513. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΉ ΛΟΓΙΚΉ

Σημειώσεις, Χειμερινό Εξάμηνο 2024

Γιάννης Λιβιεράτος
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών

Τελευταία προσθήκη: 20/11/2024 | Τελευταία επιμέλεια: 29/10/2024

Εισαγωγή

Οι σημειώσεις αυτές γράφονται για τους/τις/τα φοιτητές/ριες/τα του τμήματος μαθηματικών του Εθνικού και Καποδιστριακού Πανεπιστημίου Αθηνών. Βασίζονται στο βιβλίο των C.C. Leary και L. Kristiansen, "A Friendly Introduction to Mathematical Logic" [1]. Επεκτείνονται και επιμελούνται συνεχώς, ως εκ τούτου θα περιέχουν και λάθη.

1 Δομές και Γλώσσες

1.1 Συντακτικό και σημασιολογία

Σε αυτό το κεφάλαιο, θα ασχοληθούμε με τον τρόπο που θα προσεγγίζουμε τα μαθηματικά αντικείμενα του ενδιαφέροντός μας. Θα διακρίνουμε μεταξύ *συντακτικής* και *σημασιολογικής* προσέγγισης. Στην πρώτη, θα ασχοληθούμε με το πως να γράφουμε μαθηματικές προτάσεις με αυστηρό φορμαλιστικό τρόπο, βάσει ενός πλήρως προσδιορισμένου συνόλου συμβόλων και αυστηρών κανόνων συνδυασμών αυτών. Στην δεύτερη, θα δούμε πως να μιλάμε περί της αλήθειας ή μη αυτών των προτάσεων, αναλόγως με την ερμηνεία που θα δίνουμε στα σύμβολά μας.

1.2 Γλώσσες

Ξεκινάμε ορίζοντας μια αυστηρή μαθηματική *γλώσσα*, ένα (αριθμήσιμο) **άπειρο** σύνολο συμβόλων δηλαδή, τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να μιλήσουμε για συγκεκριμένα μαθηματικά αντικείμενα.

Ορισμός 1.1. Μία (πρωτοβάθμια) γλώσσα $\mathcal{L}$ είναι ένα σύνολο διακεκριμένων συμβόλων, κανένα από τα οποία δεν περιέχεται σε κάποιο άλλο, τα οποία χωρίζονται στις παρακάτω κατηγορίες:

I. Λογικά σύμβολα:

1. Παρενθέσεις: $(,)$.
2. Σύνδεσμοι: $\neg, \wedge$.
3. Ποσοδείκτες: $\forall$.
4. Μεταβλητές: $\mathcal{V} = \{v_n \mid v \in \mathbb{N}\}$.

II. Παράμετροι:

1. Σύμβολο ισότητας: $=$.
2. Σύμβολα σταθερών: σύνολο $\mathcal{C}$, με $|\mathcal{C}| \geq 0$.
3. Σύνολο n-μελών συναρτησιακών συμβόλων $\mathcal{F}^n$, με $|\mathcal{F}^n| \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.
4. Σύνολο n-μελών κατηγορηματικών συμβόλων $\mathcal{R}^n$, με $|\mathcal{R}^n| \geq 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. $\diamond$

Το σύνολο συμβόλων μπορεί να υποτεθεί και πεπερασμένο αλλά επαρκώς μεγάλο για την εκάστοτε εφαρμογή, ή ακόμη και υπεραριθμήσιμο. Θα μπούμε σε τέτοιες λεπτομέρειες εφόσον και όταν χρειαστεί. Ακόμη, το $=$ μπορεί να υποτεθεί και ως διμελές κατηγορηματικό σύμβολο και ως εκ τούτου μία γλώσσα δεν το περιέχει κατ' ανάγκην. Για να αποφύγουμε όμως παρανοήσεις, θέλουμε όταν εμφανίζεται ως σύμβολο της γλώσσας να έχει συγκεκριμένη ερμηνεία.

Τα λογικά σύμβολα υπάρχουν σε κάθε γλώσσα και ως εκ τούτου δεν θα κάνουμε ειδική αναφορά σε αυτά. Για να ορίσουμε μία συγκεκριμένη γλώσσα, χρειάζεται να προσδιορίσουμε μόνο τις παραμέτρους της. Ο ρόλος που έχει το πλήθος μελών ενός συναρτησιακού ή κατηγορηματικού συμβόλου θα φανεί στην συνέχεια. Αναφέρουμε εδώ για παράδειγμα ότι ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο, ένα στοιχείο δηλαδή του συνόλου $\mathcal{F}^n$, θα χρησιμοποιείται ως συνάρτηση δύο μεταβλητών, ενώ ένα στοιχείο του $\mathcal{R}^n$ ως σχέση μεταξύ τριών μεταβλητών.

Ορίζουμε την συνάρτηση πλήθος μελών ενός συναρτησιακού ή κατηγορηματικού συμβόλου:

$$\mu : \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}^n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{R}^n\right) \to \mathbb{N},$$

με $\mu(f) = n$ (αντίστοιχα $\mu(P) = n$) αν και μόνον αν $f \in \mathcal{F}^n$ (αντίστοιχα $P \in \mathcal{R}^n$). Συχνά θα γράφουμε το πλήθος των μελών ως εκθέτη στο εκάστοτε σύμβολο. Ως εκ τούτου μία γλώσσα με τρία μονομελή και δύο διμελή συναρτησιακά σύμβολα, θα μπορούσε να έχει $\mathcal{F}^1 = \{f_1^1, f_2^1, f_3^1\}$, $\mathcal{F}^2 = \{f_1^2, f_2^2\}$ και $\mathcal{F}^n = \emptyset$, για κάθε $n \geq 3$.

Παράδειγμα 1. Ας δούμε μερικά παραδείγματα γλωσσών. Μερικές από αυτές θα επανέρχονται συνεχώς ως αντικείμενα ενασχόλησής μας.

(i) $\mathcal{L}_\emptyset = \emptyset$: η κενή γλώσσα, που περιέχει μόνον λογικά σύμβολα.

(ii) $\mathcal{L}_{ST} = \{\in^2\}$: γλώσσα με ένα διμελές κατηγορηματικό σύμβολο $\in^2 = \in$. Προορίζεται για ζητήματα της θεωρίας συνόλων, με το $\in$ να υποδηλώνει την σχέση του μέλους μεταξύ ενός στοιχείου και ενός συνόλου. Είναι λογικό να σκεφτούμε να εισάγουμε και σύμβολα για την σχέση του υποσυνόλου ή το κενό σύνολο, αλλά το να κρατήσουμε τόσο μικρή της γλώσσα μας θα φανεί χρήσιμο στην συνέχεια.

(iii) $\mathcal{L}_{G_{add}} = \{0, +^2\}$: γλώσσα με ένα σύμβολο σταθεράς και ένα διμελές συναρτησιακό σύμβολο. Προορίζεται για να εκφράζει προσθετικές ομάδες, με το 0 να είναι το ουδέτερο στοιχείο και το $+^2 = +$ η συνήθης πρόσθεση.

(iv) $\mathcal{L}_{G_{mult}} = \{1, {}^{-1^1}, \cdot^2\}$: γλώσσα με ένα σύμβολο σταθεράς, ένα μονομελές συναρτησιακό και ένα διμελές. Προορίζεται για να εκφράζει πολλαπλασιαστικές ομάδες, με το 1 να είναι το ουδέτερο στοιχείο, το ${}^{-1^1} = {}^{-1}$ να είναι η συνάρτηση του αντιστρόφου και το $\cdot^2 = \cdot$ η συνήθης πράξη του πολλαπλασιασμού.

(v) $\mathcal{L}_{NT} = \{0, S^1, +, \cdot, E^2, <^2\}$: η γλώσσα της θεωρίας αριθμών. Το μονομελές συναρτησιακό $S^1 = S$ προορίζεται να εκφράζει την συνάρτηση του επομένου. Το διμελές $E^2 =$ την ύψωση σε εκθέτη και το διμελές κατηγορηματικό $<^2 = <$ την σχέση του μικροτέρου.

(vi) $\mathcal{L}_{foo} = \{c_0, c_1, \ldots, c_k, f_1^{\mu(f_1)}, f_2^{\mu(f_2)}, \ldots, f_l^{\mu(f_l)}, P_1^{\mu(P_1)}, \ldots, P_m^{\mu(P_m)}\}$: γενική μορφή γλώσσας με k σύμβολα σταθεράς, l συναρτησιακά σύμβολα, όπου το i-οστό έχει $\mu(f_i)$ μέλη, $i = 1, \ldots, l$ και m κατηγορηματικά σύμβολα, όπου το j-οστό έχει $\mu(P_j)$ μέλη, $j = 1, \ldots, m$.

