Μάθημα 34 | 23/12/2022

Μεμονωμένες Ανωμαλίες Ολόμορφων Συναρτήσεων

Έστω $\underline{\Omega} \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \underline{\Omega}$ και $f: \underline{\Omega} \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση (προφανώς το $\underline{\Omega} \setminus \{a\}$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{C}$)

Τότε το a ονομάζεται μεμονωμένη ανωμαλία της f

Παρατηρούμε ότι η f δεν ορίζεται στο σημείο a αλλά ο ορισμός απαιτεί να ορίζεται γύρω από το a

- Οι μεμονωμένες ανωμαλίες διακρίνονται σε τρία είδη

a) Το a λέγεται επουσιώδης ανωμαλία της f, αν η f μπορεί να επεκταθεί στο $\underline{\Omega}$ ώστε να γίνει ολόμορφη στο $\underline{\Omega}$

Δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{C}$ ώστε θέτοντας $f(a) = c$, η f έχει μιγαδική παράγωγο και στο a.

b) Το a λέγεται πόλος της f, αν το $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$.

γ) Το a λέγεται ουσιώδης ανωμαλία της f, αν δεν είναι ούτε πόλος, ούτε επουσιώδης ανωμαλία για την f.

Παραδείγματα

1) Έστω $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Τότε $\lim_{z \to 0} \frac{1}{z} = \infty$ και άρα το 0 είναι πόλος για την f.

2) Έστω $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-5)}$, $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{1, 5\}$

Τότε τα δύο σημεία 1 και 5, είναι πόλοι για την f.
Πράγματι $\lim_{z \to 1} f(z) = \frac{1}{0 \cdot (-4)} = \frac{1}{0} = \infty$

Ομοίως $\lim_{z \to 5} f(z) = \infty$

Παρατηρούμε ακόμα ότι $f(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-5} - \frac{1}{z-1}\right)$

3) Έστω $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Το $z=0$ είναι επουσιώδης ανωμαλία
Πράγματι, το όριο $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$ $\left(= \lim_{z \to 0} \frac{\sin z - \sin 0}{z - 0} \right.$

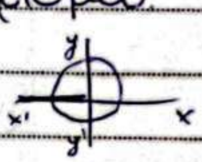
$\left. = (\sin)'(0) = \cos 0 = 1 \right)$

Αλλιώς $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \ldots \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Για $z \neq 0$: $\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots$ $\left(\text{Άρα όταν } z \to 0 \quad \frac{\sin z}{z} \to 1 \right)$

Έτσι αν θέσουμε $f(0)=1$ η f γίνεται συνεχής στο $\mathbb{C}$ και βέβαια η $f|_{\mathbb{C}\setminus\{0\}}$ είναι ολόμορφη.
Από πόρισμα του Θεωρήματος Morera έπεται ότι η f είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$

4) Το σημείο $z=0$ δεν είναι μεμονωμένη ανωμαλία για τον κύριο κλάδο του λογαρίθμου
$z\in\mathbb{C}_\pi \mapsto \log z = \log|z| + i\arg(z) \in \mathbb{C}$



Πράγματι, για κάθε $r>0$ η $\log z$ δεν μπορεί να επεκταθεί σε ολόμορφη συνάρτηση στον τρυπημένο δίσκο $\Delta(0,r)\setminus\{0\}$

5) Η συνάρτηση $f(z)=e^{\frac{1}{z}}$, $z\in\Omega=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ έχει στο $z=0$ ουσιώδη ανωμαλία

Πράγματι, θεωρούμε τις ακολουθίες $z_n=\frac{1}{2\pi n i}$ και $w_n=\frac{1}{(2n+1)\pi i}$, $n\geq 1$

Τότε $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} w_n = 0$

Αλλά έχουμε ότι $f(z_n)=e^{2\pi n i}=1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$
και $f(w_n)=e^{2\pi n i + i\pi} = e^{2\pi n i}\cdot e^{i\pi} = 1\cdot(-1) = -1 \xrightarrow{n\to\infty} -1 \neq 1$

Άρα το $z=0$ δεν είναι ούτε επουσιώδης ανωμαλία ούτε πόλος για την f.
Άρα εξ' ορισμού το $z=0$ είναι ουσιώδης ανωμαλία της f

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (Riemann)

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και $f: \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση.

