Θεμελια Αλγεβρας και Γεωμετριας (Εαρινο 2021-22)
Ενδεικτικες λυσεις εξετασης Ιουνιου (21.07.2022)

**Θέμα 1.** (2 μον.) Να αποδείξετε τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Για κάθε θετικό ακέραιο $n$ το 3 διαιρεί τον $n^3+5n+6$.

(ii) Για κάθε ακέραιο $n \geqslant 5$ το πλήθος όλων των υποσυνόλων ενός συνόλου με $n$ στοιχεία είναι μεγαλύτερο του $n^2$.

**Λύση.** (i) Εργαζόμαστε με Μαθηματική Επαγωγή. Για $n=1$, έχουμε $n^3+5n+6 = 1+5+6 = 12 = 3\cdot 4$, αρα η πρόταση ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει για θετικό ακέραιο $n$ και θα την αποδείξουμε για τον $n+1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}(n+1)^3+5(n+1)+6 &= n^3+3n^2+3n+1+5n+5+6\\ &= (n^3+5n+6)+(3n^2+3n+6).\end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση το 3 διαιρεί τον $n^3+5n+6$ ενώ διαιρεί επίσης και τον $3n^2+3n+6 = 3(n^2+n+2)$, άρα διαιρεί και το άθροισμά τους.

(ii) Από τη Θεωρία γνωρίζουμε ότι το πλήθος ενός υποσυνόλου με $n$ στοιχεία είναι ίσο με $2^n$. Καλούμαστε λοιπόν να δείξουμε ότι για $n \geqslant 5$, ισχύει η πρόταση

$$\Pi(n):\ 2^n > n^2.$$

Δουλεύουμε με Μαθηματική Επαγωγή (με βάση το 5). Για τη βάση της επαγωγής, έχουμε ότι $2^5 = 32 > 25$, άρα η $\Pi(5)$ αληθεύει. Υποθέτουμε ότι για έναν ακέραιο $n \geqslant 5$ η $\Pi(n)$ αληθεύει, και θα δείξουμε την

$$\Pi(n+1):\ 2^{n+1} > (n+1)^2.$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $2^{n+1} = 2\cdot 2^n > 2n^2$, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $2n^2 \geqslant (n+1)^2 = n^2+2n+1$.

Αφού $n \geqslant 5$, ειδικότερα έχουμε ότι $2n+1 < 2n+n = 3n < n\cdot n = n^2$. Προσθέτοντας με το $n^2$ παίρνουμε $2n^2 > n^2+2n+1$ το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη.

**Θέμα 2.** (2 μον.) Έστω $A, B$ προτασιακές μεταβλητές.

(i) Να εξετάσετε εάν η πρόταση $A \to (\neg A \to A)$ είναι ταυτολογία, αντιλογία ή ουδέτερη.

(ii) Να δείξετε ότι οι παρακάτω προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες

$$\neg(A \to \neg B) \quad \text{και} \quad \neg(B \to \neg A).$$

**Λύση.** (i) Με κατασκευή αληθοπίνακα έχουμε

| A | $\neg A$ | $\neg A \to A$ | $A \to (\neg A \to A)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |

Συνεπώς η $A \to (\neg A \to A)$ είναι ταυτολογία.

(ii) Κάνοντας χρήση βασικών κανόνων λογικών ισοδυναμιών έχουμε

$$\begin{aligned}\neg(A \to \neg B) &\equiv \neg(\neg A \vee (\neg B))\\ &\equiv \neg(\neg A) \wedge \neg(\neg B)\\ &\equiv A \wedge B.\end{aligned}$$

Λόγω συμμετρίας ανάμεσα στις δύο δοσμένες προτάσεις, θα έχουμε επίσης ότι $\neg(B \to \neg A) \equiv B \wedge A$. Καθώς $A \wedge B \equiv B \wedge A$, συμπεραίνουμε ότι οι δύο δοσμένες προτάσεις είναι λογικά ισοδύναμες.

**Θέμα 3.** (1,5 μον.) Μια παρέα 8 φοιτητών αποτελείται από 5 κορίτσια και 3 αγόρια. Με πόσους τρόπους μπορούν να στοιχηθούν στην καντίνα τα άτομα αυτής της παρέας; (Με τον όρο 'στοίχιση' εννούμε την τοποθέτηση στη σειρά, διατεταγμένα).

Επίσης, να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να στοιχηθούν στην καντίνα 5 άτομα από αυτή την παρέα υπό την προϋπόθεση:

(i) Τα δύο πρώτα άτομα να είναι κορίτσια.

(ii) Τα δύο πρώτα άτομα να είναι αγόρια και τα υπόλοιπα 3 να είναι κορίτσια.

**Λύση.** Για να στοιχηθούν τα 8 άτομα της παρεάς υπάρχουν 8! τρόποι (πρόκειται για μεταθέσεις 8 στοιχείων και γνωρίζουμε από εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής αρχής ότι αυτές είναι 8! το πλήθος).

