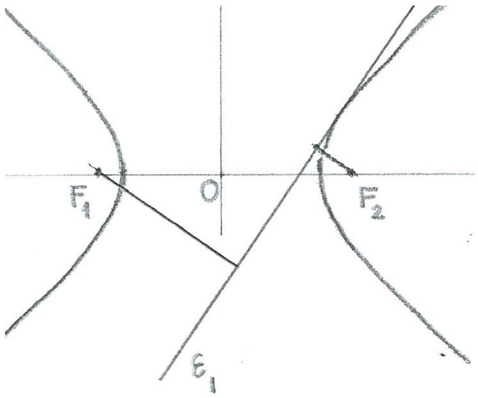
Θεώρημα 4.13 *Το γινόμενο των προσημασμένων αποστάσεων των εστιών της υπερβολής από μία εφαπτομένη είναι σταθερό, και ίσο με $-b^2$.*

Απόδειξη. θεωρούμε σημείο X_1 της υπερβολής 4.29 και την εφαπτομένη ε_1 στο X_1, με εξίσωση 4.33, Σχήμα 4.26. Τότε

$$d(F_1,\,\varepsilon_1) = \frac{-\frac{x_1c}{a^2}-1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}}}\,,$$

και

$$d(F_2,\,\varepsilon_1) = \frac{\frac{x_1c}{a^2}-1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}}}\,.$$



Σχήμα 4.26: Οι αποστάσεις των εστιών από την εφαπτομένη υπερβολής.

Υπολογίζουμε το γινόμενο και χρησιμοποιούμε την 4.29 για να βρούμε

$$\begin{aligned} d(F_1, \varepsilon_1)d(F_2, \varepsilon_1) &= \frac{1-\frac{x_1^2c^2}{a^4}}{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}} \\ &= \frac{a^4b^4 - b^4c^2x_1^2}{b^4x_1^2 + a^4y_1^2} \\ &= \frac{a^4b^2 - b^2(a^2+b^2)x_1^2}{b^4x_1^2 + a^2b^2x_1^2 - a^4b^2} b^2 = -b^2\,. \end{aligned}$$

□

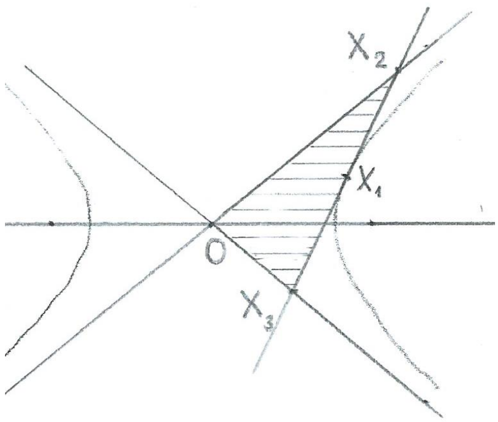
Θεώρημα 4.14 *Το τρίγωνο που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτες και μία εφαπτομένη έχει σταθερό εμβαδόν, ίσο με ab.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την εφαπτομένη ε_1 στο σημείο X_1 της υπερβολής, με εξίσωση 4.33, Σχήμα 4.27. Τα σημεία τομής της ε_1 με τις ασύμπτωτες $y = \pm bx/a$ είναι τα

$$(x_2,\, y_2) = \left(\frac{a^2b}{bx_1 - ay_1},\, \frac{ab^2}{bx_1 - ay_1}\right), \qquad (x_3,\, y_3) = \left(\frac{a^2b}{bx_1 + ay_1},\, \frac{-ab^2}{bx_1 + ay_1}\right).$$

Το τρίγωνο OX_2X_3 έχει εμβαδόν

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\overrightarrow{OX_2} \times \overrightarrow{OX_3}| &= \frac{1}{2}|x_2y_3 - y_2x_3| \\ &= \frac{a^3b^3}{|b^2x_1^2 - a^2y_1^2|} = ab\,, \end{aligned}$$



Σχήμα 4.27: Τρίγωνο από ασύμπτωτες και εφαπτομένη υπερβολής.

αφού $b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2$ για X_1 στην υπερβολή.

□

Παραμετρική παράσταση υπερβολής

Ορίζουμε τις συναρτήσεις **υπερβολικό συνημίτονο** και **υπερβολικό ημίτονο**

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \qquad \sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ικανοποιούν την ταυτότητα

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1\,.$$

Συγκρίνοντας την εξίσωση της υπερβολής $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ με την υπερβολική τριγωνομετρική ταυτότητα $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$, βλέπουμε οτι μία παραμετρική παράσταση της υπερβολής είναι η

$$(x,\, y) = (a\cosh s,\, b\sinh s)\,, \quad s \in \mathbb{R}$$

για τον δεξιό κλάδο, όπου $x > 0$, και

$$(x,\, y) = (-a\cosh s,\, b\sinh s)\,, \quad s \in \mathbb{R}$$

για τον αριστερό κλάδο, όπου $x < 0$.

Εάν αντικαταστήσουμε $t = e^s$, και χρησιμοποιήσουμε τις ταυτότητες $\cosh s = \frac{1}{2}(e^s + e^{-s})$ και $\sinh s = \frac{1}{2}(e^s - e^{-s})$, έχουμε μία παραμετρική παράσταση της υπερβολής με ρητές συναρτήσεις

$$(x,\, y) = \left(\frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right),\, \frac{b}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right)\,, \quad t \in \mathbb{R}\ \{0\}.$$

4.13 Ασκήσεις

Άσκηση 4.12 Επαληθεύσατε οτι τα σημεία που δίδουν οι δύο παραμετρήσεις βρίσκονται πάνω στην έλλειψη. Βρείτε τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων t και ϑ.

Εβδομάδα 10

4.14 Παραβολή

Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που απέχουν ίση απόσταση από ένα σταθερό σημείο και μία σταθερή ευθεία. Το σταθερό σημείο ονομάζεται **εστία** της παραβολής και η ευθεία **διευθετούσα** της παραβολής.

Εάν F είναι η εστία και δ η διευθετούσα, θεωρούμε ως σημείο αναφοράς το μέσο του κάθετου διαστήματος από το F στην δ, και θέτουμε $\vec{i} = \dfrac{\overrightarrow{OF}}{|OF|}$.

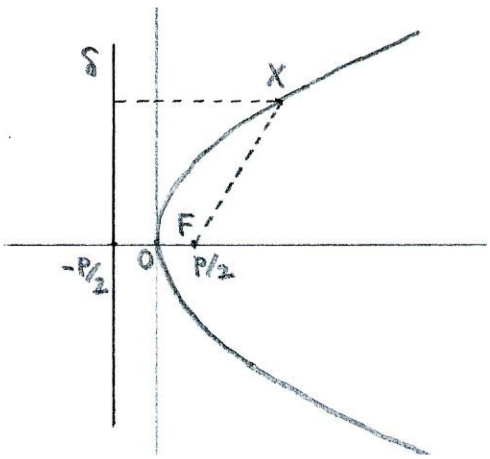
Τότε το σημείο F έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2},\, 0\right)$, και η ευθεία δ εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$.

Εάν $X : (x,\, y)$ είναι ένα σημείο της παραβολής, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} &= x + \frac{p}{2} \\ \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 , \end{aligned}$$

απ' όπου παίρνουμε την εξίσωση της παραβολής

$$y^2 = 2px \qquad (4.35)$$



Σχήμα 4.28: Η παραβολή.

Η παραβολή είναι συμμετρική ως προς την ευθεία $y = 0$, αλλά δεν έχει κέντρο συμμετρίας.

Ορισμός 4.9. Μία ευθεία είναι **εφαπτομένη** μίας παραβολής εάν έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με την παραβολή και δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής.

Το γενικό σημείο της ευθείας που περνάει από τα σημεία $X_1 : (x_1, y_1)$ και $X_2 : (x_2, y_2)$ έχει συντεταγμένες

$$x = \frac{x_1 + tx_2}{1+t}, \quad y = \frac{y_1 + ty_2}{1+t}, \quad t \neq -1 .$$

Η ευθεία X_1X_2 τέμνει την παραβολή στα σημεία για τα οποία η παράμετρος t ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{(y_1 + ty_2)^2}{(1+t)^2} = 2p\frac{x_1 + tx_2}{1+t},$$

ή

$$(y_2^2 - 2px_2)t^2 + 2(y_1y_2 - p(x_1 + x_2))t + y_1^2 - 2px_1 = 0 . \qquad (4.36)$$

Θέτουμε

$$L = y_2^2 - 2px_2, \quad M = y_1y_2 - p(x_1 + x_2), \quad N = y_1^2 - 2px_1 .$$

Η εξίσωση 4.36 έχει μοναδική ρίζα όταν

$$M^2 - LN = 0 \qquad (4.37)$$

Αυτή είναι αναγκαία συνθήκη για να είναι η ευθεία X_1X_2 εφαπτομένη της παραβολής.