Παρ' ότι οι παράμετροι των γλωσσών, αλλά και το σύνολο από το οποίο οι μεταβλητές παίρνουν τιμές, επιδέχονται πολλών διαφορετικών ερμηνειών, σε περιπτώσεις γλωσσών όπως οι $\mathcal{L}_{ST}$ και $\mathcal{L}_{NT}$, υπάρχει ο συνηθισμένος τρόπος να ερμηνεύουμε τα σύμβολά τους. Σε αυτές τις περιπτώσεις θα μιλάμε για *κανονικές* ερμηνείες και σπανίως θα χρησιμοποιούμε διαφορετικούς τρόπους να μιλάμε για αυτά τα σύμβολα. $\diamond$

Εν γένει, όταν χρησιμοποιούμε σύμβολα όπως το $+$, δεν θα τους δίνουμε διαφορετική σημασία από την συνήθη.

Τέλος, παρατηρούμε ότι αφού μία σταθερά μπορεί να εκφραστεί ως μία συνάρτηση με 0 μέλη, και μία n-μελής συνάρτηση είναι μία $(n+1)$-μελής σχέση όπου κάθε n-άδα μεταβλητών επεκτείνεται σε ακριβώς μία $(n+1)$-άδα, είναι δυνατόν να μιλήσουμε για πρωτοβάθμιες γλώσσες χρησιμοποιώντας για παραμέτρους μόνο κατηγορηματικά σύμβολα. Υπάρχουν και άλλοι λόγοι πλην της απλής πρακτικότητας που δεν επιλέγουμε να το κάνουμε αυτό, αλλά δεν είναι της παρούσης.

1.3 Όροι και Τύποι

Μέχρι στιγμής έχουμε ορίσει μεν την γλώσσα μας, αλλά όχι τον τρόπο - τους κανόνες - με τον οποίο μπορούμε να γράφουμε. Συνεχίζουμε να συζητάμε στα πλαίσια της συντακτικής προσέγγισης: δεν μας απασχολεί η σημασία/ερμηνεία των συμβόλων μας, παρά μόνο το με ποιους τρόπους αυτά μπορούν να βρίσκονται σε σειρά, ώστε να έχει νόημα να ασχοληθούμε με αυτά.

Μία *συμβολοσειρά* (ή *λέξη*) w κάποιας γλώσσας $\mathcal{L}$, είναι μία πεπερασμένη ακολουθία συμβόλων της γλώσσας. Το μήκος $|w|$ είναι το πλήθος των συμβόλων αυτών. Η *κενή* λέξη, η συμβολοσειρά δηλαδή χωρίς κανένα σύμβολο, συμβολίζεται με ϵ.

Παράδειγμα 2. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την γλώσσα της θεωρίας αριθμών $\mathcal{L}_{NT} = \{0, S, +, \cdot, E, <\}$. Θέλουμε να διακρίνουμε μεταξύ πέντε συμβολοσειρών:

$$v_{17})(\forall + +(((0, \tag{1}$$

$$+ S0ESS0 \cdot SS0SSS0 \tag{2}$$

$$(\neg(\forall v_1)((\neg(\forall v_2)(< v_1 v_2)))) \tag{3}$$

$$\exists x \forall y (x < y) \tag{4}$$

$$\bar{1} + \bar{2}^{\bar{2} \cdot \bar{3}} \tag{5}$$

Θα ορίσουμε κανόνες ώστε η συμβολοσειρά 1 να είναι αδιάφορη ή μη επιτρεπτή, η συμβολοσειρά 2 να αναφέρεται σε κάποιο μαθηματικό αντικείμενο (με γλωσσολογικούς όρους ουσιαστικό) της γλώσσας μας, ενώ η συμβολοσειρά 3 να αποτελεί κάποια δήλωση (αληθή ή ψευδή) στην γλώσσα μας.

Χαλαρώνοντας λίγο την τυπική γραφή ώστε να ανταποκρινόμαστε στην συνήθη μαθηματική γραφή, θέλουμε η συμβολοσειρά 4 να αποτελεί *συντομογραφία* της 2 και η 5 της 3. $\diamond$

Σε ότι ακολουθεί διακρίνουμε μεταξύ του κατηγορηματικού συμβόλου $=$ και του $:=$. Το $:=$ θα είναι σύμβολο της φυσικής μας γλώσσας, της *μετα-γλώσσας*, που θα χρησιμοποιούμε για να ορίζουμε μεταβλητές με συγκεκριμένες τιμές. Για παράδειγμα, γράφοντας $s := (\forall v_1)(= P^2 v_1 f^1 c_1 c_0)$ εννοούμε ότι η μεταβλητή s, που υπάρχει στην μετα-γλώσσα μας, αναφέρεται στην συμβολοσειρά που ακολουθεί.

Ορισμός 1.2. Έστω μία γλώσσα $\mathcal{L}$. Μία συμβολοσειρά t της $\mathcal{L}$ θα λέγεται *όρος* αν:

1. η t είναι μεταβλητή ή σύμβολο σταθεράς,
2. ή $t := f t_1 t_2 \cdots t_n$, όπου f ένα n-μελές συναρτησιακό σύμβολο και $t_1, \ldots, t_n$ όροι. $\diamond$

Παράδειγμα 3. Η συμβολοσειρά 2 του παρ. 2 είναι όρος:

- Το διμελές συναρτησιακό σύμβολο $+$ ακολουθείται από δύο όρους, τους $S0$ και $ESS0 \cdot SS0SSS0$.
- Η $S0$ είναι όρος καθώς το μονομελές συναρτησιακό S ακολουθείται από τον όρο σταθερά 0.
- Η $ESS0 \cdot SS0SSS0$ είναι επίσης όρος, καθώς το διμελές συναρτησιακό E ακολουθείται από τους όρους $SS0$ και $\cdot SS0SSS0$.
- Η $SS0$ είναι όρος, καθώς το 0 είναι σταθερά και ακολουθεί το S και το $S0$ ως όρος ακολουθεί το S.
- Η $\cdot SS0SSS0$ καθώς οι $SS0$ και $SSS0$ είναι.

Οι συμβολοσειρές 1, 3 του παρ. 2 δεν είναι όροι, καθώς περιέχουν σύμβολα που δεν εμφανίζονται στον Ορ. 1.2. $\diamond$

Παρατηρούμε επίσης ότι ο ορισμός του όρου είναι αναδρομικός. Ως εκ τούτου, για να παράγουμε όρους της γλώσσας μας, ξεκινάμε από μεταβλητές και σταθερές και τις συνδυάζουμε με κατάλληλα συναρτησιακά σύμβολα ώστε να φτιάχνουμε όλο και πιο πολύπλοκα αντικείμενα.

Ορισμός 1.3. Έστω μία γλώσσα $\mathcal{L}$. Μία συμβολοσειρά ϕ της $\mathcal{L}$ θα λέγεται *τύπος* (*φόρμουλα*) αν:

1. $\phi := = t_1 t_2$, όπου t_1, t_2 όροι,

2. $\phi := P t_1 t_2 \cdots t_n$, όπου P ένα n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο και $t_1, \ldots, t_n$ όροι,

3. $\phi := (\neg \psi)$, όπου ψ τύπος,

4. $\phi := (\psi \vee \chi)$, όπου ψ, χ τύποι,

5. $\phi := (\forall v)(\psi)$, όπου ψ τύπος και $v \in \mathcal{V}$.

Αν ϕ είναι τύπος των περιπτώσεων 1 ή 2, θα λέγεται *ατομικός* τύπος. $\diamond$

Ο ορισμός των τύπων είναι επίσης αναδρομικός (λόγω των περιπτώσεων 3 έως 5). Στην περίπτωση 5, θα λέμε ότι η *εμβέλεια* του ποσοδείκτη $\forall v$ στον τύπου ϕ είναι ο τύπος ψ.

Παράδειγμα 4. Η συμβολοσειρά 3 του παρ. 2 είναι τύπος:

- Τα v_1, v_2 είναι μεταβλητές, άρα όροι. Ως εκ τούτου το διμελές κατηγορηματικό $<$ ακολουθούμενο από αυτούς, είναι ατομικός τύπος.

- Ο ατομικός τύπος $< v_1 v_2$ βρίσκεται στην εμβέλεια του ποσοδείκτη $\forall v_2$.

- Η $(\neg(\forall v_2)(< v_1 v_2))$ είναι τύπος, αφού η $(\forall v_2)(< v_1 v_2)$ είναι τύπος και βρίσκεται στην εμβέλεια του $\forall v_1$.