Τ.Α.Ε.Ι:

a) Το σημείο a είναι επουσιώδης ανωμαλία της f

b) Η f είναι τοπικά φραγμένη στο a
(Δηλαδή $\exists r>0$ ώστε $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ και $f|_{\Delta(a,r)\setminus\{a\}}$ είναι φραγμένη)

γ) Το $\lim_{z \to a} f(z)$ υπάρχει στο $\mathbb{C}$

Απόδειξη

(a) => (b)

Εξ' ορισμού η f μπορεί να οριστεί στο σημείο a, ώστε η προκύπτουσα επέκταση να είναι ολόμορφη στο Ω

Έτσι η f είναι ιδιαιτέρως συνεχής στο a

Έστω $r>0$: $\overline{\Delta(a,r)} \subseteq \Omega$, τότε η $f|_{\overline{\Delta(a,r)}}$ είναι φραγμένη εφόσον ο δίσκος $\overline{\Delta(a,r)}$ είναι συμπαγής

(b) => (γ)

Από την υπόθεση, υπάρχει $r>0$ και $M>0$ ώστε $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ και $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \Delta(a,r)\setminus\{a\}$

Ορίζουμε μια συνάρτηση $g: \Omega \to \mathbb{C}$ ως ακολούθως
$g(z) = (z-a)f(z)$, $z \in \Omega \setminus \{a\}$ και $g(a) = 0$

Αφού η f είναι φραγμένη "πλησίον" του a

Έπεται ότι $\lim_{z\to a} g(z) = \lim_{z\to a} (z-a)f(z) = 0$

Έτσι η g είναι συνεχής στο a, και άρα στο Ω και ολόμορφη στο $\Omega\setminus\{a\}$

Από πόρισμα του Θεωρήματος Morera είναι ολόμορφη σε όλο το Ω

Παρατηρούμε ότι αν $z\in\Omega\setminus\{a\}$ τότε

$$f(z) = \frac{g(z)}{z-a} = \frac{g(z)-g(a)}{z-a}$$

Άρα $\lim_{z\to a} f(z) = g'(a) \in \mathbb{C}$

(γ) => (α)

Θέτουμε $w = \lim_{z\to a} f(z)$. Τότε $w\in\mathbb{C}$

Έπεται ότι θέτοντας $f(a)=w$, η f γίνεται συνεχής στο Ω.

Επειδή η $f|_{\Omega\setminus\{a\}}$ είναι ολόμορφη έχουμε ότι η f είναι ολόμορφη σε όλο το Ω (Θ. Morera) =>
=> Η f έχει επουσιώδη ανωμαλία

Παρατήρηση

Από την τελευταία απόδειξη βλέπουμε ότι αν η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο a, τότε η ανωμαλία αυτή είναι επουσιώδης αν και μόνο αν $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (Χαρακτηρισμοί των πόλων)
Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και $f: \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση
ΤΑΕΙ.

a) Το σημείο a είναι πόλος της f
b) $\exists\, m \in \mathbb{N}$ και μια ολόμορφη συνάρτηση $g: \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $g(a) \neq 0$ και $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$ για $z \in \Omega \setminus \{a\}$
γ) Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, \dots, c_m$ με $c_m \neq 0$ ώστε η συνάρτηση $k(z) = f(z) - \left(\frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_m}{(z-a)^m}\right)$ να έχει στο a επουσιώδη ανωμαλία

Απόδειξη
(a) => (b)
Από την υπόθεση έχουμε ότι $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$
Άρα υπάρχει $r > 0$ ώστε $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ και $f(z) \neq 0 \ \forall z \in \Delta(a,r) \setminus \{a\}$
Ορίζουμε τώρα συνάρτηση $h: \Delta(a,r) \to \mathbb{C}$ ώστε $h(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, $z \in \Delta(a,r) \setminus \{a\}$ και $h(a) = 0$

Η $h|_{\Delta(a,r)\setminus\{a\}}$ είναι ολόμορφη (ως πηλίκο ολομόρφων) και επειδή $\lim_{z \to a} h(z) = 0 = h(a)$
έπεται ότι η h είναι συνεχής στο a και άρα σε όλο τον $\Delta(a,r)$
Έτσι έχουμε ότι η h είναι ολόμορφη στον $\Delta(a,r)$.