Όταν το X_1 βρίσκεται στην παραβολή, η συνθήκη γίνεται

$$M = 0$$

και η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο X_1 είναι

$$y_1y = p(x_1 + x), \quad \text{όπου } y_1^2 = 2px_1 .$$

Όταν X_1 βρίσκεται στο κοίλο μέρος της παραβολής, $y_1^2 > 2px_1$, η συνθήκη 4.37 γίνεται

$$(y_1 y - p(x_1 + x))^2 - (y_1^2 - 2px_1)(y^2 - 2px) = 0$$

και παριστάνει δύο ευθείες, εφαπτόμενες στην παραβολή και τεμνόμενες στο X_1. Η ευθεία που περνάει από τα σημεία επαφής των δύο εφαπτομένων, είναι η πολική ευθεία του σημείου X_1, και έχει εξίσωση

$$y_1 y = p(x_1 + x)\,, \quad \text{όπου } y_1^2 > 2px_1\,.$$

Όταν X_1 βρίσκεται στο κυρτό μέρος της παραβολής, $y_1^2 < 2px_1$, δεν υπάρχουν εφαπτόμενες στην παραβολή από το X_1. Η πολική ευθεία του σημείου X_1, έχει εξίσωση

$$y_1 y = p(x_1 + x)\,, \quad \text{όπου } y_1^2 < 2px_1\,,$$

και αποτελείται από τα σημεία των οποίων η πολική ευθεία περνάει από το X_1.

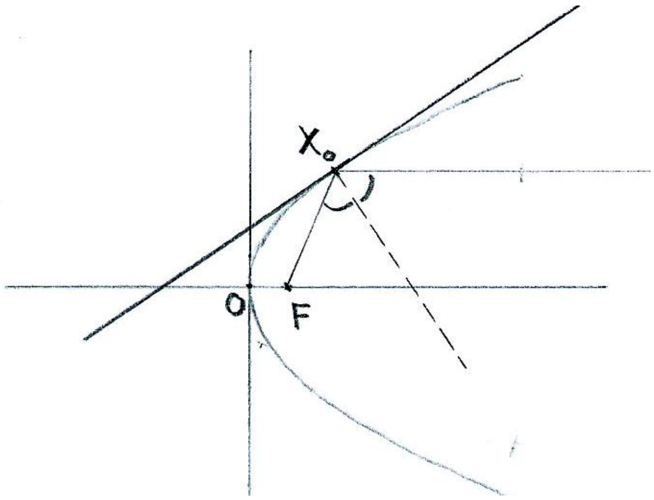
Θεώρημα 4.15 *Η κάθετη προς την εφαπτομένη σε ένα σημείο X_0 της παραβολής διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζεται από την εστιακή ακτίνα X_0F και την ευθεία που περνάει από το X_0 και είναι παράλληλη προς τον άξονα παραβολής.*

Απόδειξη. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο X_0 έχει εξίσωση $y_0 y = p(x_0 + x)$, και επομένως ένα κάθετο διάνυσμα είναι το $\vec{n} = (p, -y_0)$. Θέλουμε να δείξουμε οτι οι γωνίες $\vartheta_1 = \angle(\vec{n}, \overrightarrow{X_0F})$ και $\vartheta_2 = \angle(\vec{n}, \overrightarrow{OF})$ είναι ίσες. Έχουμε $\overrightarrow{X_0F} = (\frac{p}{2} - x_0, -y_0)$ και $\overrightarrow{OF} = (\frac{p}{2}, 0)$. Υπολογίζουμε τα συνημίτονα,

$$\cos\vartheta_1 = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{X_0F}}{|\vec{n}|\,|X_0F|} = \frac{p(\frac{p}{2} - x_0) + y_0^2}{|\vec{n}|\sqrt{(\frac{p}{2} - x_0)^2 + y_0^2}}$$

και

$$\cos\vartheta_2 = \frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{OF}}{|\vec{n}|\,|\overrightarrow{OF}|} = \frac{p^2/2}{|\vec{n}|p/2} = \frac{p}{|\vec{n}|}\,.$$



Σχήμα 4.29: Ανακλαστική ιδιότητα παραβολής.

Αφού $y_0^2 = 2px_0$, $p(\frac{p}{2}-x_0)+y_0^2 = p(\frac{p}{2}+x_0)$ και $(\frac{p}{2}-x_0)^2+y_0^2 = (\frac{p}{2}+x_0)^2$. Άρα

$$\frac{p(\frac{p}{2}-x_0)+y_0^2}{|\vec{n}|\sqrt{(\frac{p}{2}-x_0)^2+y_0^2}} = \frac{p}{|\vec{n}|}\,.$$

□

Παραμετρική παράσταση παραβολής

Εάν θέσουμε $t = \frac{y}{2p}$, τότε η παραβολή 4.35 έχει την παραμετρική παράσταση

$$(x,\,y) = 2p(t^2,\,t)\,.$$

4.15 Γενική εξίσωση κωνικής τομής

Θα συμπληρωθεί

Κεφάλαιο 5

Επιφάνειες στο χώρο

Επιφάνειες στο χώρο μπορούν να περιγραφούν με πολλούς τρόπους. Η μελέτη τους αποτελεί αντικείμενο της Διαφορικής Γεωμετρίας. Σε αυτό το μάθημα θα μελετήσουμε κάποιες ιδιότητες της σφαίρας και θα δούμε ορισμένα παραδείγματα άλλων κατηγοριών επιφανειών, όπως τις επιφάνειες δευτέρου βαθμού και τις επιφάνειες εκ περιστροφής.

Εβδομάδα 11

5.1 Η σφαίρα

Η επιφάνεια της σφαίρας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου E^3 που απέχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο K : $(a,\, b,\, c)$.

Το γενικό σημείο $X : (x,\, y,\, z)$ της σφαίρας ικανοποιεί την εξίσωση

$$|KX| = r$$

ή

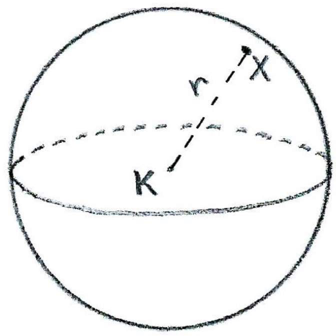
$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 - r^2 = 0\,. \tag{5.1}$$

Όταν αναπτύξουμε τα τετράγωνα έχουμε

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0\,.$$

Θέτουμε $A = -2a$, $B = -2b$, $C = -2c$ και $D = a^2 + b^2 + c^2 - r^2$ και έχουμε εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0\,. \tag{5.2}$$



Σχήμα 5.1: Η σφαίρα με κέντρο K και ακτίνα r.

Θα δείξουμε οτι, αντίστροφα, κάθε εξίσωση αυτής της μορφής παριστάνει σφαίρα εάν

$$4D < A^2 + B^2 + C^2\,.$$

Πράγματι, $r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - D$, το οποίο είναι θετικό $D < a^2 + b^2 + c^2$, δηλαδή $4D < A^2 + B^2 + C^2$.

Εάν X_1, X_2, X_3 X_4 είναι τέσσερα σημεία με συντεταγμένες $(x_i,\, y_i,\, z_i)$, $i = 1, \ldots, 4$, αυτά βρίσκονται σε μία σφαίρα με συντελεστές A, B, C, D εάν

$$\begin{aligned}
x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D &= 0 \\
x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 + Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D &= 0 \\
x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 + Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D &= 0 \\
x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 + Ax_4 + By_4 + Cz_4 + D &= 0\,,
\end{aligned}$$

και το γενικό σημείο $X : (x,\, y,\, z)$ αυτής της σφαίρας ικανοποιεί την εξίσωση

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0\,.$$

Έχουμε λοιπόν το σύστημα των 5 εξισώσεων, το οποίο έχει μη μηδενικές λύσεις εάν η ορίζουσα

$$\begin{vmatrix}
x^2 + y^2 + z^2 & x & y & z & 1 \\
x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\
x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\
x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\
x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1
\end{vmatrix} = 0\,. \tag{5.3}$$

Αυτή η σχέση δίδει την εξίσωση της σφαίρας που περνάει από τα σημεία X_1, X_2, X_3 X_4, εάν ο συντελεστής του $x^2 + y^2 + z^2$ είναι διαφορετικός από το μηδέν. Αυτός ο συντελεστής είναι ο συμπαράγων C_{11}, ο οποίος είναι διαφορετικός από το μηδέν ακριβώς όταν τα σημεία X_1, X_2, X_3 X_4 δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