- Αφού η $(\forall v_1)((\neg(\forall v_2)(< v_1 v_2)))$ είναι τύπος, το ίδιο ισχύει και για την
$$(\neg(\forall v_1)((\neg(\forall v_2)(< v_1 v_2)))).$$

1.4 Επαγωγή

Έστω $P(n)$ μία ιδιότητα που αναφέρεται σε φυσικούς αριθμούς. Π.χ. "Κάθε φυσικός n έχει επόμενο", ή "Κάθε υποσύνολο φυσικών αριθμών με n στοιχεία έχει 2^n υποσύνολα", ή "κάθε αλγεβρική παράσταση με περισσότερες από n προσθέσεις πάνω σε θετικούς αριθμούς, καταλήγει σε αποτέλεσμα μεγαλύτερο του n". Σε κάθε σύνολο διακριτών αντικειμένων που μπορούν να οριστούν *αναδρομικά*, μπορούμε να δουλέψουμε επαγωγικά για να εξάγουμε συμπεράσματα της μορφής $\forall n\ P(n)$, ή $\forall n \geq m\ P(n)$, όπου $m \in \mathbb{N}$ και όπου $P(n)$ είναι η δήλωση "ισχύει η ιδιότητα n για το/τα αντικείμενο/α (μεγέθους/που έχουν παράμετρο ίση με) n". Αναδρομικός ορισμός σημαίνει ότι το αντικείμενο που ορίζεται από την ιδιότητα $P(n)$ μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση αντικειμένων που ορίζονται από ιδιότητες $P(k)$, $k < n$.

Βάσει των ορισμών 1.2, 1.3, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε δύο ειδών επαγωγές σε όρους και τρία σε τύπους. Οι τρόποι είναι επαγωγή στην (i) πολυπλοκότητα, (ii) στην δομή και (iii) στο μήκος του όρου ή του τύπου. Τα (i) και (iii) αφορούν όρους, ενώ και οι τρεις μέθοδοι μπορούν να εφαρμοστούν σε τύπους. Θα τα δούμε με παραδείγματα.

Αρχικό τμήμα μίας συμβολοσειράς $w := w_1 w_2 \cdots w_n$, είναι κάθε συμβολοσειρά $w_1 w_2 \cdots w_i$, για $0 \leq i \leq n-1$.

Πρόταση 1.1. Δεν υπάρχει αρχικό τμήμα όρου που να είναι όρος.

Απόδειξη: Θα δουλέψουμε με επαγωγή στην *πολυπλοκότητα* του όρου. Έστω t μεταβλητή ή σταθερά. Και στις δύο περιπτώσεις, το μόνο αρχικό τμήμα του t είναι η κενή λέξη ϵ, που δεν είναι όρος. Έστω τώρα ότι το ζητούμενο ισχύει για όρους $t_1, \ldots, t_n$ και f ένα n-μελές συναρτησιακό σύμβολο, με $t := ft_1 \cdots t_n$.

Έστω t' αρχικό τμήμα του t. Αν $t' := \epsilon$ ή $t' := f$, τότε δεν είναι όρος. Το ίδιο κι αν $t' := ft_1 \cdots t_k$, $k < n$, αφού $\mu(f) = n$. Έπεται ότι $t' := ft'_1 \cdots t'_n$, όπου υπάρχει t'_i που είναι αρχικό τμήμα κάποιου όρου t_j, για κάποια $1 \leq i, j \leq n$. Άτοπο, αφού τότε το t'_i δεν είναι όρος. □

Πρόταση 1.2. Δεν υπάρχει αρχικό τμήμα τύπου που να είναι τύπος.

Η απόδειξη της Πρ. 1.2 αφήνεται ως άσκηση. Περνάμε σε ένα αποτέλεσμα που έχει ενδιαφέρον μόνο στην περίπτωση των τύπων, καθώς για όρους ισχύει προφανώς (γιατί;):

Λήμμα 1.1. Κάθε τύπος έχει ίδιο πλήθος αριστερών και δεξιών παρενθέσεων.

Απόδειξη: Θα δουλέψουμε με επαγωγή στην *δομή* των τύπων. Για κάθε τύπο ϕ, έστω l_ϕ το πλήθος των αριστερών του παρενθέσεων και r_ϕ το πλήθος των δεξιών.

Έστω τύπος ϕ χωρίς συνδέσμους και ποσοδείκτες. Τότε είναι ατομικός, άρα $l_\phi = r_\phi = 0$. Έστω τώρα ότι ισχύει το ζητούμενο για κάθε τύπο με το πολύ $k \geq 0$ συνδέσμους και ποσοδείκτες και έστω τύπος ϕ με $k+1$ συνδέσμους και ποσοδείκτες. Αρχικά, αφού $k + 1 \geq 1$, ο ϕ δεν είναι ατομικός.

- Αν $\phi = (\neg\psi)$, τότε ψ τύπος με k συνδέσμους και ποσοδείκτες. Ως εκ τούτου, $l_\psi = r_\psi$, άρα και:
$$l_\phi = l_\psi + 1 = r_\psi + 1 = r_\phi.$$

- Αν $\phi = (\psi \vee \chi)$, τότε ψ, χ τύποι με το πολύ k συνδέσμους και ποσοδείκτες ο καθένας. Ως εκ τούτου, $l_\psi = r_\psi$, $l_\chi = r_\chi$, άρα και:
$$l_\phi = l_\psi + l_\chi + 1 = r_\psi + r_\chi + 1 = r_\phi.$$

- Αν $\phi = (\forall v)(\psi)$, τότε ψ τύπος με k συνδέσμους και ποσοδείκτες. Ως εκ τούτου, $l_\psi = r_\psi$, άρα και:
$$l_\phi = l_\psi + 2 = r_\psi + 2 = r_\phi.$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα που θα δούμε ισχύει και για όρους και για τύπους. Αφήνουμε την δεύτερη περίπτωση ως άσκηση.

Θεώρημα 1.1 (Θεώρημα Μοναδικής Αναγνωσιμότητας για όρους)**.** Έστω t όρος. Τότε ισχύει *ακριβώς ένα* από τα ακόλουθα:

(i) υπάρχει μοναδική μεταβλητή $v_i \in \mathcal{V}$ με $t := v_i$ ή

(ii) υπάρχει μοναδικό σύμβολο σταθεράς c με $t := c$ ή

(iii) υπάρχουν μοναδικό n-μελές συναρτησιακό σύμβολο f και μοναδικοί όροι $t_1, \ldots, t_n$, με $t := ft_1 \cdots t_n$.

Απόδειξη: Θα κάνουμε επαγωγή στο *μήκος* του t. Αν $t = 1$, τότε προφανώς t είναι σε ακριβώς μία από τις περιπτώσεις (i) ή (ii), και η μοναδικότητα γραφής του προκύπτει επίσης άμεσα, καθώς κάθε μεταβλητή και σύμβολο σταθεράς είναι μοναδικό. Έστω τώρα ότι ισχύει το ζητούμενο για όλους τους όρους μήκους το πολύ $m \geq 0$ και έστω ένας όρος t μήκους m. Εξετάζουμε δύο περιπτώσεις:

1. Έστω $t := ft'$, όπου f μονομελές συναρτησιακό σύμβολο και t' όρος μήκους m. Έπεται ότι ο t' έχει μοναδική γραφή σε ακριβώς μία εκ των περιπτώσεων (i)–(iii), ως εκ τούτου το ίδιο ισχύει και για τον t, αφού κάθε συναρτησιακό σύμβολο είναι μοναδικό.

2. Έστω $t := ft_1 \cdots t_n$, όπου f n-μελές συναρτησιακό σύμβολο και $t_1, \ldots, t_n$ όροι μήκους το πολύ m ο καθένας. Έστω επίσης ότι $t := gt'_1 \cdots t'_{n'}$, με g n'-μελές συναρτησιακό σύμβολο και $t'_1, \ldots, t'_n$ όροι μήκους το πολύ m ο καθένας.

   Αφού κάθε συναρτησιακό σύμβολο είναι μοναδικό, έπεται ότι $f = g$. Ως εκ τούτου $n = n'$. Έστω τώρα, προς άτοπο, ότι $j = \min\{1 \leq i \leq n \mid t_i \neq t'i\}$. Έπεται πως είτε t_j αρχικό τμήμα του t'_j, είτε το ανάποδο. Τότε, είτε το t_j είτε το t'_j δεν είναι όροι. Άτοπο. $\square$

Έχουμε λοιπόν τα τρία γενικά είδη επαγωγής. Η επαγωγή στην πολυπλοκότητα ενός όρου/τύπου, αναφέρεται στον αναδρομικό ορισμό τους, με τις δύο πρώτες περιπτώσεις όρου/τύπου να αποτελούν την βάση και στις συνέχεια να χρησιμοποιούμε ως υπόθεση ότι το ζητούμενο ισχύει για απλούστερους όρους/τύπους. Αυτή είναι και η πιο "φυσιολογική" επαγωγή για να χρησιμοποιήσουμε όταν μιλάμε για πρωτοβάθμιες γλώσσες. Η επαγωγή στο πλήθος των συνδέσμων/ποσοδεικτών (δομή) ή στο πλήθος των συμβόλων (μήκος) παραπέμπουν πιο πολύ σε μια πιο "κλασσική" επαγωγή επί του συνόλου των φυσικών αριθμών. Η επαγωγή στην δομή δεν έχει νόημα στους όρους, καθώς δεν έχουν συνδέσμους και ποσοδείκτες.

