Θεμελια Αλγεβρας και Γεωμετριας (Εαρινο 2021-22)
Φυλλαδιο Ασκησεων 3
Ημερομηνια: 02.06.2022

Άσκηση 1. Εάν ο μιγαδικός αριθμός z είναι μια κυβική ρίζα της μονάδας να δείξετε ότι $\bar{z} = z^2$. Μπορείτε να γενικεύσετε για ρίζες της μονάδας υψηλότερης τάξης;

Άσκηση 2. Έστω ακέραιος $n > 1$ και $\zeta \neq 1$ μια n-οστή ρίζα της μονάδας. Να δείξετε ότι $1 + \zeta + \zeta^2 + \cdots + \zeta^{n-1} = 0$.

Άσκηση 3. Βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $1 - \sqrt{3}i$.

Άσκηση 4. Εάν ρ_1, ρ_2, ρ_3 είναι όλες οι μιγαδικές ρίζες του πολυωνύμου $f(x) = x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ να δείξετε ότι $a_2 = -(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)$, $a_1 = \rho_1\rho_2 + \rho_1\rho_3 + \rho_2\rho_3$ και $a_0 = -\rho_1\rho_2\rho_3$. Μπορείτε να γενικεύσετε για πολυώνυμα μεγαλύτερου βαθμού;

Άσκηση 5. Εάν ο μιγαδικός αριθμός $2+i$ είναι ρίζα του πολυωνύμου $f(x) = 3x^2 - 10x^2 + 7x + 10$ να βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες του $f(x)$ στο $\mathbb{C}$.

Άσκηση 6. Θεωρούμε δακτύλιο πολυωνύμων $k[x]$ όπου το k είναι σώμα. Έ-στω $f(x), g(x)$ δύο πολυώνυμα στο $k[x]$ τέτοια ώστε $\deg(g(x)) \leqslant \deg(f(x)) = n$. Εάν το πλήθος των $a \in k$ για τα οποία ισχύει ότι $f(a) = g(a)$ είναι $n+1$, δείξτε ότι $f(x) = g(x)$.

Άσκηση 7. Έστω $(R, +, \cdot)$ αντιμεταθετικός δακτύλιος με μοναδιαίο στοιχείο. Δείξτε ότι για κάθε δύο στοιχεία a, b στον R και φυσικό n ισχύει ο τύπος του Νεύτωνα:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i.$$

Σημείωση: Εξ' ορισμού θεωρήστε ότι $\binom{n}{i} = 1_R + 1_R + \cdots + 1_R$ ($\binom{n}{i}$ φορές), όπου 1_R είναι το μοναδιαίο στοιχείο του R.
Υπόδειξη: Απλώς ελέγξτε ότι η απόδειξη του κλασικού τύπου του Νεύτωνα που έχουμε δει μεταφέρεται στο παρόν πλαίσιο.

Άσκηση 8. Έστω p πρώτος και θεωρούμε τον δακτύλιο $\mathbb{Z}_p$ (θυμηθείτε ότι αυτός είναι ο δακτύλιος των ακεραίων modulo p). Για κάθε δύο στοιχεία a, b στον $\mathbb{Z}_p$, δείξτε ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $(a+b)^p = a^p + b^p$ (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε την άσκηση 7 και δείξτε επίσης ότι για $i \neq 0, p$ ο p διαιρεί το $\binom{p}{i}$).
(ii) $(a-b)^p = a^p - b^p$.
(iii) $(a+b)^{p^n} = a^{p^n} + b^{p^n}$ (όπου $n \in \mathbb{N}$).