Σχετικές θέσεις σφαίρας και επιπέδου

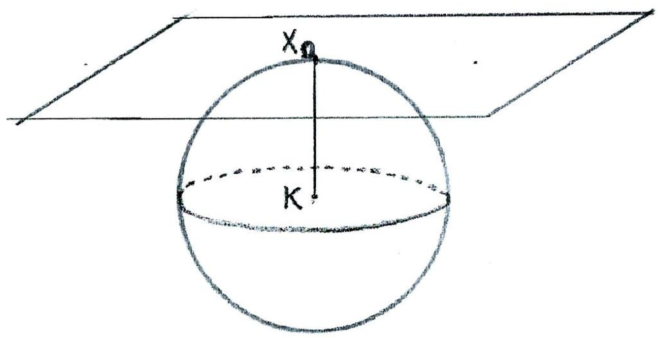
Η τομή μίας σφαίρας και ενός επιπέδου στο E^3 είναι ένας κύκλος εάν η απόσταση του επιπέδου από το κέντρο της σφαίρας είναι μικρότερη από

r. Έτσι το επίπεδο $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ τέμνει τη σφαίρα $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ σε έναν κύκλο εάν

$$d(\Pi,\, K)^2 = \frac{(Aa + Bb + Cc + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2} < r^2\,.$$

Εάν $d(\Pi,\, K) = r$, τότε το επίπεδο έχει ακριβώς ένα κοινό σημείο με τη σφαίρα και είναι εφαπτόμενο επίπεδο της σφαίρας. Το σημείο επαφής $X_0 : (x_0,\, y_0,\, z_0)$ είναι η κάθετη προβολή του K στο επίπεδο Π: το πρόσημο εξαρτάται από το D έτσι ώστε το X_0 να ανήκει στο Π,

$$\overrightarrow{KX_0} = \frac{\pm r}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}(A,\, B,\, C)\,.$$



Σχήμα 5.2: Το εφαπτόμενο επίπεδο στη σφαίρα, στο σημείο X_0.

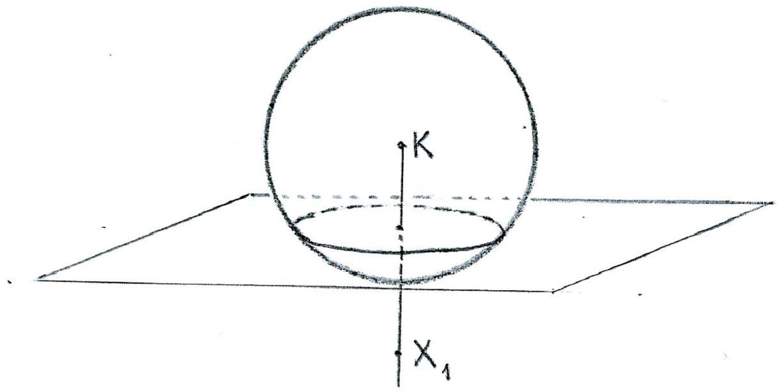
Αντίστροφα, εάν $X_0 : (x_0,\, y_0,\, z_0)$ είναι σημείο της σφαίρας, το επίπεδο που εφάπτεται στη σφαίρα στο X_0 είναι κάθετο στο $\overrightarrow{KX_0}$, άρα το γενικό σημείο του εφαπτόμενου επιπέδου ικανοποιεί την εξίσωση

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) + (z_0 - c)(z - z_0) = 0\,.$$

Εάν αντικαταστήσουμε $x - x_0 = (x - a) + (a - x_0)$, και ανάλογα για τα y και z, έχουμε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο X_0 στη μορφή

$$(x_0 - a)(x - a) + (y_0 - b)(y - b) + (z_0 - c)(z - c) = r^2\,. \qquad (5.4)$$

Εάν $X_1 : (x_1,\, y_1,\, z_1)$ είναι σημείο έξω από τη σφαίρα, το επίπεδο Π που περνάει από το X_1 και εφάπτεται στη σφαίρα στο X_0 θα έχει εξίσωση 5.4.



Σχήμα 5.3: Πολικό επίπεδο ως προς σφαίρα: σημείο εκτός της σφαίρας.

Άρα τα X_1 και X_0 ικανοποιούν τη σχέση

$$(x_0 - a)(x_1 - a) + (y_0 - b)(y_1 - b) + (z_0 - c)(z_1 - b) = r^2 .$$

Συμπεραίνουμε οτι για σταθερό σημείο X_1 με $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 > r^2$, τα επίπεδα που περνούν από το X_1 και εφάπτονται στη σφαίρα έχουν σημείο επαφής με τη σφαίρα στο επίπεδο με εξίσωση

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) + (z_1 - c)(z - c) = r^2 . \qquad (5.5)$$

Για κάθε σημείο X_1 του χώρου E^3, διαφορετικό από το κέντρο K της σφαίρας, η εξίσωση 5.5 ορίζει το **πολικό** επίπεδο του σημείου X_1 ως προς τη σφαίρα 5.1. Αντίστοιχα, το σημείο X_1 με συντεταγμένες

$$x_1 = a + A\,, \quad y_1 = b + B\,, \quad z_1 = c + C \qquad (5.6)$$

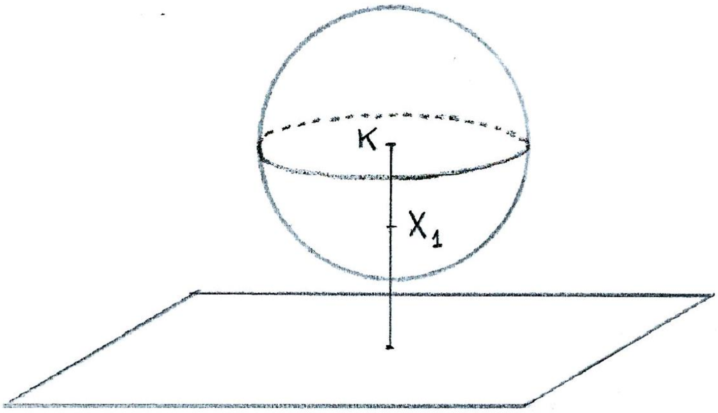
είναι ο **πόλος** του επιπέδου με εξίσωση

$$Ax + By + Cz = r^2 + Aa + Bb + Cc\,, \qquad (5.7)$$

ως προς τη σφαίρα 5.1.

Το πολικό επίπεδο του σημείου X_1 είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overrightarrow{KX_1}$, και τέμνει την ευθεία KX_1 στο σημείο X_0 για το οποίο $\overrightarrow{KX_1} \cdot \overrightarrow{KX_0} = r^2$.

Παράδειγμα 5.1 Μία ευθεία εφάπτεται στη σφαίρα S εάν έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την S. Τότε η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας.



Σχήμα 5.4: Πολικό επίπεδο ως προς σφαίρα: σημείο εντός της σφαίρας.

Θα βρούμε την εξίσωση της οικογένειας σφαιρών που έχουν κέντρο στην ευθεία $y = z = 0$ και εφάπτονται στην ευθεία $\varepsilon : x = y = z$.

Το κέντρο της σφαίρας S_λ είναι $K_\lambda : (\lambda,\, 0,\, 0)$, ενώ η ευθεία έχει παραμετρική περιγραφή $\varepsilon : (x,\, y,\, z) = t(1,\, 1,\, 1)$. Η ακτίνα της σφαίρας είναι η απόσταση του σημείου $(\lambda,\, 0,\, 0)$ από την ευθεία ε,

$$\begin{aligned} r_\lambda &= \frac{|\overrightarrow{OK_\lambda} \times (1,\, 1,\, 1)|}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{|(0,\, -\lambda,\, \lambda)|}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\lambda \end{aligned}$$

Η εξίσωση της οικογένειας σφαιρών είναι

$$(x-\lambda)^2 + y^2 + z^2 - \frac{2}{3}\lambda^2 = 0\,.$$

Παράδειγμα 5.2 Θα βρούμε τους κύκλους που αποτελούν τομή της σφαίρας $S : x^2+y^2+z^2+4x-2y-4 = 0$ με τα επίπεδα $\Pi_\mu : 2x+y-z = \mu$.

Το επίπεδο $\Pi_\mu : 2x + y - z = \mu$ τέμνει τη σφαίρα S όταν ο πόλος του Π_μ βρίσκεται έξω από τη σφαίρα. Από την 5.6, όταν η εξίσωση του επιπέδου είναι στη μορφή $Ax + By + Cz - Aa - Bb - Cc = r^2$, όπου

$(a,\, b,\, c)$ είναι το κέντρο και r η ακτίνα της σφαίρας, ο πόλος του επιπέδου είναι το σημείο $(a + A,\, b + B,\, c + C)$.