Παρατηρείστε επίσης ότι όταν μας χρειάζεται, μπορούμε να υποθέτουμε ότι κάτι ισχύει για όλους τους όρους/τύπους που έχουν μικρότερη πολυπλοκότητα/μήκος ή απλούστερη δομή από αυτούς που εξετάζουμε στο επαγωγικό βήμα. Αυτό αντιστοιχεί στην λεγόμενη "ισχυρή επαγωγή", όπου υποθέτουμε ότι η $P(k)$ ισχύει για κάθε $k \leq n$. Ξέρουμε ότι αυτού του είδους η επαγωγή είναι ισοδύναμη με την "απλή".

1.5 Προτάσεις

Επανερχόμαστε στην γλώσσα $\mathcal{L}_{NT} = \{0, S, +, \cdot, E, <\}$ που ορίστηκε στο Παρ. 1 και εξετάζουμε τους ακόλουθους δύο τύπους:

$$\begin{aligned} \phi :=& (\neg(\forall x)((< yx \vee = yx))), \\ \psi :=& (\forall x)((\forall y)((< xy \vee (= xy \vee < yx)))). \end{aligned} \tag{6}$$

Μιλώντας ακόμη άτυπα περί της σημασίας των τύπων μας, μπορούμε να παρατηρήσουμε πως υπό μια "φυσιολογική" ερμηνεία των συμβόλων της $\mathcal{L}_{NT}$, ο τύπος ϕ σημαίνει ότι δεν είναι όλα τα x μεγαλύτερα ή ίσα του y. Ή αντίστοιχα, ότι υπάρχει x που είναι γνησίως μικρότερο του y. Αναλόγως τώρα με του τι τιμές επιτρέπεται να πάρουν οι x, y, αλλά και με την συγκεκριμένη τιμή του y, ο τύπος αυτός λέει κάτι που ισχύει ή όχι. Π.χ., αν $x, y \in \mathbb{N}$ και $y = 0$, τότε δεν ισχύει. για οποιαδήποτε άλλη τιμή του y, ισχύει.

Από την άλλη, ο τύπος y μας λέει ότι κάθε δύο αριθμοί είναι ίσοι, ή ο ένας είναι μικρότερος του άλλου. Κάτι που ισχύει ή όχι, ανεξαρτήτως των τιμών των x, y. Είτε πρέπει δηλαδή να ισχύει για όλες, είτε αρκεί ένα ζεύγος τιμών για να το καταρρίψει. Οι τύποι ϕ και ψ λοιπόν έχουν μία ουσιαστική διαφορά, την οποία θα ορίσουμε τυπικά εδώ. Η σημασία της όπως θα φανεί καθαρά στην επόμενη παράγραφο.

Ορισμός 1.4. Έστω $v \in \mathcal{V}$ και ϕ τύπος. Μία εμφάνιση της v στον τύπο ϕ θα λέγεται *ελεύθερη* αν:

- ο ϕ είναι ατομικός και η v εμφανίζεται στον ϕ, ή
- $\phi := (\neg\psi)$ και v εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ, ή
- $\phi := (\psi \vee \chi)$ και v εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ ή στον χ, ή

- $\phi := (\forall u)(\psi)$, $v \neq u$ και v εμφανίζεται ελεύθερη στον ψ. Ο τύπος ψ σε αυτήν την περίπτωση λέμε πως είναι η εμβέλεια του ποσοδείκτη $\forall u$.

Μία εμφάνιση της v στον τύπο ϕ θα λέγεται *δεσμευμένη* αν δεν είναι ελεύθερη. Ισοδύναμα, αν είναι στην εμβέλεια ενός ποσοδείκτη.

Ένας τύπος ϕ είναι *πρόταση* αν έχει μόνο δεσμευμένες εμφανίσεις μεταβλητών.

Βάσει του ορισμού, μία μεταβλητή μπορεί να έχει και ελεύθερες και δεσμευμένες εμφανίσεις σε έναν τύπο. Για παράδειγμα, στον τύπο $((\forall x)((\neg x)) \vee x)$, η x εμφανίζεται και δεσμευμένη (1η εμφάνιση) και ελεύθερη (2η εμφάνιση). Θα προσπαθούμε να αποφεύγουμε τέτοια μπερδέματα, προτιμώντας να γράφουμε $((\forall x)((\neg x)) \vee y)$. Θα δούμε στην συνέχεια πότε, ή καλύτερα πως, μπορούμε να το κάνουμε αυτό. Σε κάθε περίπτωση, θα γράφουμε συχνά $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ για να υποδηλώσουμε ότι οι μεταβλητές $x_1, \ldots, x_n$ εμφανίζονται ελεύθερες στον ϕ.

Ο τύπος ϕ που ορίστηκε στην εξίσωση (6) δεν είναι πρόταση, καθώς έχει ελεύθερη εμφάνιση της y. Ο ψ που ορίστηκε στο ίδιο σημείο, είναι πρόταση.

1.6 Δομές

Ήρθε η ώρα να συστηματοποιήσουμε το "νόημα" των πραγμάτων που γράφουμε με τους κανόνες που ορίσαμε στις προηγούμενες παραγράφους. Θα ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 5. Έστω η γλώσσα $\mathcal{L} = \{c, f_0^1, f_1^2, f_2^2, f_3^2, P^2\}$, με c σύμβολο σταθεράς, f_i, $i = 0, 1, 2, 3$ συναρτησιακά σύμβολα και P κατηγορηματικό σύμβολο. Έστω $\mathfrak{A}$ ένας τρόπος να ερμηνεύσουμε τα σύμβολά μας. Με $X^{\mathfrak{A}}$ θα συμβολίζουμε την ερμηνεία του $X \in \mathcal{L}$.

Έστω λοιπόν ότι $c^{\mathfrak{A}} = \emptyset$, $f_0^{\mathfrak{A}}(X) = X^c := \{x \mid x \notin X\}$, $f_1^{\mathfrak{A}}(X, Y) = X \cup Y$, $f_2^{\mathfrak{A}}(X, Y) = X \cap Y$, $f_3^{\mathfrak{A}}(X, Y) = X \times Y$ και $P^{\mathfrak{A}} = \{(X, Y) \mid X \subseteq Y\}$. Μπορούμε πλέον να δουλέψουμε με την γλώσσα $\mathcal{L}$ για να μιλήσουμε για θεωρία συνόλων. Με μία εξαίρεση: δεν ξέρουμε για τι είδους σύνολα μιλάμε. Μπορεί αυτό να φαίνεται εκ πρώτης όψεως περίεργο σχόλιο, καθώς συνήθως γράφουμε την φράση "έστω ένα σύνολο", χωρίς κάποια άλλη αναφορά. Όμως, αυτό είτε συμβαίνει στα πλαίσια ενός συγκεκριμένου μαθηματικού αντικειμένου, οπότε τα υπονοείται τι είδους σύνολα εξετάζουμε, είτε στην πιο αφηρημένη "αφελή" θεωρία συνόλων, που οδηγεί σε προβλήματα (παράδοξο Russell [2]).

Θα χρειαζόμαστε λοιπόν η ερμηνεία μας $\mathfrak{A}$ να μας δίνει και το σύνολο αναφοράς των μεταβλητών μας $|\mathfrak{A}|$. Στην προκείμενη περίπτωση, θα χρησιμοποιήσουμε το *δυναμοσύνολο των φυσικών αριθμών*:

$$P(\mathbb{N}) := \{X \mid X \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Έτσι, γράφοντας πλέον:

$$(\forall v_1)((\forall v_2)(P f_0 f_1 v_1 v_2 f_2 f_0 v_1 f_0 v_2)),$$

θα εννοούμε ότι για κάθε δύο σύνολα $X, Y \subseteq \mathbb{N}$:

$$(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c,$$

που είναι ο γνωστός νόμος De Morgan.

Μπορούμε όμως να δώσουμε και διαφορετική ερμηνεία $\mathfrak{B}$ στα σύμβολα της $\mathcal{L}$. Να δώσουμε σύνολο αναφοράς των μεταβλητών το $\mathbb{N}$ και να ερμηνεύσουμε τα σύμβολα ως εξής: $c^{\mathfrak{B}} = 0$, $f_0^{\mathfrak{B}}(n) = n + 1$, $f_1^{\mathfrak{B}}(n, m) = n + m$, $f_2^{\mathfrak{B}}(n, m) = n \cdot m$, $f_3^{\mathfrak{B}}(n, m) = n^m$ και $P^{\mathfrak{B}} = \{(n, m) \mid x < y\}$.

Αυτή η δεύτερη ερμηνεία θα λέγεται *κανονική* για την γλώσσα της θεωρίας αριθμών, και θα την συμβολίζουμε με $\mathfrak{N}$. Η ερμηνεία αυτή μπορεί όπως είναι προφανές, να δοθεί σε οποιαδήποτε γλώσσα με τις παραπάνω παραμέτρους. Θα λέμε όμως ότι είναι κανονική για την γλώσσα $\mathcal{L}_{NT} = \{0, S, +, \cdot, E, <\}$.

