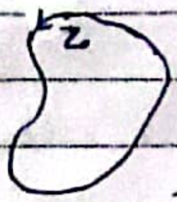
Μάθημα 26 **07/12/2022**

Ο δείκτης στροφής κλειστής καμπύλης

Θα ασχοληθούμε με ολοκληρώματα της μορφής $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}$, όπου γ κλειστή καμπύλη με $0 \notin [\gamma]$

και γενικότερα της μορφής $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$ με $z \notin [\gamma]$



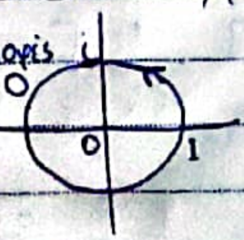
Θα ορίσουμε $\delta_\gamma(z)$: ο αριθμός των περιστροφών της γ γύρω από το z καθώς το θ αυξάνει από το a στο b (όπου $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$)

Θα ορίσουμε $\delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$

Π.χ. Στην περίπτωση του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$ με την παραμέτρηση $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi n]$, $n \in \mathbb{N}$ ($n \neq 0$) έχουμε πράγματι ότι

$\delta_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta}$: ο αριθμός των περιστροφών

του κύκλου γύρω από το 0 στο χρονικό διάστημα $[0, 2\pi n]$ = n περιστροφές γύρω από το 0



$$\delta_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi n} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi n} \frac{i e^{it}}{e^{it}}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi n} i\,dt = \frac{\cancel{i}}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi n} dt =$$

$$= \frac{2\cancel{\pi} n}{2\cancel{\pi}} = n$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $z\in\mathbb{C}$ και $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ κλειστή καμπύλη με $z\notin[\gamma]$.
Ο αριθμός $\delta_\gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta-z}$ λέγεται ο δείκτης στροφής της γ ως προς το σημείο z.

Παρατηρήσεις

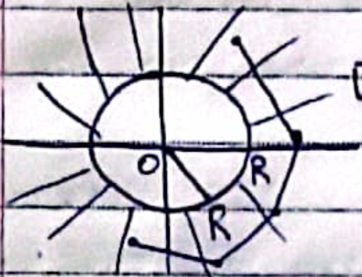
1) Για κάθε κλειστή καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ και κάθε $z\notin[\gamma]$, ο υπολογισμός του $\delta_\gamma(z)$ ανάγεται στον υπολογισμό του $\delta_\Gamma(0)$ για κάποια κατάλληλη κλειστή καμπύλη Γ.
Πράγματι θεωρούμε την καμπύλη $\Gamma(t)=\gamma(t)-z$, $t\in[a,b]$. Η Γ είναι προφανώς κλειστή και $0\notin[\Gamma]$ και επίσης έχουμε

$$\delta_\Gamma(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{d\zeta}{\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{d\zeta}{\zeta-z}=\delta_\gamma(z)$$

2) Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ φραγμένο. Τότε το σύνολο $\Omega = \mathbb{C}\setminus A$ έχει μια μόνο μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα

Πράγματι, έστω $R>0$ ώστε $A \subseteq \overline{\Delta(0,R)}$, τότε το $D = \mathbb{C}\setminus \overline{\Delta(0,R)}$ είναι ανοικτό και συνεκτικό μη φραγμένο και βέβαια $D \subseteq \mathbb{C}\setminus A = \Omega$



$D = \mathbb{C}\setminus \overline{\Delta(0,R)}$

$D =$ τόπος

Έστω C η συνεκτική συνιστώσα του Ω που περιέχει το D, τότε η C είναι προφανώς μη φραγμένη και είναι η ζητούμενη συνεκτική συνιστώσα. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι C' είναι κάποια μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του Ω. Τότε $C' \cap D \neq \emptyset$ και άρα $C' \cap C \neq \emptyset$ απ' όπου έπεται ότι $C = C'$

ΘΕΩΡΗΜΑ

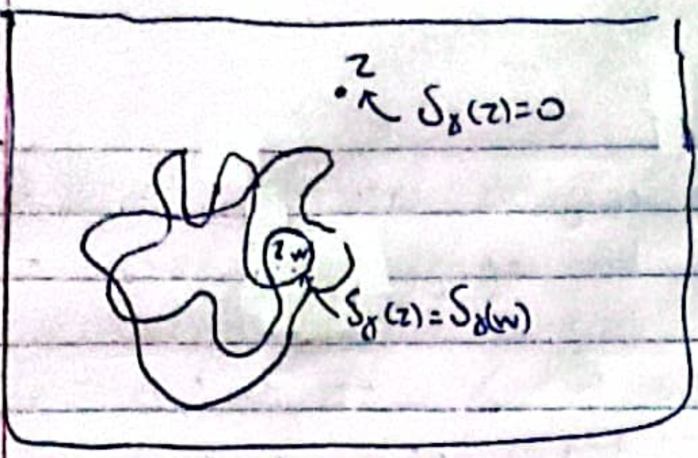
Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ μια κλειστή καμπύλη. Τότε έχουμε:

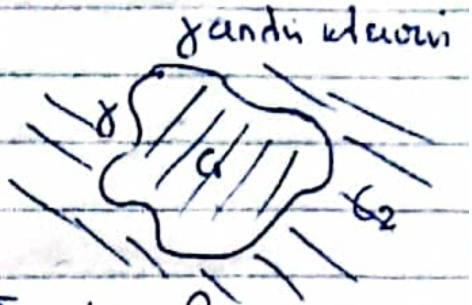
a) Ο αριθμός $\delta_\gamma(z)$ είναι ακέραιος για κάθε $z \in \mathbb{C}\setminus[\gamma]$

b) Αν z, w ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα του ανοικτού συνόλου $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ τότε $\delta_\gamma(z) = \delta_\gamma(w)$

γ) Αν το z ανήκει στην μοναδική μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ τότε $\delta_\gamma(z) = 0$

Σχήμα για το Θεώρημα





Παρατήρηση

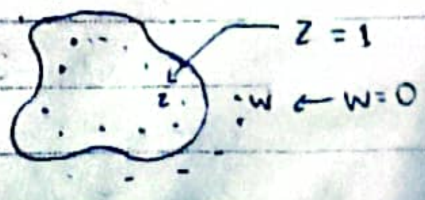
Το Θεώρημα καμπυλών του Jordan λέει ότι:
«Κάθε απλή κλειστή καμπύλη του επιπέδου αποσυνδέει το επίπεδο». Δηλαδή:

a) Το $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ έχει ακριβώς δύο συνεκτικές συνιστώσες, την μία φραγμένη και την άλλη μη φραγμένη με κοινό σύνορο το ίχνος $[\gamma]$ της γ.

b) $\delta_\gamma(z) = \begin{cases} \pm 1, & \text{αν } z \text{ ανήκει στη φραγμένη συνιστώσα} \\ 0, & \text{αν } z \text{ ανήκει στη μη φραγμένη συνιστώσα} \end{cases}$

Η φραγμένη συνιστώσα ορίζεται ως το <u>εσωτερικό</u> της καμπύλης γ.

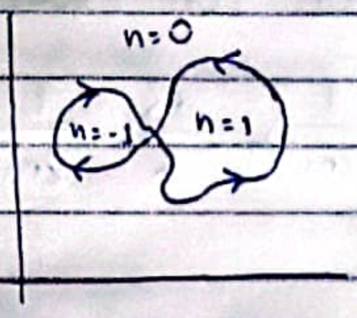
Επιλέγοντας τον κατάλληλο προσανατολισμό θα έχουμε $\delta_\gamma(z) = 0$ ή 1 για $z \notin [\gamma]$
Ο κατάλληλος προσανατολισμός είναι αυτός που καθώς κινούμαστε επί της γ, η φραγμένη
(εσωτερικό καμπύλης) συνιστώσα του $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ είναι προς τα αριστερά μας



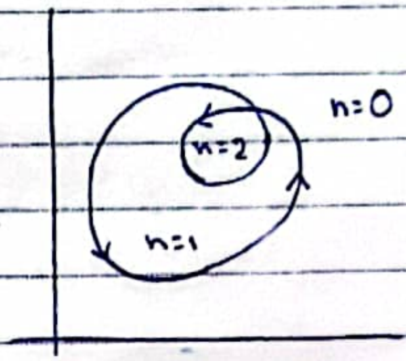
Σημειώνουμε ότι κατά τον υπολογισμό του δείκτη στροφής καμπύλης, κάθε «θετική» περιστροφή συνεισφέρει +1 στον ακέραιο $\delta_\gamma(z)$, ενώ κάθε «αρνητική» περιστροφή συνεισφέρει -1 στον $\delta_\gamma(z)$

