

ΘΕΜΕΛΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (ΕΑΡΙΝΟ 2021-22)
ΦΥΛΛΑΔΙΟ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2
ΚΑΤΑΛΗΚΤΙΚΗ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ ΥΠΟΒΟΛΗΣ: 31.05.2022

Άσκηση 1. Έστω $(G, *)$ ομάδα, με ουδέτερο στοιχείο e , για την οποία ισχύει ότι για κάθε $x \in G$, $x * x = e$. Δείξτε ότι η G είναι αβελιανή. (Υπόδειξη: Αναρωτηθείτε τι σχέση έχει κάθε στοιχείο της G με το αντίστροφό του.)

Άσκηση 2. Έστω $(G, *)$ ομάδα και H, K υποομάδες της G . Δείξτε ότι η τομή $H \cap K$ είναι υποομάδα της G .

Άσκηση 3. Να περιγράψετε γεωμετρικά το σύνολο των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν τις σχέσεις: (i) $z + \bar{z} = 0$ και (ii) $|z - i| > |z + 1|$.

Άσκηση 4. Αποδείξτε ότι το σύνολο $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ εφοδιασμένο με την πράξη πολλαπλασιασμού μιγαδικών αριθμών είναι αβελιανή ομάδα. Δείξτε επίσης ότι το σύνολο των n -οστών ριζών της μονάδας (όπου n θετικός ακέραιος) αποτελεί υποομάδα της S^1 .

Άσκηση 5. Αποδείξτε ότι σε ένα σώμα δεν υπάρχουν διαιρέτες του μηδενός.

Άσκηση 6. Έστω $(R, +, \cdot)$ μοναδιαίος δακτύλιος. Υπενθυμίζεται ότι ένα μη μηδενικό στοιχείο $r \in R$ καλείται αντιστρέψιμο (ως προς τον πολλαπλασιασμό) εάν υπάρχει στοιχείο $r^{-1} \in R$, έτσι ώστε $r \cdot r^{-1} = 1_R = r^{-1} \cdot r$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$U(R) := \{r \in R \mid r \text{ αντιστρέψιμο στοιχείο του } R\} \subseteq R \setminus \{0_R\}.$$

- (i) Να δείξετε ότι το $U(R)$, εφοδιασμένο με την πράξη του πολλαπλασιασμού που δίνεται στο R , είναι ομάδα.
- (ii) Εάν υποθέσουμε επιπλέον ότι ο $(R, +, \cdot)$ είναι σώμα, περιγράψτε την ομάδα $U(R)$.
- (iii) Να περιγράψτε τις ομάδες $U(\mathbb{Z}_{12})$ και $U(\mathbb{Z}_7)$.