

ΘΕΜΕΛΙΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ ΚΑΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ (ΕΑΡΙΝΟ 2021-22)  
ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΟΥΝΙΟΥ (21.07.2022)

**Θέμα 1.** (2 μον.) Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

- (i) Για κάθε θετικό ακέραιο  $n$  το 3 διαιρεί τον  $n^3 + 5n + 6$ .
- (ii) Για κάθε ακέραιο  $n \geq 5$  το πλήθος όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου με  $n$  στοιχεία είναι μεγαλύτερο του  $n^2$ .

**Θέμα 2.** (2 μον.) Έστω  $A, B$  προτασιακές μεταβλητές.

- (i) Να εξετάσετε εάν η πρόταση  $A \rightarrow (\neg A \rightarrow A)$  είναι ταυτολογία, αντιλογία ή ουδέτερη.
- (ii) Να δείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες

$$\neg(A \rightarrow \neg B) \quad \text{και} \quad \neg(B \rightarrow \neg A).$$

**Θέμα 3.** (1,5 μον.) Μια παρέα 8 φοιτητών αποτελείται από 5 κορίτσια και 3 αγόρια. Με πόσους τρόπους μπορούν να στοιχηθούν στην καντίνα τα άτομα αυτής της παρέας; (Με τον όρο 'στοίχιση' εννοούμε την τοποθέτηση στη σειρά, διατεταγμένα).

Επίσης, να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να στοιχηθούν στην καντίνα 5 άτομα από αυτή την παρέα υπό την προϋπόθεση:

- (i) Τα δύο πρώτα άτομα να είναι κορίτσια.
- (ii) Τα δύο πρώτα άτομα να είναι αγόρια και τα υπόλοιπα 3 να είναι κορίτσια.

**Θέμα 4.** (2 μον.) (i) Έστω ακέραιος  $n > 1$  και  $\zeta \neq 1$  μια  $n$ -οστή ρίζα της μονάδας. Να δείξετε ότι  $1 + \zeta + \zeta^2 + \dots + \zeta^{n-1} = 0$ .

(ii) Δίνεται το πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές

$$f(x) = x^3 - 24x^2 - 24x - 25.$$

Να βρείτε όλες τις ρίζες του  $f(x)$  στο  $\mathbb{C}$ .

**Θέμα 5.** (1 μον.) Έστω  $(G, *)$  ομάδα και  $a, b, c$  στοιχεία της  $G$  για τα οποία ισχύει ότι  $a * b * c = e$  (όπου  $e$  είναι το ουδέτερο στοιχείο της  $G$ ). Να δείξετε ότι  $b * c * a = e$ .

**Θέμα 6.** (1,5 μον.) Να δώσετε τον ορισμό του αναγώγου πολυωνύμου (με συντελεστές σε ένα σώμα) και να εξετάσετε εάν τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανάγωγα:

- (i)  $f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$
- (ii)  $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$
- (iii)  $h(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ .

**Καλή Επιτυχία!**