Συγκρίνοντας με την 5.2, βρίσκουμε οτι το κέντρο της σφαίρας S είναι το σημείο $K : (-2,\, 1,\, 0)$, και η ακτίνα της είναι $r = 3$. Για να φέρομε την εξίσωση του επιπέδου Π_μ στη μορφή 5.7 πολλαπλασιάζομε με κ:

$$Ax + By + Cz = 2\kappa x + \kappa y - \kappa z = \kappa\mu\,,$$

και

$$r^2 + Aa + Bb + Cc = r^2 + 2\kappa(-2) + \kappa(1) - \kappa(0) = \kappa\mu\,.$$

Άρα $r^2 - 3\kappa = \kappa\mu$ και $\kappa = \frac{r^2}{\mu+3}$.

Συμπεραίνουμε οτι ο πόλος του επιπέδου Π_μ είναι το σημείο με συντεταγμένες

$$\left(\frac{2r^2}{\mu+3} - 2,\ \frac{r^2}{\mu+3} + 1,\ \frac{-r^2}{\mu+3}\right)\,.$$

Αυτό το σημείο βρίσκεται έξω από τη σφαίρα S όταν

$$\left(\frac{2r^2}{\mu+3}\right)^2 + \left(\frac{r^2}{\mu+3}\right)^2 + \left(\frac{r^2}{\mu+3}\right)^2 > r^2\,,$$

που γίνεται $6r^2 > (\mu+3)^2$, δηλαδή όταν $-3 - 3\sqrt{6} < \mu < -3 + 3\sqrt{6}$. Για τιμές του μ σε αυτό το διάστημα, το επίπεδο τέμνει τη σφαίρα σε έναν κύκλο. Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο τομής του επιπέδου Π_μ με την ευθεία $(-2,\, 1,\, 0) + s(2,\, 1,\, -1)$, το οποίο έχει συντεταγμένες $\frac{1}{6}(2\mu - 6,\, \mu + 9,\, 3 - \mu)$. Ο κύκλος έχει ακτίνα ρ τέτοια ώστε $\rho^2 = 9 - \frac{(\mu+3)^2}{6}$.

Γεωγραφικές συντεταγμένες στη σφαίρα

Στο χώρο E^3 θεωρούμε δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O,\, \vec{i},\, \vec{j},\, \vec{k})$ και τη σφαίρα S με κέντρο στο σημείο αναφοράς, και ακτίνα r. Στο επίπεδο $z = 0$ επιλέγουμε τον προσανατολισμό που δίδεται από τη διάταξη $(\vec{i},\, \vec{j})$. Για κάθε σημείο $X : (x,\, y,\, z)$ της σφαίρας S διαφορετικό από τα $(0,\, 0,\, \pm r)$, θεωρούμε την προβολή του X στο επίπεδο $z = 0$, $X' : (x,\, y,\, 0)$. Στο ημιεπίπεδο που περιέχει τον z-άξονα και το σημείο X επιλέγουμε τον προσανατολισμό που δίδεται από τη διάταξη $(\overrightarrow{OX},\, \vec{k})$.

Με αυτές τις επιλογές, θεωρούμε την προσανατολισμένη γωνία

$$\vartheta = \measuredangle(\overrightarrow{OX'},\, \overrightarrow{OX})\,, \quad -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\,,$$

και την προσανατολισμένη γωνία

$$\varphi = \measuredangle(\vec{i},\, \overrightarrow{OX})\,, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\,.$$

Τότε

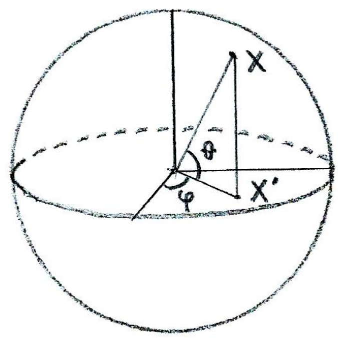
$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta\cos\varphi\,, \\ y &= r\cos\vartheta\sin\varphi\,, \\ z &= r\sin\vartheta\,. \end{aligned}$$

Η γωνία ϑ είναι το **(γεωγραφικό) πλάτος** του σημείου X, και η γωνία φ το **(γεωγραφικό) μήκος** του σημείου X.

Η απεικόνιση $\Psi : \{(\vartheta,\, \varphi) : -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2},\, 0 \leq \varphi < 2\pi\} \longrightarrow S$,

$$\Psi(\vartheta,\, \varphi) = (r\cos\vartheta\cos\varphi,\, r\cos\vartheta\sin\varphi,\, r\sin\varphi)$$

είναι μία παραμετρική περιγραφή της σφαίρας, εκτός από τα σημεία $(0,\, 0,\, \pm r)$.



Σχήμα 5.5: Γεωγραφικές συντεταγμένες στη σφαίρα.

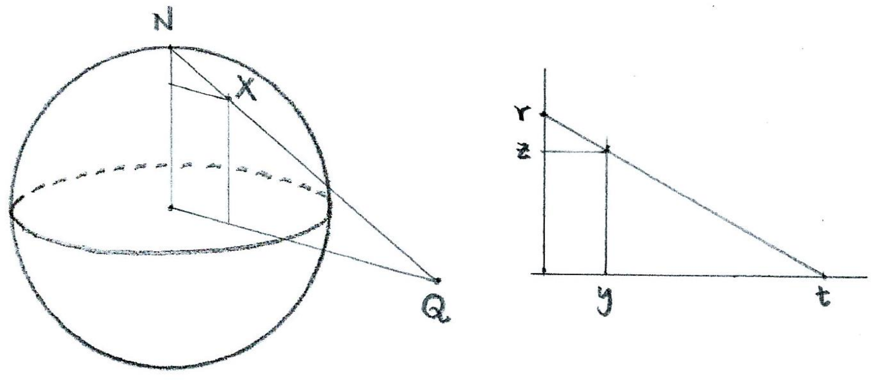
Το υποσύνολο $\{\Psi(\vartheta, \varphi) : \vartheta = \vartheta_0\}$ για σταθερό $\vartheta_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, είναι ένας κύκλος, που ονομάζεται **παράλληλος** της σφαίρας S, για γεωγραφικό πλάτος ϑ_0. Ο παράλληλος για γεωγραφικό πλάτος 0 ονομάζεται **ισημερινός** της σφαίρας S.

Το υποσύνολο $\{\Psi(\vartheta, \varphi) : \varphi = \varphi_0\}$ για σταθερό $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$, είναι ένα ημικύκλιο, που ονομάζεται **μεσημβρινός** της σφαίρας S, για γεωγραφικό μήκος φ_0.

Στερεογραφική παραμέτρηση της σφαίρας

Στο χώρο E^3 θεωρούμε δεξιόστροφο ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ και τη σφαίρα S με κέντρο στο σημείο αναφοράς, και ακτίνα r. Θεωρούμε το σημείο $N : (0, 0, r)$. Για κάθε σημείο $X : (x, y, z)$ της σφαίρας, διαφορετικό από το N, η ευθεία NX τέμνει το επίπεδο $z = 0$ σε ένα σημείο $Q : (s, t, 0)$ και από το τρίγωνο NOQ βρίσκουμε

$$s = \frac{rx}{r - z}, \qquad t = \frac{ry}{r - z}.$$



Σχήμα 5.6: Στερεογραφική παραμέτρηση της σφαίρας.

Αντίστροφα, για κάθε σημείο $Q : (s, t, 0)$ του επιπέδου $z = 0$, η ευθεία NQ τέμνει τη σφαίρα S σε ένα σημείο X διαφορετικό από το N. Για τις συντεταγμένες $(x,\, y,\, z)$ αυτού του σημείου έχουμε

$$\begin{aligned} x &= \frac{s(r-z)}{r}\,, \\ y &= \frac{t(r-z)}{r}\,, \\ r^2 &= x^2+y^2+z^2\,. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις δύο πρώτες σχέσεις στην τρίτη έχουμε $s^2(r-z)^2 + t^2(r-z)^2 + r^2z^2 = r^4$, απ' όπου βρίσκουμε

$$(s^2+t^2)(r-z)^2 = r^2(r^2-z^2)\,,$$

και καταλήγουμε στις

$$\begin{aligned} z &= \frac{r(s^2+t^2-r^2)}{s^2+t^2+r^2}\,, \\ x &= \frac{2sr^2}{s^2+t^2+r^2}\,, \\ y &= \frac{2tr^2}{s^2+t^2+r^2}\,. \end{aligned}$$

Η απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S$,

$$\Phi(s,\, t) = \frac{r}{s^2+t^2+r^2}(2rs,\, 2rt,\, s^2+t^2-r^2)$$

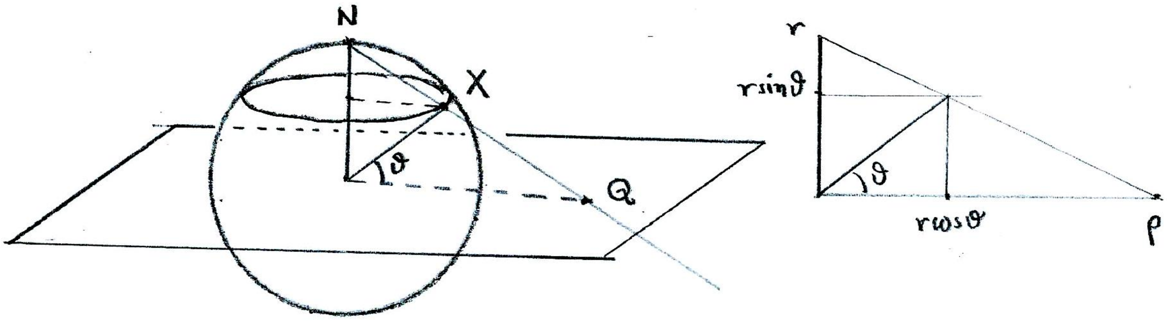
είναι μία παραμετρική περιγραφή της σφαίρας, εκτός από το σημείο $(0,\, 0,\, r)$.

