513. ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΉ ΛΟΓΙΚΉ

Εργασία, Χειμερινό Εξάμηνο 2024-25

Γιάννης Λιβιεράτος
Εθνικό και Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών
Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Μαθηματικών

Παράδοση έως 12/01/2025

- Η εργασία προσφέρει έως και μία έξτρα μονάδα στον βαθμό της εξέτασης.
- Δεν απαιτείται να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
- Η παρουσίαση άσκησης/ασκήσεων στην τάξη προσφέρει έως και άλλη μία μονάδα.
- Παράδοση εργασιών:
  - δια ζώσης στο μάθημα,
  - γραφείο 306 κάτω από την πόρτα,
  - e-mail στο jlivier89@math.uoa.gr
- Όλα τα είδη αρχείων θα γίνουν δεκτά, αρκεί να διαβάζονται.

Άσκηση 1**:** Να αποδείξετε ότι για κάθε γλώσσα $\mathcal{L}$, αν ϕ $\mathcal{L}$-τύπος με $\phi := \phi_1 \cdots \phi_n$ και $\phi := \psi_1 \cdots \psi_m$, όπου ϕ_i, ψ_j σύμβολα της $\mathcal{L}$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, n\}$ και $j \in \{1, \ldots, m\}$, τότε $n = m$ και $\phi_i = \psi_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Άσκηση 2**:** Έστω $\mathcal{L}$-τύπος ϕ. Ισχύει ότι $(\phi_x^y)_y^x = \phi$; Αν ναι, αποδείξτε το. Αν όχι, βρείτε αντιπαράδειγμα και ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε αυτό να ισχύει. Στην συνέχεια αποδείξτε το για την συνθήκη που βρήκατε. Είναι αυτή η συνθήκη το να μην εμφανίζεται η y ελεύθερη στον ϕ;

Άσκηση 3**:** Να αποδείξετε ότι αν $\Sigma \cup \{\phi\}$ σύνολο $\mathcal{L}$-τύπων με $\Sigma \vdash \phi$, τότε $\Sigma \models \phi$, με επαγωγή στην πολυπλοκότητα μιας Σ-απόδειξης του ϕ.

Άσκηση 4**:** Έστω $\mathcal{L}_{NT}$ η γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών και N το (ελαχιστικό) σύνολο αξιωμάτων της. Να δείξετε ότι $N \vdash \neg = S0SS0$, αλλά ότι δεν υπάρχει απόδειξη από το N για την πρόταση $(\forall x)(\neg x < x)$.

Άσκηση 5**:** Έστω $\mathfrak{A}$ η δομή που κατασκευάστηκε στην απόδειξη του Θεωρήματος Πληρότητας. Να δείξετε ότι αν ϕ $\mathcal{L}$-πρόταση, τότε:

$$\mathfrak{A} \models \phi \text{ αν και μόνον αν } \mathfrak{A} \restriction_{\mathcal{L}} \models \phi.$$

Άσκηση 6^{***}**:** Αποδείξτε το Θεώρημα της Πληρότητας χωρίς την υπόθεση ότι η $\mathcal{L}$ είναι αριθμήσιμη.

Άσκηση 7^{**}**:** Έστω Σ $\mathcal{L}$-σύνολο προτάσεων έτσι ώστε για κάθε $\mathcal{L}$-δομή $\mathfrak{A}$, να υπάρχει πρόταση $\phi_{\mathfrak{A}} \in \Sigma$ που να αληθεύει στην $\mathfrak{A}$. Να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για οποιεσδήποτε $\phi_i \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$, η πρόταση $\phi_1 \vee \cdots \vee \phi_n$ είναι έγκυρη.