Από το Παρ. 5, πρέπει να γίνει σαφές το εξής. Το 0 στην $\mathcal{L}_{NT}$, είναι απλώς ένα σύμβολο. Άπαξ και ερμηνευτεί από την $\mathfrak{N}$, παραμένει να γράφεται με τον ίδιο τρόπο, όμως τώρα αποκτάει ένα συγκεκριμένο νόημα. Είναι πλέον το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης.

Ας ολοκληρώσουμε την παράγραφο με ένα ιδιαίτερο, και ίσως λίγο περίεργο, παράδειγμα δομών, τις *δομές Henkin*, οι οποίες πρωτοεμφανίστηκαν στην διδακτορική διατριβή του Leon Henkin το 1949. Η βασική παρατήρηση που χρειάζεται να κάνουμε είναι πως το σύμπαν μίας δομής είναι ένα οποιοδήποτε σύνολο, ακόμη κι ένα υποσύνολο των συμβόλων της γλώσσας.

Παράδειγμα 6. Έστω $\mathcal{L} = \{0, f, g\}$, όπου 0 σύμβολο σταθεράς, f 1-μελές και g 2-μελές συναρτησιακά σύμβολα. Ορίζουμε την δομή $\mathfrak{B}$, με $|\mathfrak{B}| = \{t \mid t \text{ όρος χωρίς μεταβλητές της } \mathcal{L}\}$, $f^{\mathfrak{B}}(t) = ft$ και $g^{\mathfrak{B}}(s, t) = gts$, για κάθε $\mathcal{L}$-όρους s, t.

Υπό αυτήν την ερμηνεία, ο όρος $f0$ υποδηλώνει στοιχείο του σύμπαντος $|\mathfrak{B}|$. Συγκεκριμένα το $(f0)^{\mathfrak{B}} = f^{\mathfrak{B}}(0^{\mathfrak{B}}) = f0$, ενώ ο $gf00$ το... $gf00$. Αυτού του είδους η κυκλικότητα θα μας φανεί χρήσιμη στην απόδειξη του Θεωρήματος της Πληρότητας. $\diamond$

1.7 Αλήθεια

Ήρθε η ώρα να συνδυάσουμε το συντακτικό με την σημασιολογία. Έχουμε ήδη θέσει κάποιους τυπικούς κανόνες για το τι είναι μία γλώσσα και για το πως αναγνωρίζουμε τους όρους, τους τύπους και τις προτάσεις μίας γλώσσας. Έχοντας πλέον ορίσει και το τι σημαίνει δομή για μία γλώσσα, μπορούμε πλέον να μιλήσουμε για το τι σημαίνει ένας τύπος της να είναι αληθής σε μία δομή.

Το πρώτο και βασικό εργαλείο που θα χρειαστούμε είναι οι *απονομές αληθοτιμών*, τις συναρτήσεις δηλαδή που θα χρησιμοποιούμε για να ερμηνεύουμε όρους και τύπους εντός μίας συγκεκριμένης δομής.

Ορισμός 1.5. Έστω $\mathcal{L}$ μία γλώσσα και $\mathfrak{A}$ μια $\mathcal{L}$-δομή. Μία απονομή αληθοτιμών *στις μεταβλητές (αποτίμηση)* της $\mathcal{L}$ είναι μία συνάρτηση $s : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$.

Μία απονομή αληθοτιμών s λοιπόν αποτιμά όλο το $\mathcal{V}$. Εν γένει, θα μας ενδιαφέρουν οι τιμές της s στο πεπερασμένο υποσύνολο μεταβλητών που εμφανίζεται σε κάποιους όρους ή τύπους. Ο ένας τρόπος, που από μαθηματικής σκοπιάς δεν είναι πολύ αυστηρός, είναι να μιλάμε για τις τιμές των μεταβλητών π.χ. (x, y, z, w) με το διάνυσμα (a, b, c, d), όπου $a, b, c, d \in ||\mathfrak{A}|$. Ποιο σωστά, θα χρησιμοποιούμε τον παρακάτω συνήθη συμβολισμό.

Ορισμός 1.6. Έστω $\mathcal{L}$ μία γλώσσα, $\mathfrak{A}$ μια $\mathcal{L}$-δομή και $s : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$ μία αποτίμηση. Έστω ακόμη $x \in \mathcal{V}$ και $a \in |\mathfrak{A}|$. Η αποτίμηση $s[x|a]$ ορίζεται ως εξής:

$$s[x|a](v) = \begin{cases} s(v), & \text{αν } v \neq x, \\ a, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Μπορούμε να σκεφτόμαστε την $s[x|a]$ είτε ως μια παραλλαγή κάποιας άλλης αποτίμησης s, είτε ως τον ορισμό μίας συγκεκριμένης τιμής για την αποτίμηση s. Σε περίπτωση που χρειαστεί, μπορούμε να επεκτείνουμε τον συμβολισμό:

$$s[x_1|a_1,\ x_2|a_2,\dots,x_n|a_n](v) = \begin{cases} a_1, & \text{αν } v = x_1, \\ a_2, & \text{αν } v = x_2, \\ \vdots & \\ a_n, & \text{αν } v = x_n, \\ s(v), & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Ας επεκτείνουμε τώρα τις απονομές μας για να αποτιμούν όρους.

Ορισμός 1.7. Έστω $\mathcal{L}$ μία γλώσσα και $\mathfrak{A}$ μια $\mathcal{L}$-δομή και $s : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$ μία αποτίμηση. Η *επέκταση* της s στους *όρους* της $\mathcal{L}$, είναι η συνάρτηση $\bar{s} : \{t \mid t\ \mathcal{L} - \text{όρος}\} \to |\mathfrak{A}|$, που ορίζεται αναδρομικά ως εξής:

- $\bar{s}(t) = s(t)$, αν t μεταβλητή,
- $\bar{s}(c) = c^{\mathfrak{A}}$, αν t σύμβολο σταθεράς,
- $\bar{s}(t) = f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}(t_1), \bar{s}(t_2), \dots, \bar{s}(t_n))$, αν $t := ft_1 \cdots t_n$, για f n-μελές συναρτησιακό σύμβολο και $t_1, \dots, t_n$ όρους.

Για να μπορούμε να δουλέψουμε με τις απονομές αληθοτιμών, πρέπει η επεκτάσεις τους στο σύνολο των όρων μιας γλώσσας να είναι μοναδική. Δείχνουμε ακριβώς αυτό, εντός της $\mathcal{L}$-δομής που ορίζεται η απονομή. Για έναν όρο t (αντίστοιχα τύπο ϕ) ορίζουμε ως $\mathcal{V}(t)$ (αντίστοιχα $\mathcal{V}(\phi)$) να είναι το σύνολο των μεταβλητών που εμφανίζονται στον t (αντίστοιχα που εμφανίζονται ελεύθερες στον ϕ).

Λήμμα 1.2. Έστω $\mathcal{L}$-δομή $\mathfrak{A}$, t ένας $\mathcal{L}$-όρος και απονομές αληθοτιμών s_1, $s_2 : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$. Αν $s_1(v) = s_2(v)$ για κάθε $v \in \mathcal{V}(t)$, τότε $\bar{s}_1(t) = \bar{s}_2(t)$.

Απόδειξη: Αν t μεταβλητή ή σύμβολο σταθεράς, το αποτέλεσμα είναι άμεσο. Έστω ότι ισχύει για όρους $t_1, \dots, t_n$ και έστω $t := ft_1 \cdots t_n$, όπου $t_1, \dots, t_n$ όροι και f n-μελές συναρτησιακό σύμβολο. Τότε:

$$\begin{aligned} \bar{s}_1(t) =& f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}_1(t_1), \bar{s}_1(t_2), \dots, \bar{s}_1(t_n)) \\ =& f^{\mathfrak{A}}(\bar{s}_2(t_1), \bar{s}_2(t_2), \dots, \bar{s}_2(t_n)) \\ =& \bar{s}_2(t), \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Είμαστε έτοιμα πλέον να μιλήσουμε για την αλήθεια ενός τύπου. Θα ακολουθήσουμε το μοντέλο του Πολωνού μαθηματικού Alfred Tarski.

Ορισμός 1.8. Έστω μία $\mathcal{L}$-δομή $\mathfrak{A}$, μία απονομή αληθοτιμών $s : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$ και ένας $\mathcal{L}$-τύπος ϕ. Θα λέμε ότι ο ϕ αληθεύει υπό την s στην $\mathfrak{A}$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Αν $\phi := = t_1 t_2$, με t_1, t_2 όρους και $\bar{s}(t_1)$ είναι το ίδιο με το $\bar{s}(t_2)$.

(ii) Αν $\phi := Rt_1t_2 \cdots t_n$, με $t_1, t_2, \dots, t_n$ όρους, R n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο και

$$(\bar{s}(t_1), \bar{s}(t_2), \dots, \bar{s}(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}}.$$

(iii) Αν $\phi := (\neg\psi)$, με ψ τύπο που δεν αληθεύει υπό την s στην $\mathfrak{A}$.