Παράδειγμα 5.3 Ένας παράλληλος στη σφαίρα με γεωμετρικό πλάτος ϑ απεικονίζεται από την Φ^{-1} στον κύκλο με κέντρο O και ακτίνα ρ, Σχήμα 5.7, όπου

$$\frac{r\cos\vartheta}{r(1-\sin\vartheta)} = \frac{\rho}{r}\,.$$

Συνεπώς ο παράλληλος αντιστοιχεί στο σύνολο με στερεογραφικές παραμέτρους $(s,\, t)$ τέτοιες ώστε

$$s^2+t^2 = r^2\frac{1+\sin\vartheta}{1-\sin\vartheta}\,.$$



Σχήμα 5.7: Στερεογραφικές συντεταγμένες παράλληλου κύκλου.

Παράδειγμα 5.4 Μία ευθεία εφάπτεται στη σφαίρα S εάν έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την S. Τότε η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από την ευθεία είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας.

Δίδεται ευθεία ε από το σημείο $X_1 : (x_1,\, y_1,\, z_1)$ με διάνυσμα διεύθυνσης $\vec{d} = (u,\, v,\, w)$. Θα βρούμε τη σφαίρα με κέντρο $K : (a,\, b,\, c)$ που εφάπτεται στην ευθεία ε.

Η απόσταση του σημείου K από την ευθεία ε είναι $r = \frac{|\overrightarrow{KX_1}\times\vec{d}}{|\vec{d}|}$, και η εξίσωση της σφαίρας είναι $|\overrightarrow{KX_1}| = r$. Υψώνουμε στο τετράγωνο και χρησιμοποιούμε τον τύπο για το δις εξωτερικό γινόμενο,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{KX}\cdot\overrightarrow{KX} &= \frac{(\overrightarrow{KX_1}\times\vec{d})\cdot(\overrightarrow{KX_1}\times\vec{d})}{\vec{d}\cdot\vec{d}} \\
&= \frac{\overrightarrow{KX_1}\cdot(\vec{d}\times(\overrightarrow{KX_1}\times\vec{d})}{\vec{d}\cdot\vec{d}} \\
&= \frac{\overrightarrow{KX_1}\cdot(\vec{d}\cdot\vec{d})\overrightarrow{KX_1}-(\vec{d}\cdot\overrightarrow{KX_1})\vec{d})}{\vec{d}\cdot\vec{d}} \\
&= \frac{(\vec{d}\cdot\vec{d})(\overrightarrow{KX_1}\cdot\overrightarrow{KX_1})-(\vec{d}\cdot\overrightarrow{KX_1})^2}{\vec{d}\cdot\vec{d}}
\end{aligned}$$

Καταλήγουμε στην εξίσωση της σφαίρας

5.2 Επιφάνειες εκ περιστροφής

Μία επιφάνεια ονομάζεται **επιφάνεια εκ περιστροφής** εάν μπορεί να παραχθεί από την περιστροφή μίας καμπύλης γύρω από έναν άξονα. Κατά την περιστροφή, κάθε σημείο της καμπύλης διαγράφει ένα κύκλο με κέντρο στον άξονα, ο οποίος βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα. Η καμπύλη ονομάζεται **γενέτειρα** της επιφάνειας.

Παράδειγμα 5.5 Εάν η γενέτειρα είναι μία ευθεία παράλληλη προς τον άξονα, η επιφάνεια είναι **(ορθός κυκλικός) κύλινδρος**. Εάν θεωρήσουμε ως άξονα τον z-άξονα, τότε η επιφάνεια αποτελείται από τα σημεία $(x,\, y,\, z)$ του χώρου που ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = a^2\,.$$

Παρατηρούμε οτι η απουσία του z στην εξίσωση, σημαίνει οτι αυτή η συντεταγμένη μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο $\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5.6 Εάν η γενέτειρα είναι ευθεία η οποία τέμνει τον άξονα, η επιφάνεια είναι **(ορθός κυκλικός) κώνος**. Εάν θεωρήσουμε ως άξονα τον z-άξονα, και ως γενέτειρα την ευθεία $z = \lambda x$, $y = 0$, τότε η επιφάνεια αποτελείται από τα σημεία του χώρου που ικανοποιούν την εξίσωση

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{\lambda^2}\,.$$

Κάπως πιο γενικά, εάν ο άξονας περιστροφής είναι ο z-άξονας και η γενέτειρα βρίσκεται στο $(x,\, z)$-επίπεδο, με εξίσωση

$$f(x,\, z) = 0\,, \qquad y = 0\,, \qquad x \geq 0\,,$$

τότε η επιφάνεια εκ περιστροφής αποτελείται από τα σημεία $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$ που ικανοποιούν την εξίσωση

$$f(\sqrt{x^2 + y^2},\, z) = 0. \tag{5.8}$$

Πράγματι, εάν το σημείο $(x_0,\, 0,\, z_0)$ βρίσκεται πάνω στη γενέτειρα, τότε από την περιστροφή, βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια όλα τα σημεία στο επίπεδο $z = z_0$, τα οποία απέχουν απόσταση x_0 από τον z-άξονα, δηλαδή όλα τα σημεία με συντεταγμένες $(x,\, y,\, z_0)$ τέτοιες ώστε $\sqrt{x^2 + y^2} = x_0$.

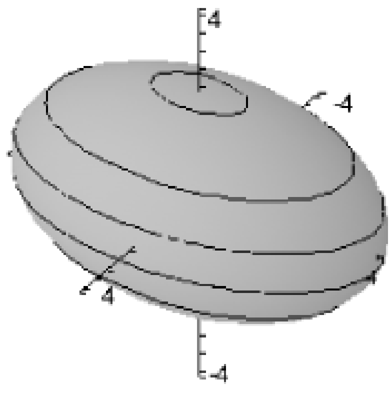
Παράδειγμα 5.7 Ελλειψοειδές εκ περιστροφής (ή **σφαιροειδές**) καλείται η επιφάνεια που παράγεται από την έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = 0$$

όταν περιστραφεί γύρω από έναν από τους άξονες της, (Σχήμα 5.8). Εάν η περιστροφή είναι γύρω από τον x-άξονα, η επιφάνεια, σύμφωνα με την 5.8, έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

.



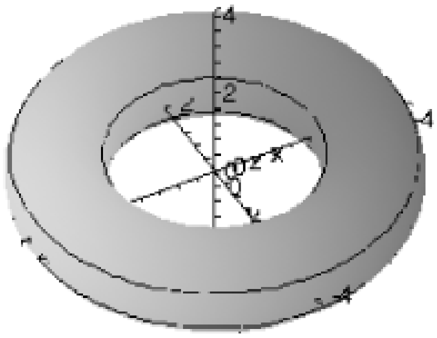
Σχήμα 5.8: Ελλειψοειδές εκ περιστροφής.

Παράδειγμα 5.8 Σπείρα (ή **τόρος**) καλείται η επιφάνεια που παράγεται από την περιστροφή ενός κύκλου γύρω από έναν άξονα που βρίσκεται στο επίπεδο του κύκλου και δεν τέμνει τον κύκλο, (Σχήμα 5.9). Θεωρούμε ως άξονα τον z-άξονα και ως γενέτειρα τον κύκλο

$$(x - a)^2 + z^2 = r^2\,, \qquad y = 0\,, \qquad a > r > 0\,.$$

Τότε η εξίσωση της σπείρας είναι

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2=r^2$$

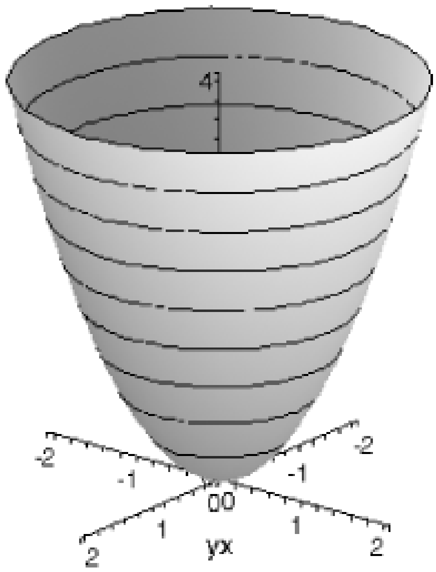


Σχήμα 5.9: Σπείρα.