Άσκηση 8**:** Μία δυαδική σχέση $\mathcal{Q}$ σε ένα σύνολο X είναι γραμμική διάταξη αν:

(i) η $\mathcal{Q}$ είναι μη-ανακλαστική: $(\forall x \in X)[(x, x) \notin \mathcal{Q}]$,

(ii) η $\mathcal{Q}$ είναι μεταβατική: $(\forall x, y, z \in X)[(x, y), (y, z) \in \mathcal{Q} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{Q}]$ και

(iii) για κάθε $x, y \in X$, ακριβώς ένα από τα ακόλουθα τρία ισχύει: $(x, y) \in \mathcal{Q}$ ή $(y, x) \in \mathcal{Q}$ ή $x = y$.

Η $\mathcal{Q}$ λέγεται καλή διάταξη αν επιπλέον δεν έχει άπειρες φθίνουσες αλυσίδες: δεν υπάρχουν άπειρες ακολουθίες $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ με $x_n \in X$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοιες ώστε $(x_n, x_{n+1}) \in \mathcal{Q}$, $n \in \mathbb{N}$.

Έστω $\mathcal{L}$ γλώσσα με διμελές κατηγορηματικό σύμβολο Q. Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σύνολο $\mathcal{L}$-προτάσεων Σ τέτοιο ώστε:

(I) το Σ να έχει άπειρο μοντέλο $\mathfrak{A}$ με $Q^{\mathfrak{A}}$ γραμμική διάταξη και

(II) για κάθε άπειρο μοντέλο $\mathfrak{B}$ του Σ, η $Q^{\mathfrak{B}}$ να είναι καλή διάταξη.

Άσκηση 9^{*}**:** Να δείξετε ότι η $<$ (με την συνήθη ερμηνεία) δεν είναι καλή διάταξη σε οποιοδήποτε μη-σύνηθες μοντέλο της αριθμητικής.

Άσκηση $10^{*}*$**:** Έστω αριθμήσιμη γλώσσα $\mathcal{L}$ και $\mathfrak{A}$ μία $\mathcal{L}$-δομή. Τότε, η $\mathfrak{A}$ έχει αριθμήσιμη στοιχειώδη υποδομή.

Άσκηση 11**:** Έστω αριθμήσιμη γλώσσα $\mathcal{L}$ και Σ σύνολο προτάσεων με άπειρο μοντέλο. Αν ο κ είναι άπειρος αριθμός, τότε το Σ έχει μοντέλο $\mathfrak{A}$ με $||\mathfrak{A}|| = \kappa$.

Άσκηση 12^{***}**:** Έστω αριθμήσιμη γλώσσα $\mathcal{L}$, $\mathfrak{A}$ άπειρη $\mathcal{L}$-δομή και k πληθικός αριθμός. Τότε, υπάρχει $\mathcal{L}$-δομή $\mathfrak{B}$ με $||\mathfrak{B}|| \geq k$ και $\mathfrak{A}$ στοιχειώδη υποδομή του $\mathfrak{B}$.

Άσκηση 13**:** Έστω δύο $\mathcal{L}$-δομές $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ με $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$. Έστω επίσης $\mathcal{L}$-τύπος ϕ με $\phi := (\forall x)(\psi)$ και η ψ δεν έχει ποσοδείκτες. Να δείξετε ότι αν $\mathfrak{A} \models \phi$, τότε $\mathfrak{B} \models \phi$.

Άσκηση 14**:** Έστω μια στοιχειώδης αλυσίδα $\mathcal{L}$-δομών, δηλαδή ακολουθία $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, με $\mathfrak{A}_n \prec \mathfrak{A}_{n+1}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω επίσης:

$$\mathfrak{A} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathfrak{A}_n.$$

Να δείξετε ότι $\mathfrak{A}_n \prec \mathfrak{A}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άσκηση 15**:** Έστω $\mathcal{L}_{NT}$ η γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών και N το (ελαχιστικό) σύνολο αξιωμάτων της. Να δείξετε ότι:

(i) Αν $m \neq n$ τότε $N \vdash \bar{n} \neq \bar{m}$.

(ii) $N \vdash \overline{n+m} = \bar{m} + \bar{n}$ και $N \vdash \overline{m \cdot n} = \bar{m} + \bar{n}$.

(iii) Κάθε μοντέλο του N είναι άπειρο.