(iv) Αν $\phi := (\psi \vee \chi)$, με τουλάχιστον έναν εκ των τύπων ψ ή χ να αληθεύει υπό την s στην $\mathfrak{A}$.

(v) Αν $\phi := (\forall x)(\psi)$ και τον τύπο ψ να αληθεύει υπό την $s(x|a)$ στην $\mathfrak{A}$ για κάθε $a \in |\mathfrak{A}|$.

Συμβολικά, θα γράφουμε $\models_{\mathfrak{A}} \phi[s]$ ή $\mathfrak{A} \models \phi[s]$ για τύπο ϕ που αληθεύει υπό την s στην $\mathfrak{A}$. Αντίστοιχα, με $\not\models_{\mathfrak{A}} \phi[s]$ θα εννοούμε ότι ο ϕ δεν αληθεύει υπό την s στην $\mathfrak{A}$. Ακόμη, αν Γ σύνολο τύπων με $\models_{\mathfrak{A}} \gamma[s]$ για κάθε $\gamma \in \Gamma$, θα γράφουμε $\models_{\mathfrak{A}} \Gamma[s]$. Τονίζουμε ότι στην περίπτωση αυτή, όλοι οι τύποι $\gamma \in \Gamma$ αληθεύουν ταυτόχρονα υπό την ίδια αποτίμηση s στην δομή $\mathfrak{A}$. ◇

Ως συνέχεια του Λήμματος 1.2, η Πρόταση 1.3 συνεπάγεται ότι ο ορισμός αληθοτιμών στις ελεύθερες μεταβλητές ενός τύπου καθορίζει μονοσήμαντα την αλήθεια ή μη του τύπου στην δομή.

Πρόταση 1.3. Έστω ϕ ένας $\mathcal{L}$-τύπος, $\mathfrak{A}$ μία $\mathcal{L}$-δομή και $s_1, s_2 : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$ μία απονομή αληθοτιμών. Αν $s_1(v) = s_2(v)$, για κάθε $v \in \mathcal{V}(\phi)$, τότε:

$$\models_{\mathfrak{A}} \phi[s_1] \text{ αν και μόνον αν } \models_{\mathfrak{A}} \phi[s_2].$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στην πολυπλοκότητα του ϕ. Έστω $\phi := = t_1 t_2$, με t_1, t_2 $\mathcal{L}$-όροι. Από το Λήμμα 1.2, $\bar{s}_1(t_1) = \bar{s}_2(t_1)$ και $\bar{s}_1(t_2) = \bar{s}_2(t_2)$. Έπεται πως:

$$\mathfrak{A} \models (= t_1 t_2)[s_1] \text{ αν και μόνον αν } \mathfrak{A} \models (= t_1 t_2)[s_2].$$

Έστω $\phi := Pt_1 t_2 \cdots t_n$, με $t_1, t_2, \ldots, t_n$ $\mathcal{L}$-όροι και P n-μελές κατηγοριματικό σύμβολο. Από το Λήμμα 1.2, $\bar{s}_1(t_i) = \bar{s}_2(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Έπεται πως:

$$\begin{aligned} &(\bar{s}_1(t_1), \bar{s}_1(t_2), \ldots, \bar{s}_1(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}} \text{ αν και μόνον αν } (\bar{s}_2(t_1), \bar{s}_2(t_2), \ldots, \bar{s}_2(t_n)) \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \\ &\mathfrak{A} \models Pt_1 t_2 \cdots t_n[s_1] \text{ αν και μόνον αν } \mathfrak{A} \models Pt_1 t_2 \cdots t_n[s_2] \end{aligned}$$

Έστω $\phi := \neg\psi$, με το ζητούμενο να ισχύει για τον ψ. Τότε:

$$\begin{aligned} &\models_{\mathfrak{A}} \psi[s_1] \text{ αν και μόνον αν } \models_{\mathfrak{A}} \psi[s_2] \Leftrightarrow \\ &\not\models_{\mathfrak{A}} \neg\psi[s_1] \text{ αν και μόνον αν } \not\models_{\mathfrak{A}} \neg\psi[s_2] \Leftrightarrow \\ &\models_{\mathfrak{A}} \neg\psi[s_1] \text{ αν και μόνον αν } \models_{\mathfrak{A}} \neg\psi[s_2]. \end{aligned}$$

Έστω $\phi := (\psi \vee \chi)$, με το ζητούμενο να ισχύει για τους ψ και χ. Αν $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s_1]$, τότε $\models_{\mathfrak{A}} (\psi \vee \chi)[s_1]$ και $\models_{\mathfrak{A}} \psi[s_2]$. Άρα $\models_{\mathfrak{A}} (\psi \vee \chi)[s_2]$. Αλλιώς, αν $\models_{\mathfrak{A}} \chi[s_1]$, έχουμε πάλι $\models_{\mathfrak{A}} (\psi \vee \chi)[s_1]$ και $\models_{\mathfrak{A}} \chi[s_2]$, άρα και $\models_{\mathfrak{A}} (\psi \vee \chi)[s_2]$. Τέλος, αν $\not\models_{\mathfrak{A}} \psi[s_1]$ και $\not\models_{\mathfrak{A}} \chi[s_1]$, τότε $\not\models_{\mathfrak{A}} (\psi \vee \chi)[s_1]$, $\not\models_{\mathfrak{A}} \psi[s_2]$ και $\not\models_{\mathfrak{A}} \chi[s_2]$. Άρα και $\not\models_{\mathfrak{A}} (\psi \vee \chi)[s_2]$.

Τέλος, έστω $\phi := (\forall v)\chi$, με το ζητούμενο να ισχύει για τον ψ. Αν η v δεν έχει ελεύθερη εμφάνιση στον ψ, τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Έστω ότι έχει. Τότε:

$$\begin{aligned} &\models_{\mathfrak{A}} \phi[s_1] \text{ αν και μόνον αν } \models_{\mathfrak{A}} \phi[s_2] \Leftrightarrow \\ &\models_{\mathfrak{A}} (\forall v)\chi[s_1] \text{ αν και μόνον αν } \models_{\mathfrak{A}} (\forall v)\chi \Leftrightarrow \\ &\text{για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : \models_{\mathfrak{A}} \chi[s_1[v|a]] \text{ αν και μόνον αν για κάθε } a \in |\mathfrak{A}| : \models_{\mathfrak{A}} \chi[s_2[v|a]], \end{aligned}$$

το οποίο και ισχύει από το Λήμμα 1.2, καθώς οι απονομές $s_1[v|a], s_2[v|a]$ είναι ίδιες σε όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του ψ. □

Ορισμός 1.9. Μία $\mathcal{L}$-δομή $\mathfrak{A}$ θα λέγεται *μοντέλο* ενός $\mathcal{L}$-τύπου ϕ, αν $\models_{\mathfrak{A}} \phi[s]$ για κάθε $s : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$. Θα γράφουμε $\models_{\mathfrak{A}} \phi$. Η $\mathfrak{A}$ θα είναι μοντέλο ενός συνόλου τύπων Γ, αν $\models_{\mathfrak{A}} \gamma$, για κάθε $\gamma \in \Gamma$. Αν ϕ πρόταση και $\models_{\mathfrak{A}} \phi$, θα λέμε ότι ο ϕ *αληθεύει* στην $\mathfrak{A}$. ◇

Άμεσο πόρισμα των παραπάνω είναι ότι στις προτάσεις, οι απονομές αληθοτιμών δεν παίζουν κάποιο ρόλο.

Πρόταση 1.4. Έστω σ μία $\mathcal{L}$-πρόταση και $\mathfrak{A}$ μία $\mathcal{L}$-δομή. Τότε, είτε $\models_{\mathfrak{A}} \sigma$, είτε $\not\models_{\mathfrak{A}} \sigma$.

Απόδειξη: Μία πρόταση δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές. Ως εκ τούτου, από την Πρόταση 1.3 είτε $\models_{\mathfrak{A}} \sigma[s]$ για κάθε $s : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$, είτε $\not\models_{\mathfrak{A}} \sigma[s]$, για κάθε $s : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$. Το συμπέρασμα έπεται από τον Ορισμό 1.9. □

Ας δούμε ένα παράδειγμα στην βασική γλώσσα που θα μας απασχολήσει.

Παράδειγμα 7. Έστω η $\mathcal{L}_{NT} = \{0, S, +, \cdot, E, <\}$ με την κανονική της ερμηνεία $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, 0, S, +, \cdot, E, <)$. Παρατηρείστε ότι χρησιμοποιούμε τα ίδια σύμβολα για την γλώσσα αλλά και για τις συναρτήσεις και σχέσεις που αποτελούν ερμηνείες τους.