Παράδειγμα 5.9 Η επιφάνεια με εξίσωση

$$x^2+y^2-2pz=0$$

είναι επιφάνεια εκ περιστροφής, γιατί έχει εξίσωση της μορφής $f(\sqrt{x^2+y^2},\ z)=0$. Συμπεραίνουμε οτι μπορεί να προκύψει με περιστροφή της καμπύλης $x^2=2pz,\ y=0$ γύρω από τον z-άξονα. Αυτή η επιφάνεια καλείται παραβολοειδές εκ περιστροφής, (Σχήμα 5.10) .



Σχήμα 5.10: Παραβολοειδές εκ περιστροφής.

Εβδομάδα 12

5.3 Επιφάνειες δευτέρου βαθμού

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε ορισμένες γενικότερες επιφάνειες οι οποίες περιγράφονται από εξίσωση δεύτερου βαθμού ως προς x, y και z. Η γενική μορφή αυτής της εξίσωσης είναι

$$\begin{aligned} A_{11}x^2 + A_{22}y^2 + A_{33}z^2 + 2A_{12}xy + 2A_{13}xz + 2A_{23}yz + \\ +2A_{41}x + 2A_{42}y + 2A_{43}z + A_{44} = 0\,. \end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση θα θεωρήσουμε το σύστημα αναφοράς που εκμεταλλεύεται τις συμμετρίες της επιφάνειας, ώστε να λάβουμε την απλούστερη μορφή της εξίσωσης.

5.4 Ελλειψοειδές

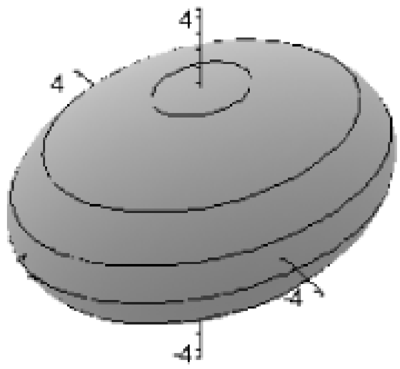
Ελλειψοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία, σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,, \qquad a,\, b,\, c > 0\,.$$

Εάν $f(x,\, y,\, z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c} - 1$, παρατηρούμε οτι

$$f(x,\, y,\, z) = f(-x,\, y,\, z) = f(x,\, -y,\, z) = f(x,\, y,\, -z)$$

και επομένως το ελλειψοειδές είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα $(y,\, z)$, $(x,\, z)$ και $(x,\, y)$. Συνεπώς είναι επίσης συμμετρικό ως προς τους τρείς άξονες συντεταγμένων, και ως προς το σημείο αναφοράς, (Σχήμα 5.11).



Σχήμα 5.11: Ελλειψοειδές.

Το ελλειψοειδές περιέχεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με πλευρές $2a$, $2b$, $2c$, και τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\, :\, (a,\, 0,\, 0)$, $A'\, :\, (-a,\, 0,\, 0)$, $B\, :\, (0,\, b,\, 0)$, $B'\, :\, (0,\, -b,\, 0)$, $C\, :\, (0,\, 0,\, c)$, $C'(0,\, 0,\, -c)$.

Το ελλειψοειδές τέμνει το $(x,\, y)$-επίπεδο στην έλλειψη

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1\,, \qquad z = 0\,.$$

Ένα επίπεδο παράλληλο προς το $(x,\, y)$-επίπεδο, με εξίσωση $z = k$ για $-c \leq k \leq c$, τέμνει το ελλειψοειδές στο σύνολο

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2},\ z = k\,,$$

το οποίο είναι ένα σημείο όταν $|k| = c$, ενώ όταν $|k| < c$ είναι μία έλλειψη, με ημιάξονες

$$a\sqrt{1-\frac{k^2}{c^2}}\,, \qquad b\sqrt{1-\frac{k^2}{c^2}}\,.$$

Παρόμοια ισχύουν για τις τομές του ελλειψοειδούς με επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα $(x,\, z)$ και $(y,\, z)$.

Γενικότερα, μπορούμε να δείξουμε οτι κάθε επίπεδο, εφόσον τέμνει το ελλειψοειδές, το τέμνει σε ένα σημείο ή σε μία έλλειψη. Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής είναι η ειδική περίπτωση ελλειψοειδούς όταν δύο από τις σταθερές a, b, c είναι ίσες.

5.5 Μονόχωνο υπερβολοειδές

Μονόχωνο υπερβολοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία, σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,, \qquad a,\, b,\, c>0\,.$$

Το μονόχωνο υπερβολοειδές είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα $(x,\, y)$, $(x,\, z)$ και $(y,\, z)$, καθώς και ως προς τους άξονες x, y, z και το σημείο αναφοράς, (Σχήμα 5.12).

Το επίπεδο $(x,\, y)$ τέμνει την επιφάνεια στην έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,, \qquad z=0\,.$$

Το επίπεδο $(x,\, z)$ τέμνει την επιφάνεια στην υπερβολή

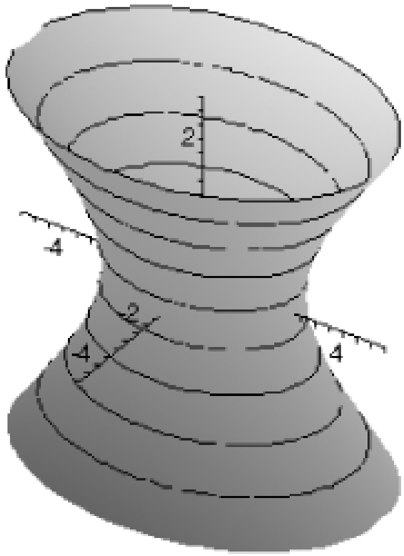
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,, \qquad y=0\,,$$

ενώ το επίπεδο $(y,\, z)$ στην υπερβολή

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,, \qquad x=0\,.$$

Γενικότερα, κάθε επίπεδο με εξίσωση $z = k$, τέμνει την επιφάνεια σε μία έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2}\,, \qquad z=k\,.$$



Σχήμα 5.12: Μονόχωνο υπερβολοειδές.

Κάθε επίπεδο με εξίσωση $x = m$, τέμνει την επιφάνεια σε μία υπερβολή εάν $|m| \neq a$, η οποία έχει εξισώσεις

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{m^2}{a^2}, \qquad x = m\,.$$

Όταν $|m| = a$, $1 - \frac{m^2}{a^2} = 0$ και η εξίσωση γίνεται

$$\frac{y}{b} = \pm\frac{z}{c},\ x = m\,,$$

η οποία παριστάνει δύο ευθείες που τέμνονται στο $(m,\,0,\,0)$.

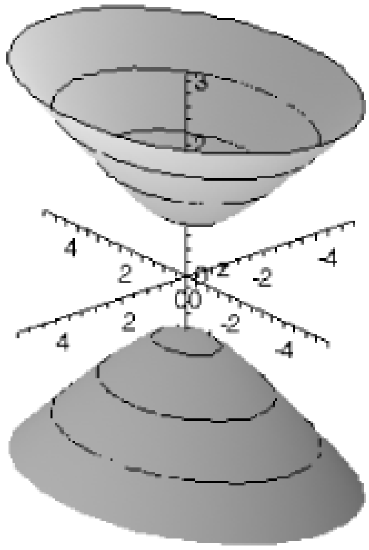
Στην ειδική περίπτωση που $a = b$, έχουμε το μονόχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής.

5.6 Δίχωνο υπερβολοειδές

Δίχωνο υπερβολοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία, σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1\,, \qquad a,\,b,\,c > 0\,.$$

Το δίχωνο υπερβολοειδές είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα (x, y), (x, z) και (y, z), καθώς και ως προς τους άξονες x, y, z και το σημείο αναφοράς, (Σχήμα 5.13).



Σχήμα 5.13: Δίχωνο υπερβολοειδές.

Το επίπεδο (x, y) δεν τέμνει την επιφάνεια. Ένα επίπεδο με εξίσωση $z = k$ τέμνει την επιφάνεια σε μία έλλειψη εάν $|k| > c$, και σε ένα σημείο εάν $|k| = c$.