(iv) Για κάθε πληθικό αριθμό κ, υπάρχει μοντέλο της αριθμητικής με σύμπαν πληθικότητας κ.

Άσκηση 16**:** Έστω $\mathcal{L}'_{NT}$ η γλώσσα της Θεωρίας Αριθμών και N το (ελαχιστικό) σύνολο αξιωμάτων της, μαζί με τα $\phi(0) \to ((\forall x)(\phi(x) \to \phi(Sx)) \to (\forall x)(\phi(x))$, για κάθε τύπο ϕ. Να δείξετε ότι:

(i) $N \vdash (\forall x)((\forall y)(y < x \to \phi(y)) \to \phi(x)) \to (\forall x)(\phi(x))$.

(ii) $N \vdash (\exists x)(\phi(x)) \to (\exists y)(\phi(x)) \land (\forall z)(z < y \to \neg\phi(z))$

Άσκηση 17**:** Έστω $\mathcal{L}$-δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $s : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$. Έστω m τριθέσιος σύνδεσμος, με $\models_{\mathfrak{A}} m(\phi, \psi, \chi)[s]$ αν και μόνον αν το πολύ ένας εκ των τριών $\mathcal{L}$-τύπων αληθεύει στην $\mathfrak{A}$ υπό την s. Έστω επίσης $\perp$ ο μηδενοθέσιος σύνδεσμος που είναι πάντα ψευδής. Να δείξετε ότι:

(i) το σύνολο συνδέσμων $\{m, \perp\}$ είναι πλήρες, δηλαδή οι σύνδεσμοι $\{\neg, \lor, \land, \to, \leftrightarrow\}$ μπορούν να εκφραστούν ως συνδυασμός των m και $\perp$.

(ii) το $\{m\}$ δεν είναι πλήρες.

Άσκηση 18**:** Έστω $\mathcal{L}$-δομή $\mathfrak{A}$ και αποτίμηση $s : \mathcal{V} \to |\mathfrak{A}|$. Έστω $+$ ο διθέσιος σύνδεσμος, με $\models_{\mathfrak{A}} +(\phi, \psi)[s]$ αν και μόνον αν αληθεύει ακριβώς ένας εκ των $\mathcal{L}$-τύπων ϕ και ψ στην $\mathfrak{A}$ υπό την s. Να δείξετε ότι $\{\land, \leftrightarrow, +\}$ είναι πλήρες, αλλά κανένα γνήσιο υποσύνολό του δεν είναι πλήρες.

Άσκηση 19**:** Βάσει θεωρήματος πληρότητας, ξέρουμε ξέρουμε ότι κάθε πρόταση είτε έχει απόδειξη από το κενό σύνολο μη λογικών αξιωμάτων, είτε έχει ένα μοντέλο στο οποίο αληθεύει η άρνησή της. Για κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, βρείτε μια τέτοια απόδειξη ή ένα τέτοιο μοντέλο:

(i) $(\forall x)(Qx \to (\forall y)(Qy))$.

(ii) $((\exists x)(Px) \to (\forall y)(Qy)) \to ((\forall z)(Pz \to Qz))$

(iii) $((\forall z)(Pz \to Qz)) \to ((\exists x)(Px) \to (\forall y)(Qy))$

(iv) $\neg(\exists y)(\forall x)(Pxy \leftrightarrow \neg Pxx)$

Άσκηση 20**:** Δείξτε τα ακόλουθα:

(i) Αν στο σύνολο των λογικών μας αξιωμάτων προσθέσουμε έναν αντιφατικό τύπο, τότε το Θεώρημα Ορθότητας παύει να ισχύει.

(ii) Αν πάρουμε το κενό ως σύνολο λογικών αξιωμάτων, τότε το θεώρημα της Πληρότητας παύει να ισχύει.

(iii) Αν στο σύνολο των λογικών μας αξιωμάτων προσθέσουμε έναν έγκυρο τύπο, τότε τα Θεωρήματα Ορθότητας και Πληρότητας συνεχίζουν να ισχύουν.