Επειδή το a είναι ρίζα της h, από το Θεώρημα Ριζών ολόμορφων συναρτήσεων υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $h_1 : \Delta(a,r) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $h_1(a) \neq 0$ και $h(z) = (z-a)^m \cdot h_1(z)$, $z \in \Delta(a,r)$

Σημειώνουμε ότι $h_1(z) \neq 0$ $\forall z \in \Delta(a,r)$ (αφού $h(z) \neq 0$ για $z \neq a$ και $h_1(a) \neq 0$)

Ορίζουμε συνάρτηση g ως εξής:

$$g(z) = (z-a)^m \cdot f(z), \text{ για } z \in \underline{\Omega} \setminus \{a\} \text{ και}$$
$$g(a) = \frac{1}{h_1(a)}$$

Τότε η g είναι ολόμορφη στο $\underline{\Omega} \setminus \{a\}$ και από την παραπάνω κατασκευή $g|_{\Delta(a,r)} = \frac{1}{h_1}\Big|_{\Delta(a,r)}$

Επειδή h_1 ολόμορφη στον $\Delta(a,r)$ και $h_1(z) \neq 0$ $\forall z \in \Delta(a,r)$ έπεται ότι $\frac{1}{h_1}$ είναι ολόμορφη στον $\Delta(a,r)$.

Οπότε η g είναι ολόμορφη στο $\underline{\Omega}$ με $g(a) = \frac{1}{h_1(a)} \neq 0$

Έτσι το ζεύγος (m, g) ικανοποιεί το (b)

(b) ⇒ (γ)

Έστω $\Delta(a,r) \subseteq \underline{\Omega}$, τότε η αναλυτικότητα της g δίνει ότι $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $z \in \Delta(a,r)$ και $a_0 = g(a) \neq 0$

Άρα για $z \in \Delta(a,r)\setminus\{a\}$ έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^m}\left(a_0 + a_1(z-a) + \dots + a_m(z-a)^m + a_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots\right) =$$

$$= \frac{a_0}{(z-a)^m} + \frac{a_1}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{m-1}}{z-a} + \left(a_m + a_{m+1}(z-a) + \dots\right)$$

κύριο μέρος του πόλου a της f

Οπότε η $k(z) = f(z) - \left(\frac{a_{m-1}}{z-a} + \frac{a_{m-2}}{(z-a)^2} + \dots + \frac{a_1}{(z-a)^{m-1}} + \frac{a_0}{(z-a)^m}\right) =$

$$= a_m + a_{m+1}(z-a) + \dots + a_{m+n}(z-a)^n + \dots$$

έχει στο a επουσιώδη ανωμαλία αφού ισούται με δυναμοσειρά στον τρυπημένο δίσκο $\Delta(a,r)\setminus\{a\}$.

Θέτουμε τώρα $c_\lambda = a_{m-\lambda}$ για $\lambda = 1, 2, \dots, m$

Άρα $c_m = a_0 = g(a) \neq 0$ και έχουμε το (γ)

(γ) => (α)

Από την υπόθεση έπεται ότι

$$f(z) = k(z) + \left(\frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_m}{(z-a)^m}\right), \text{ για } z \in \underline{O}\setminus\{a\}$$

Άρα $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \lim\limits_{z\to a} k(z) + \lim\limits_{z\to a}\left(\frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{c_m}{(z-a)^m}\right) =$

$$= k(a) + \lim_{z\to a} \frac{c_1(z-a)^{m-1} + \dots + c_{m-1}(z-a) + c_m}{(z-a)^m} =$$

$$\overset{c_m \neq 0}{\underset{k(a)\in\mathbb{C}}{=}} k(a) + \frac{c_m}{0} = k(a) + \infty = \infty \Rightarrow \text{Η } f \text{ έχει πόλο στο } a$$