Τα επίπεδα (x, z) και (y, z), καθώς και επίπεδα παράλληλα προς αυτά, τέμνουν την επιφάνεια σε μία υπερβολή.

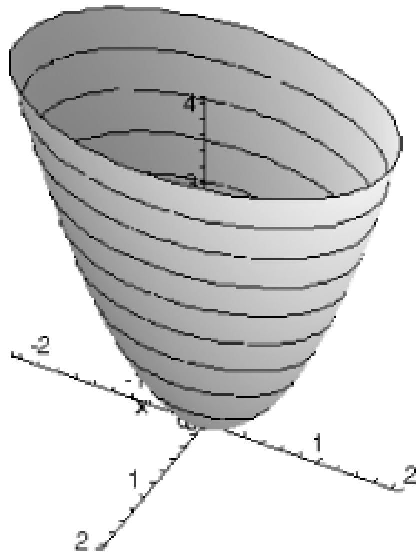
Στην ειδική περίπτωση που $a = b$ έχουμε το δίχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής.

5.7 Ελλειπτικό παραβολοειδές

Ελλειπτικό παραβολοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία, σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2cz\,, \qquad a, b > 0\,, \, c \neq 0\,.$$

Το ελλειπτικό παραβολοειδές είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα $(x,\, z)$ και $(y,\, z)$, καθώς και ως προς τον z-άξονα, (Σχήμα 5.14).



Σχήμα 5.14: Ελλειπτικό παραβολοειδές.

Το επίπεδο $(x,\, y)$ συναντάει την επιφάνεια μόνο στο σημείο αναφοράς. Κάθε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο $(x,\, y)$ με εξίσωση $z = k$, για $k > 0$ τέμνει την επιφάνεια σε μία έλλειψη με εξισώσεις

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2ck\,, \qquad z = k\,.$$

Εάν $k < 0$, το επίπεδο $z = k$ δεν τέμνει την επιφάνεια.

Επίπεδα παράλληλα προς το $(x,\, z)$ ή το $(y,\, z)$ επίπεδο, τέμνουν την επιφάνεια σε μία παραβολή. Για παράδειγμα, το επίπεδο $(x,\, z)$ τέμνει την επιφάνεια στην παραβολή

$$x^2 = 2a^2cz\,, \qquad y = 0\,,$$

ενώ το επίπεδο $y = m$ τέμνει την επιφάνεια στην παραβολή

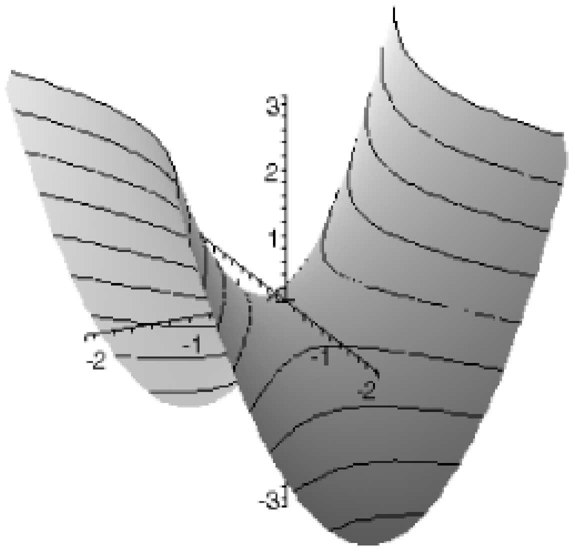
$$\frac{x^2}{a^2} = 2cz - \frac{m^2}{b^2}\,, \qquad y = m\,.$$

5.8 Υπερβολικό παραβολοειδές

Υπερβολικό παραβολοειδές καλείται η επιφάνεια η οποία, σε κατάλληλο ορθογώνιο σύστημα αναφοράς, έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2cz\,, \qquad a,\, b > 0\,,\; c \neq 0\,.$$

Η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς τα επίπεδα $(x,\, z)$ και $(y,\, z)$, καθώς και ως προς τον z-άξονα, και συναντάει τους άξονες μόνο στο σημείο αναφοράς, (Σχήμα 5.15).



Σχήμα 5.15: Υπερβολικό παραβολοειδές.

Το επίπεδο $z = 0$ τέμνει την επιφάνεια κατά μήκος δύο τεμνομένων ευθειών, με εξισώσεις

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0\,, \qquad z = 0\,,$$

ενώ κάθε επίπεδο παράλληλο προς το επίπεδο $z = 0$, με εξίσωση $z = k$ για $k \neq 0$, συναντάει το υπερβολικό παραβολοειδές σε μία υπερβολή, με εξισώσεις

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2ck\,, \qquad z = k\,.$$

Επίπεδα παράλληλα προς το επίπεδο $x = 0$ ή το $y = 0$, τέμνουν την επιφάνεια σε μία παραβολή. Για παράδειγμα, το επίπεδο $x = m$ για $m \neq 0$, τέμνει την επιφάνεια στην παραβολή με εξισώσεις

$$\frac{y^2}{b^2} = -2cz + \frac{m^2}{a^2}\,, \qquad x = m\,.$$

5.9 Άλλες επιφάνειες 2ου βαθμού

Εκτός από τα πέντε είδη επιφανειών 2ου βαθμού που περιγράψαμε, υπάρχουν 'εκφυλισμένες' περιπτώσεις, όπου έχουμε μία κωνική ή κυλινδρική επιφάνεια, επίπεδα, ευθεία ή το κενό σύνολο. Παρακάτω δίδουμε χαρακτηριστικά παραδείγματα αυτών των περιπτώσεων.

ελλειπτικός κώνος	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
παραβολικός κύλινδρος	$y^2 = 2cz,\ c \neq 0$
υπερβολικός κύλινδρος	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
ελλειπτικός κύλινδρος	$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
δύο τέμνομενα επίπεδα	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
δύο παράλληλα επίπεδα	$\frac{z^2}{c^2} = 1$
ένα επίπεδο	$z^2 = 0$
μία ευθεία	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

ένα σημείο $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$

το κενό σύνολο $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$

Παράδειγμα 5.10 Για να βρούμε την επιφάνεια που παριστάνει η εξίσωση

$$x^2 - y^2 - z^2 + 4x - 8y + 2z - 17 = 0$$

συμπληρώνουμε τα τετράγωνα, και έχουμε

$$(x+2)^2 - 4 - (y+4)^2 + 16 - (z-1)^2 + 1 - 17 = 0$$

ή

$$(x+2)^2 - (y+4)^2 - (z-1)^2 = 4\,.$$

Εάν μεταφέρουμε το σημείο αναφοράς στο $(-2,\,-4,1)$, η εξίσωση γίνεται

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{4} - \frac{z'^2}{4} = 1\,.$$

Συμπεραίνουμε οτι η εξίσωση παριστάνει ένα δίχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής, με κέντρο στο σημείο $(-2,\,-4,\,1)$, και κύριο άξονα παράλληλο προς τον x-άξονα. Η επιφάνεια τέμνει τον κύριο άξονα στα σημεία $(0,\,-4,\,1)$ και $(-4,\,-4,\,1)$.

Άσκηση 5.1 Για τις ακόλουθες εξισώσεις,

α΄. ονομάστε την επιφάνεια την οποία παριστάνουν

β΄. βρείτε τις εξισώσεις των τομών της επιφάνειας με τα επίπεδα (x, y), (x, z), (y, z).

γ΄. βρείτε τις εξισώσεις των τομών της επιφάνειας με τα επίπεδα $x = 4$, $y = 4$ και $z = 4$.

i. $9x^2 + 4z^2 = 36y$

ii. $4y^2 + 4z^2 - x^2 = 0$

iii. $9x^2 - y^2 = 4z$

iv. $2y^2 + 4z^2 = x^2$

v. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

vi. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} - \dfrac{z^2}{4} = 1$

vii. $-\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} + z^2 = 1$

viii. $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 0.$

Άσκηση 5.2 Φέρετε τις ακόλουθες εξισώσεις σε κανονική μορφή συμπληρώνοντας τα τετράγωνα, και ονομάστε τις επιφάνειες που παριστάνουν:

α'. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 8 = 0$

β'. $2x^2 + y^2 - 4z^2 + 4z - 6y - 2 = 0$

γ'. $y^2 - x^2 - 4z^2 = 2x + 8z$

δ'. $x^2 - 4y^2 + 2x - z + 8y - 3 = 0$

ε'. $x^2 + z^2 + 2x + \frac{3}{2}y + 2z - 3 = 0$

ϛ'. $x^2 + z^2 - 4x - y - 5 = 0$

ζ'. $x^2 - z^2 - y^2 - 4x + 4z - 1 = 0$

Κεφάλαιο 6

Άλλα συστήματα συντεταγμένων

Εβδομάδα 13

6.1 Πολικές συντεταγμένες

Στο επίπεδο θεωρούμε ένα σημείο O, και ένα ημιάξονα OA, που συνήθως τον σχεδιάζουμε οριζόντια. Ένα σημείο X του επιπέδου προσδιορίζεται από την απόσταση r από το O, και την προσημασμένη γωνία $\vartheta = \measuredangle(OA, OX)$.