Έστω ο τύπος $\phi(v_1) := = +v_1v_1SSSS0$ και η πρόταση $\sigma = (\forall v_1)((\neg(\forall v_2)((\neg = v_1 + v_2 v_2))))$. Έστω επίσης οι απονομές $s_1, s_2 : \mathcal{V} \to \mathbb{N}$, με $s_1(v_i) = 2i$ και $s_2(v_i) = 10$, $i \in \mathbb{N}$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}\bar{s}_1(+v_1v_1) &= +^{\mathfrak{N}}(\bar{s}_1(v_1), \bar{s}_1(v_1))\\ &= +^{\mathfrak{N}}(2,2)\\ &= 2+2\\ &= 4\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\bar{s}_1(SSSS0) &= S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(0^{\mathfrak{N}}))))\\ &= S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(0))))\\ &= S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(1)))\\ &= S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(2))\\ &= S^{\mathfrak{N}}(3)\\ &= 4.\end{aligned}$$

Άρα $\mathfrak{N} \models \phi[s_1]$. Αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}\bar{s}_2(+v_1v_1) &= +^{\mathfrak{N}}(\bar{s}_2(v_1), \bar{s}_2(v_1))\\ &= +^{\mathfrak{N}}(10,10)\\ &= 10+10\\ &= 20\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\bar{s}_2(SSSS0) &= S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(0^{\mathfrak{N}}))))\\ &= S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(0))))\\ &= S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(1)))\\ &= S^{\mathfrak{N}}(S^{\mathfrak{N}}(2))\\ &= S^{\mathfrak{N}}(3)\\ &= 4.\end{aligned}$$

Άρα $\mathfrak{N} \not\models \phi[s_2]$. Τέλος, για αυθαίρετη απονομή $s : \mathcal{V} \to \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{N} \models \sigma[s] &\Leftrightarrow \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} : \ \mathfrak{N} \models (\neg(\forall v_2)((\neg = v_1 + v_2 v_2)))[s[v_1|n]] \\
&\Leftrightarrow \text{για κάθε } n \in \mathbb{N} : \ \mathfrak{N} \not\models (\forall v_2)((\neg = v_1 + v_2 v_2))[s[v_1|n]] \\
&\Leftrightarrow \text{για κάθε } n, m \in \mathbb{N} : \ \mathfrak{N} \not\models (\neg = v_1 + v_2 v_2))[s[v_1|n, v_2|m]] \\
&\Leftrightarrow \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}, \text{ υπάρχει } m \in \mathbb{N} : \ \mathfrak{N} \models = v_1 + v_2 v_2[s[v_1|n, v_2|m]].
\end{aligned}$$

Καθώς αν n περιττός, δεν υπάρχει κατάλληλο m, καταλήγουμε ότι $\mathfrak{N} \not\models \sigma$. $\diamond$

Ας χαλαρώσουμε κάπως τις απαιτήσεις της γραφής μας. Τονίζουμε ότι για να ισχύουν αυτά που θέλουμε στο συντακτικό της γλώσσας μας, είναι απαραίτητο να γράφουμε, ή έστω να έχουμε στο μυαλό μας, τους όρους και τους τύπους μιας γλώσσας με τον ήδη ορισμένο αυστηρό τρόπο. Για διευκόλυνση στην κατανόηση παρόλα αυτά θα γράφουμε συχνά $X(t_1, \ldots, t_n)$, αντί για $Xt_1 \cdots t_n$, όπου X n-μελές συναρτησιακό ή κατηγορηματικό σύμβολο. Επίσης, όταν το X είναι διμελές, θα γράφουμε συχνά $t_1 X t_2$ ή $(t_1 X t_2)$.

Ακόμη, όταν δεν βοηθούν, θα ξεχνάμε τις παρενθέσεις των συνδέσμων $\neg, \vee$ και του ποσοδείκτη $\forall$, έχοντας συμφωνημένο ότι ο $\neg$ εφαρμόζεται στον αμέσως επόμενο τύπο που έχει στα δεξιά του και μόνο (πχ $\neg\phi \vee \psi \equiv ((\neg\phi) \vee \psi))$. Επίσης, αντί για $\neg(\forall x)(\neg\phi)$, θα γράφουμε $\exists x \phi$. Έτσι, ο τύπος ϕ και οι πρόταση σ του Παρ. 7, θα μπορούσαν να γραφτούν ως $\phi(v_1) := v_1 + v_1 = SSSS(0)$ και $\sigma = \forall v_1 \exists v_2 (v_1 = v_2 + v_2)$ αντίστοιχα, με την σ πλέον να γίνεται εύκολα κατανοητό ότι αντιστοιχεί στην φράση "κάθε φυσικός αριθμός είναι άρτιος".

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο εισάγωντας άλλες τρεις συντομογραφίες διμελών συνδέσμων: $\wedge, \to, \leftrightarrow$. Συντακτικά, ακολουθούν τους ίδιους ακριβώς κανόνες με το $\vee$. Πρέπει όμως να προσδιορίσουμε το πότε αληθεύει ένας τύπος που τους περιέχει. Αν ϕ, ψ τύποι, θα γράφουμε:

$$(\phi \wedge \psi) \text{ αντί για } \neg(\neg\phi \vee \neg\psi), \tag{7}$$

$$(\phi \to \psi) \text{ αντί για } \neg\phi \vee \psi, \tag{8}$$

$$(\phi \leftrightarrow \psi) \text{ αντί για } (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi). \tag{9}$$

Για πληρότητα, επαναλαμβάνουμε τον Ορισμό 1.8 για να συμπεριλάβει και τις παραπάνω συντομογραφίες.

Ορισμός 1.10. Έστω μία $\mathcal{L}$-δομή $\mathfrak{A}$, μία απονομή αληθοτιμών $s : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$ και ένας $\mathcal{L}$-τύπος ϕ. Θα λέμε ότι ο ϕ αληθεύει υπό την s στην $\mathfrak{A}$ στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Αν $\phi := = t_1 t_2$, με t_1, t_2 όρους και $\bar{s}(t_1)$ είναι το ίδιο με το $\bar{s}(t_2)$.

(ii) Αν $\phi := R t_1 t_2 \cdots t_n$, με $t_1, t_2, \ldots, t_n$ όρους, R n-μελές κατηγορηματικό σύμβολο και

$$(\bar{s}(t_1), \bar{s}(t_2), \ldots, \bar{s}(t_n)) \in R^{\mathfrak{A}}.$$

(iii) Αν $\phi := (\neg\psi)$, με ψ τύπο που δεν αληθεύει υπό την s στην $\mathfrak{A}$.

(iv) Αν $\phi := (\psi \vee \chi)$, με τουλάχιστον έναν εκ των τύπων ψ ή χ να αληθεύει υπό την s στην $\mathfrak{A}$.

(v) Αν $\phi := (\psi \wedge \chi)$, με τους τύπους ψ και χ να αληθεύουν υπό την s στην $\mathfrak{A}$ (βάσει του (7)).

(vi) Αν $\phi := (\psi \to \chi)$, με τον τύπο χ να αληθεύει υπό την s στην $\mathfrak{A}$ όταν ο τύπος ψ αληθεύει υπό την s στην $\mathfrak{A}$ (βάσει του (8)).

(vii) Αν $\phi := (\psi \leftrightarrow \chi)$, με τον τύπο ψ να αληθεύει υπό την s στην $\mathfrak{A}$ αν και μόνον αν ο τύπος χ αληθεύει υπό την s στην $\mathfrak{A}$ (βάσει του (9)).

(viii) Αν $\phi := (\forall x)(\psi)$ και τον τύπο ψ να αληθεύει υπό την $s(x|a)$ στην $\mathfrak{A}$ για κάθε $a \in |\mathfrak{A}|$.

(ix) Αν $\phi := (\exists x)(\psi)$ και τον τύπο ψ να αληθεύει υπό την $s(x|a)$ στην $\mathfrak{A}$ για κάποιο $a \in |\mathfrak{A}|$.

1.8 Αντικαταστασιμότητα

Ας εξετάσουμε την πρόταση $\sigma := \forall x \exists y \neg(x = y)$. Παρατηρήστε ότι:

$$\mathfrak{A} \models \sigma \Leftrightarrow |\mathfrak{A}| \geq 2.$$

Αν αντικαταστήσουμε την x με μια ελεύθερη μεταβλητή u (το γιατί να θέλουμε να το κάνουμε αυτό θα φανεί σε επόμενα κεφάλαια), παίρνουμε τον τύπο $\phi(u) := \exists y \neg(u = y)$, ο οποίος αληθεύει σε οποιαδήποτε δομή με τουλάχιστον δύο στοιχεία στο σύμπαν της, για οποιαδήποτε αποτίμηση του δώσει διαφορετική τιμή από του y. Τίποτα το περίεργο ως εδώ.