(i) Για να στοιχηθούν 5 άτομα της παρέας με την προϋπόθεση τα 2 πρώτα να είναι κορίτσια, έχουμε αρχικά $5 \cdot 4$ επιλογές για να στοιχηθούν κορίτσια (στις δύο πρώτες θέσεις) και έπειτα, από τα εναπομείναντα $8-2=6$ άτομα της παρέας, έχουμε $6 \cdot 5 \cdot 4$ τρόπους για να στοιχηθούν 3 από αυτά. Επομένως, εφαρμόζοντας πάλι την πολλαπλασιαστική αρχή, έχουμε συνολικά $5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ τρόπους για να στοιχηθούν 5 άτομα της παρέας έτσι ώστε τα 2 πρώτα να είναι κορίτσια.

(ii) Με παρόμοιο συλλογισμό όπως στο (i) υπολογίζουμε ότι ο ζητούμενος αριθμός είναι ο $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$.

**Θέμα 4.** (2 μον.) **(i)** Έστω ακέραιος $n > 1$ και $\zeta \neq 1$ μια $n$-οστή ρίζα της μονάδας. Να δείξετε ότι $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$.
**(ii)** Δίνεται το πολυώνυμο με πραγματικούς συντελεστές

$$f(x) = x^3 - 24x^2 - 24x - 25.$$

Να βρείτε όλες τις ρίζες του $f(x)$ στο $\mathbb{C}$.

**Λύση.** **(i)** Θέτοντας $x = 1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1}$ παρατηρούμε ότι $\zeta x = \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} + 1 = x$. Άρα $x(\zeta - 1) = 0$, και αφού $\zeta \neq 1$ έπεται ότι $x = 0$.

**(ii)** Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 24x^2 - 24x - 25 \\ &= x^3 - 24(x^2 + x + 1) - 1 \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει εύκολα (χρησιμοποιώντας το (i) για παράδειγμα), ότι εάν $\zeta \neq 1$ είναι κυβική ρίζα της μονάδας τότε $f(\zeta) = 0$. Πιο συγκεκριμένα, δύο μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου $f(x)$ θα είναι οι $\rho_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ καθώς και η $\rho_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επίσης, από το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας το $f(x)$ πάνω από το $\mathbb{C}$ επιδέχεται παραγοντοποίηση

$$f(x) = (x - \rho_1)(x - \rho_2)(x - \rho_3)$$

(και μάλιστα γνωρίζουμε ότι η $\rho_3$ θα είναι κατ΄ ανάγκη πραγματική ρίζα του $f(x)$). Από αυτή την παραγοντοποίηση παρατηρούμε ότι ο σταθερός όρος του $f(x)$ είναι $-\rho_1\rho_2\rho_3 = -25 \Leftrightarrow |\rho_1|^2 \cdot \rho_3 = 25 \Leftrightarrow \rho_3 = 25$.

**Θέμα 5.** (1 μον.) Έστω $(G, *)$ ομάδα και $a, b, c$ στοιχεία της $G$ για τα οποία ισχύει ότι $a * b * c = e$ (όπου $e$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της $G$). Να δείξετε ότι $b * c * a = e$.

**Λύση.** Πολλαπλασιάζοντας τη δοθείσα σχέση από αρίστερα με $a^{-1}$ παίρνουμε

$$a^{-1} * (a * b * c) = a^{-1} * e.$$

Χρησιμοποιώντας το προσεταιριστικό αξίωμα στο αριστερό μέλος αυτή της ισότητας και το αξίωμα του ουδετέρου στο δεξιό μέλος, η παραπάνω είναι ισοδύναμη με την

$$(a^{-1} * a) * (b * c) = a^{-1}.$$

Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τα αξιώματα του αντιστρόφου και του ουδετέρου στο αριστερό μέλος έχουμε ισοδύναμα ότι $b * c = a^{-1}$. Τέλος, πολλαπλασιάζοντας αυτήν από δεξία με $a$ έχουμε

$$b * c * a = a^{-1} * a = e.$$

**Θέμα 6.** (1,5 μον.) Να δώσετε τον ορισμό του αναγώγου πολυωνύμου (με συντελεστές σε ένα σώμα) και να εξετάσετε εάν τα παρακάτω πολυώνυμα είναι ανάγωγα:

(i) $f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}[x]$
(ii) $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2 \in \mathbb{Z}_5[x]$
(iii) $h(x) = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

**Λύση.** Ο ορισμός έχει δοθεί στη Θεωρία. Παρατηρούμε ότι τα πολυώνυμα που δίνονται είναι βαθμού 2 ή 3, με συντελεστές ειλημμένους από σώμα, επομένως απο γνωστή Πρόταση έχουμε ότι τα πολυώνυμα αυτά είναι ανάγωγα αν και μόνο αν δεν έχουν ρίζες.

(i) Το $f(x)$ έχει αρνητική διακρίνουσα, κατά συνέπεια δεν έχει πραγματικές ρίζες, άρα είναι ανάγωγο.
(ii) Το $g(x)$ ικανοποιεί την $g(1) = 1 + 2 + 2 = 5 = 0$ στο $\mathbb{Z}_5$. Άρα δεν είναι ανάγωγο.
(iii) Ελέγχουμε ότι $h(0) = 1 \neq 0$ και $h(1) = 1 + 1 + 1 = 1 \neq 0$ στο $\mathbb{Z}_2$. Καθώς $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, συμπεραίνουμε ότι το $h(x)$ δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{Z}_2$, άρα είναι ανάγωγο.