Το ζεύγος (r, ϑ) είναι οι **πολικές συντεταγμένες** του σημείου X. Η συντεταγμένη ϑ δεν είναι μοναδικά καθορισμένη: $(r, \vartheta + 2k\pi)$ είναι πολικές συντεταγμένες του ίδιου σημείου, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Η σχέση μεταξύ πολικών και καρτεσιανών συντεταγμένων δίδεται από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\begin{aligned} x &= r\cos\vartheta \\ y &= r\cos\vartheta \end{aligned}$$

και αντίστροφα

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \vartheta &= \arctan\frac{y}{x}, \end{aligned}$$

όπου η συγκεκριμένη τιμή της ϑ καθορίζεται από τα πρόσημα των x και y και την επιλογή μίας κύριας τιμής, για παράδειγμα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$.

Παράδειγμα 6.1 Το σημείο με καρτεσιανές συντεταγμένες $(\sqrt{3}, 1)$ έχει πολικές συντεταγμένες

$$r = \sqrt{3+1} = 2 \quad , \qquad \vartheta = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}\,.$$

Τα σημεία με καρτεσιανές συντεταγμένες $(-\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, -1)$ και $(\sqrt{3}, -1)$ έχουν αντίστοιχα πολικές συντεταγμένες $\left(2, \frac{5\pi}{6}\right)$, $\left(2, -\frac{5\pi}{6}\right)$ και $\left(2, -\frac{\pi}{6}\right)$.

Παράδειγμα 6.2 Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα a, σε πολικές συντεταγμένες είναι
$$r = a\,.$$

Παράδειγμα 6.3 Η *έλικα του Αρχιμήδη* είναι η καμπύλη που παράγεται από ένα σημείο που κινείται με σταθερή ταχύτητα u σε έναν άξονα, ο οποίος ταυτόχρονα περιστρέφεται, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω. Εάν αρχικά το σημείο βρίσκεται στο O, μετά από χρόνο t οι πολικές συντεταγμένες του σημείου θα είναι
$$r = ut \text{ και } \vartheta = \omega t$$
Με απαλοιφή του t παίρνουμε την εξίσωση της έλικας του Αρχιμήδη σε πολικές συντεταγμένες
$$r = \frac{u}{\omega}\vartheta\,.$$

6.2 Σφαιρικές συντεταγμένες

Θεωρούμε μία σφαίρα με κέντρο στο σημείο αναφοράς O και ακτίνα ρ. Η εξίσωση της σφαίρας είναι:
$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$$
Εάν $X : (x,\, y,\, z)$ είναι ένα σημείο της σφαίρας, θεωρούμε την προβολή X' του X στο επίπεδο Oxy, δηλαδή το σημείο $X' : (x,\, y,\, 0)$, και τις γωνίες που σχηματίζει η OX' με τον x-άξονα και με την OX:
$$\begin{aligned} \vartheta &= \measuredangle(Ox,\, OX') \\ \varphi &= \measuredangle(OX',\, OX)\,, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$
Η φ ονομάζεται **γεωγραφικό πλάτος** του X και η ϑ ονομάζεται **γεωγραφικό μήκος** του X.

Η διατεταγμένη τριάδα $(\rho,\, \vartheta,\, \varphi)$ καθορίζει πλήρως το σημείο X, και είναι οι **σφαιρικές συντεταγμένες** του σημείου.

Η σχέση των καρτεσιανών συντεταγμένων με τις σφαιρικές συντεταγμένες δίδεται από τις εξισώσεις

$$\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\vartheta &= \arctan\frac{y}{x}\,, \qquad -\pi < \vartheta \le \pi \\
\varphi &= \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,, \qquad -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

και αντίστροφα

$$\begin{aligned}
x &= |OX'|\cos\vartheta = \rho\cos\varphi\cos\vartheta \\
y &= |OX'|\sin\vartheta = \rho\cos\varphi\sin\vartheta \\
z &= (X'X) = \rho\sin\varphi
\end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.4 Η εξίσωση μίας σφαίρας με κέντρο O και ακτίνα a σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$\rho = a$$

Παράδειγμα 6.5 Η εξίσωση

$$\varphi = \varphi_0$$

για $\varphi_0 = 0$ παριστάνει το επίπεδο (x, y), ενώ για $\varphi_0 \neq 0$ παριστάνει έναν κώνο, με άξονα συμμετρίας τον z-άξονα, και γωνία $\frac{\pi}{2} - \varphi_0$ εάν $\varphi_0 > 0$, και $\frac{\pi}{2} + \varphi_0$ εάν $\varphi_0 < 0$. Το σύστημα εξισώσεων

$$\rho = a \quad , \qquad \varphi = \varphi_0$$

παριστάνει έναν κύκλο, τον γεωγραφικό παράλληλο πλάτους φ_0 πάνω στη σφαίρα με εκτίνα a.

Παράδειγμα 6.6 Η εξίσωση

$$\vartheta = \vartheta_0$$

παριστάνει ένα ημιεπίπεδο με σύνορο στον z-άξονα, ενώ το σύστημα

$$\rho = a \quad , \qquad \vartheta = \vartheta_0$$

παριστάνει ένα ημικύκλιο, τον γεωγραφικό μεσημβρινό μήκους ϑ_0 πάνω στη σφαίρα με ακτίνα a.

Παράδειγμα 6.7 Η εξίσωση

$$\rho \sin \varphi = 3$$

παριστάνει το επίπεδο $z = 3$.

Παράδειγμα 6.8 Η εξίσωση

$$\rho \cos \varphi = 3$$

παριστάνει τον κύλινδρο με άξονα τον άξονα των z, και ακτίνα 3, όπως φαίνεται από την

$$\rho \cos \varphi = \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

6.3 Κυλινδρικές συντεταγμένες

Θεωρούμε ένα σημείο X με καρτεσιανές συντεταγμένες $(x,\, y,\, z)$, και την προβολή X' του X στο επίπεδο $(x,\, y)$ με συντεταγμένες $(x,\, y,\, 0)$. Στο επίπεδο $(x,\, y)$ ορίζεται σύστημα πολικών συντεταγμένων ως προς το οποίο το σημείο X' έχει πολικές συντεταγμένες $(\rho,\, \vartheta)$:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \qquad \vartheta = \measuredangle(Ox,\, OX')$$

Η διατεταγμένη τριάδα $(r,\,\vartheta,\,z)$ καθορίζει πλήρως το σημείο X, και είναι οι **κυλινδρικές συντεταγμένες** του σημείου.

Η σχέση των κυλινδρικών συντεταγμένων με τις καρτεσιανές συντεταγμένες δίδεται από τις ισότητες

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \vartheta &= \arctan\frac{y}{x}, \qquad -\pi<\vartheta\le\pi \\ z &= z \end{aligned}$$

και αντίστροφα,

$$\begin{aligned} x &= |OX'|\cos\vartheta = r\cos\vartheta \\ y &= |OX'|\sin\vartheta = r\sin\vartheta \\ z &= z \end{aligned}$$

Παράδειγμα 6.9 Η εξίσωση ενός κυλίνδρου με άξονα τον z-άξονα και ακτίνα a σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$r = a\,.$$

Παράδειγμα 6.10 Η εξίσωση

$$z = c$$

σε κυλινδρικές συντεταγμένες παριστάνει (όπως και σε καρτεσιανές συντεταγμένες) ένα επίπεδο παράλληλο με το $(x,\,y)$-επίπεδο, σε απόσταση $|c|$ από αυτό.

Παράδειγμα 6.11 Η εξίσωση

$$\vartheta = \vartheta_0$$

παριστάνει ένα ημιεπίπεδο με σύνορο τον z-άξονα, ενώ το σύστημα εξισώσεων

$$\rho = a\,, \qquad \vartheta = \vartheta_0$$

παριστάνει μία ευθεία παράλληλη με τον z-άξονα

Παράδειγμα 6.12 Η εξίσωση

$$\vartheta = az\,, \qquad a \neq 0$$

παριστάνει μία *ελικοειδή επιφάνεια*, την επιφάνεια που διαγράφει μία ευθεία κάθετη στον z-άξονα, που κινείται με σταθερή ταχύτητα κατα μήκος του z-άξονα και ταυτόχρονα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από τον z-άξονα.