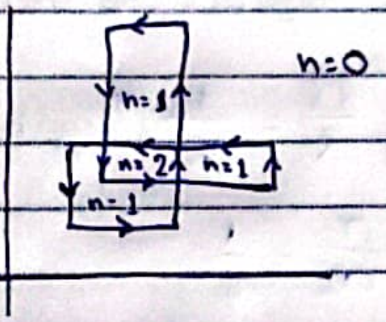
Παραδείγματα

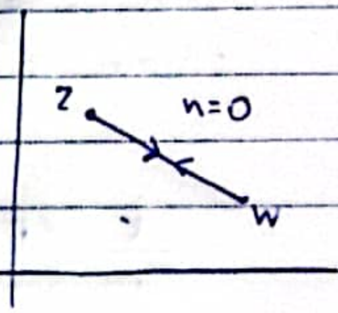
1)



$\delta_\gamma(z)=n$

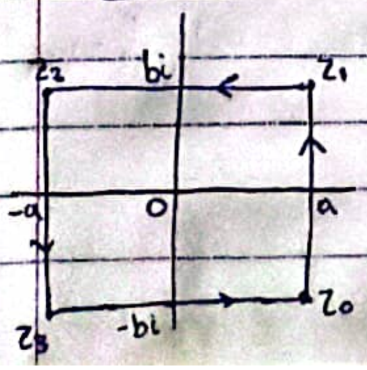






2) Έστω $a>0$ και $b>0$. Θεωρούμε την κλειστή πολυγωνική γραμμή $\gamma=[z_0,z_1]+[z_1,z_2]+[z_2,z_3]+[z_3,z_0]$ με κορυφές τα σημεία $z_0=a-bi$, $z_1=a+bi$, $z_2=-a+bi$, $z_3=-a-bi$ και z_0. Να υπολογιστεί ο $\delta_\gamma(0)$

Λύση



Πρόκειται για την θετικά προσανατολισμένη περίμετρο του παραλληλογράμμου με κορυφές z_0,z_1,z_2,z_3.

Διαισθητικά είναι σαφές ότι $\delta_\gamma(0)=1$

$$\circledast \quad \cancel{\log|b|} + i\arg(bi) - \cancel{\log|b|} - i\arg(-bi) = i\frac{\pi}{2} - i\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

<u>Πιο αυστηρώς υπολογισμός</u>

Χωρίζουμε την γ σους καμπύλες δ_1 και δ_2, όπου
$\delta_1 = [-bi, z_0] + [z_0, z_1] + [z_1, bi]$ και
$\delta_2 = [bi, z_2] + [z_2, z_3] + [z_3, -bi]$.

Έπεται ότι $\gamma = \delta_1 + \delta_2$ και έτσι έχουμε

$$\delta_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1} \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_2} \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

Επειδή η $\frac{1}{z}$ έχει παράγουσα στον τόπο $\mathbb{C}_\pi = \mathbb{C}\setminus(-\infty, 0]$ τον κύριο κλάδο του λογαρίθμου και το $[\delta_1] \subseteq \mathbb{C}_\pi$, έπεται ότι

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_1} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\left(\log(bi) - \log(-bi)\right) \overset{\circledast}{=}$$

$$= \frac{\cancel{i}}{2\pi \cancel{i}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Από την άλλη πλευρά $[\delta_2] \subseteq \mathbb{C}_0 = \mathbb{C}\setminus\{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ και η $\frac{1}{z}$ έχει παράγουσα στο τόπο $\mathbb{C}_0$ τον κλάδο το λογαρίθμου $\log_{2\pi}$

Για $z \neq 0$: $\log_{2\pi} z = \log|z| + i\underbrace{\arg_{2\pi}(z)}_{\in[0, 2\pi)}$

Έπεται ότι $$\frac{1}{2\pi i}\int_{\delta_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\left(\log_{2\pi}(-bi) - \log_{2\pi}(bi)\right) =$$

$$= \frac{\cancel{i}}{2\pi \cancel{i}}\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$$

Έτσι $\delta_\gamma(0) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_{\delta_1} + \int_{\delta_2}\right)\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

3) Έστω $r>0$ και $\gamma:[a,b] \to \overline{\Delta(0,r)}$ κλειστή καμπύλη. Τότε $\delta_\gamma(z)=0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ με $|z|>r$

Λύση

Η μοναδική μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα του ανοικτού συνόλου $O=\mathbb{C}\setminus[\gamma]$ περιέχει το ανοικτό σύνολο $D=\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta(0,r)}$

Άρα από το βασικό Θεώρημα έχουμε $\delta_\gamma(z)=0$ για $|z|>r$