Ας θυμηθούμε όμως ότι ένα βασικό μέρος του προς μελέτη αντικειμένου μας είναι αμιγώς συντακτικό. Άπαξ και τέτοιου τύπου αντικαταστάσεις είναι επιτρεπόμενες, θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε την x με την y, κάτι που θα οδηγούσε στον τύπο $\psi(y) := \exists y \neg(y = y)$. Ο τύπος αυτός είναι αποδεκτός βάσει του ορισμού, αλλά είναι σίγουρα εντελώς διαφορετικός από την αρχική μας πρόταση, καθώς δεν αληθεύει σε καμία δομή και υπό καμία αποτίμηση. Πρέπει λοιπόν να θέσουμε κάποιους κανόνες σχετιζόμενους με τις αντικαταστάσεις.

Ορισμός 1.11. Έστω u, t δύο $\mathcal{L}$-όροι και $x \in \mathcal{V}$. Ορίζουμε τον όρο u_t^x, που είναι ο όρος u στον οποίο η μεταβλητή x έχει αντικατασταθεί από τον όρο t, ως εξής:

- Αν u μεταβλητή διαφορετική της x ή σύμβολο σταθεράς, $u_t^x = u$.
- Αν η u είναι η x, τότε $u_t^x = t$.
- Αν $u := f u_1 u_2 \cdots u_n$, τότε $u_t^x := f u_1|_t^x u_2|_t^x \cdots u_n|_t^x$. $\diamond$

Για παράδειγμα, αν $t := g(c)$ και $u := f(x, y) + h(z, x, g(x))$, τότε:

$$u_t^x = f(g(c), y) + h(z, g(c), g(g(c))).$$

Ορισμός 1.12. Έστω ϕ ένας $\mathcal{L}$-τύπος, t ένας $\mathcal{L}$-όρος και $x \in \mathcal{V}$. Ορίζουμε τον τύπο ϕ_t^x, που είναι ο τύπος ϕ στον οποίο η μεταβλητή x έχει αντικατασταθεί από τον όρο t, ως εξής:

- Αν $\phi := (u_1 = u_2)$, τότε $\phi_t^x := (u_1|_t^x = u_2|_t^x)$.
- Αν $\phi := P(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, τότε $\phi_t^x := P(u_1|_t^x, u_2|_t^x, \ldots, u_n|_t^x)$.
- Αν $\phi := \neg\psi$, τότε $\phi_t^x := \neg\psi_t^x$,
- Αν $\phi := \psi * \chi$, τότε $\phi_t^x = (\psi_t^x * \chi_t^x)$, για κάθε $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.
- Αν $\phi := \forall y \psi$, τότε:
$$\phi_t^x = \begin{cases} \phi, & \text{αν } x = y, \\ \forall y \psi_t^x, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

$\diamond$

Παρατηρείστε ότι μέχρι στιγμής έχουμε απλώς ορίσει τι σημαίνει η αντικατάσταση, χωρίς να θέσουμε κάποιον περιορισμό. Το πρόβλημα δηλαδή που είχαμε και στην αρχή της ενότητας αυτής, συνεχίζει να υπάρχει. Η πρώτη απλή σκέψη, είναι απλώς να απαγορεύσουμε την αντικατάσταση όταν η μεταβλητή που θέλουμε να βάλουμε στον τύπο, θα δεσμευτεί αν εμφανιστεί.

Παράδειγμα 8. Έστω ο $\mathcal{L}_{NT}$-τύπος $\phi(x) := \forall y(x \cdot y = y)$, που με την κανονική ερμηνεία, αληθεύει στους φυσικούς μόνο για τις απονομές $s[x|1]$. Έστω ο όρος $t = x + y$. Έχουμε $\phi_t^x(x) := \forall y((x+y) \cdot y = y) := \forall y(x \cdot y + y \cdot y = 1)$, ο οποίος δεν αληθεύει για καμία τιμή του x. Παρατηρούμε λοιπόν ότι για να μην προκύπτουν προβλήματα, θέλουμε όταν αντικαθιστούμε μία μεταβλητή με έναν όρο, να μην προκύπτει καμία νέα δέσμευση μεταβλητής. $\diamond$

Ορισμός 1.13. Έστω ϕ ένας $\mathcal{L}$-τύπος, t ένας $\mathcal{L}$-όρος και $x \in \mathcal{V}$. Θα κλέμε ότι ο όρος t είναι *αντικαταστάσιμος* από την x στον ϕ αν:

- ϕ ατομικός, ή
- $\phi :=\neq \psi$ και t *αντικαταστάσιμος* από την x στον ψ, ή
- $\phi := \psi * \chi$, $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, και t *αντικαταστάσιμος* από την x και στον ψ και στον χ, ή
- $\phi := (Qy)(\psi)$, $Q \in \{\forall, \exists\}$ και, είτε x δεσμευμένη στον ϕ, είτε η y δεν εμφανίζεται στον t και t *αντικαταστάσιμος* από την x στον ψ. $\diamond$

Επαναλαμβάνουμε ότι η αντικατάσταση είναι πάντοτε δυνατή. Παρ' όλα αυτά, δεν θα είναι χρήσιμη όταν δεν ισχύει η αντικαταστασιμότητα. Ακόμη περισσότερο, κάποια πράγματα που θα ορίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, θα είναι δυνατά μόνον εφόσον ισχύει η αντικαταστασιμότητα.

1.9 Λογική συνεπαγωγή

Θα ολοκληρώσουμε αυτό το κεφάλαιο συζητώντας πως η αλήθεια ενός τύπου μας δίνει συμπέρασμα για την αλήθεια ενός άλλου.

Ορισμός 1.14. Έστω Γ, Δ σύνολα $\mathcal{L}$-τύπων. Θα λέμε ότι το Γ *συνεπάγεται λογικά* το Δ αν, για κάθε δομή $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} \models \Gamma \ \Rightarrow \models_{\mathfrak{A}} \Delta.$$

Γράφουμε $\Gamma \models \Delta$ και, στην περίπτωση που $\Gamma = \{\gamma\}$, θα γράφουμε $\gamma \models \Delta$ αντί για $\{\gamma\} \models \Delta$ (αντίστοιχα αν Δ μονοσύνολο). $\diamond$

Ο ορισμός αυτός είναι ίσως πιο περίπλοκος από ότι φαίνεται. θέλουμε σε κάθε δομή που όλα τα μέλη του Γ αληθεύουν ταυτόχρονα για κάθε δυνατή απονομή, το ίδιο να ισχύει και για τα στοιχεία του Δ. Παρατηρείστε ότι σε δομές που δεν ισχύει αυτό, τα μέλη του Δ μπορούν είτε να αληθεύουν πάντα είτε όχι.

Ορισμός 1.15. Θα λέμε ότι ένας τύπος είναι *έγκυρος* αν $\models \phi$ και *αντίφαση* αν $\models \neg\phi$, όπου με $\models \phi$ εννοούμε $\emptyset \models \phi$, δηλαδή ότι ο ϕ ισχύει σε κάθε δομή και για κάθε απονομή. $\diamond$

Παράδειγμα 9. Έστω $\mathcal{L}$ μία γλώσσα που περιέχει το διμελές κατηγόρημα P, $\sigma := (\exists y \forall x P(x,y)) \rightarrow (\forall x \exists y P(x,y))$ και $\tau := (\forall x \exists y P(x,y)) \rightarrow (\exists y \forall x P(x,y))$. Θα δείξουμε ότι η σ είναι έγκυρη, ενώ η τ όχι. Έστω αυθαίρετη δομή $\mathfrak{A}$, με $\models_{\mathfrak{A}} (\exists y \forall x P(x,y))$ (αλλιώς δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Τότε, υπάρχει $b \in |\mathfrak{A}|$ ώστε για κάθε $a \in |\mathfrak{A}|$: $(a,b) \in P^{\mathfrak{A}}$. Έχουμε:

$$\begin{gathered} \models_{\mathfrak{A}} (\forall x \exists y P(x,y)) \ \Leftrightarrow \\ \text{για κάθε } a' \in |\mathfrak{A}| \text{ υπάρχει } b' \in |\mathfrak{A}| : \ (a',b') \in P^{\mathfrak{A}}, \end{gathered}$$

που ισχύει για $b' = b$.

Από την άλλη, έστω δομή $\mathfrak{B}$, με $|\mathfrak{B}| = \{0, 1\}$ και $P^{\mathfrak{B}} = \{(0, 0), (1, 1)\}$. Τότε, εμφανώς για κάθε $a \in |\mathfrak{B}|$, υπάρχει $b \in |\mathfrak{B}|$ με $(a, b) \in P^{\mathfrak{B}}$, αλλά δεν υπάρχει $a' \in |\mathfrak{B}|$ ώστε για κάθε $b' \in |\mathfrak{B}|$, $(a', b') \in P^{\mathfrak{B}}$. Άρα $\mathfrak{B} \not\models \tau$. $\diamond$

2 Τυπικές αποδείξεις

References

[1] Christopher C Leary and Lars Kristiansen. *A Friendly Introduction to Mathematical Logic*. Milne Library Publishing, 2015.

[2] Bertrand Russell. Letter to frege. *From Frege to Gödel*, 6:124–125, 1902.