Μάθημα 37 | 11/01/2023

Κεφ 5 / Ασκήσεις

Άσκηση 2

Δείξτε ότι

b) $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z-1)}dz = \begin{cases} 2\pi i(-1+\cos 1) & , \gamma: |z|=\frac{3}{2} \\ 2\pi i \cos 1 & , \gamma: |z-1|=\frac{1}{2} \\ 0 & , \gamma: |z+1|=\frac{1}{2} \end{cases}$

Ζητώ $A, B, \Gamma \in \mathbb{C}$ $\frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{\Gamma}{z-1}$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{z^2(z-1)} = \frac{Az(z-1)+B(z-1)+\Gamma z^2}{z^2(z-1)}$ $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0,1\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Az(z-1)+B(z-1)+\Gamma z^2 = 1$ $\forall z \in \mathbb{C}$

Για $z=0$ έχω $-B=1 \Rightarrow B=-1$
Για $z=1$ έχω $\Gamma=1$
Για $z=-1$ έχω $2A-2(-1)+1=1 \Rightarrow 2A+2=0 \Rightarrow A=-1$

Άρα $\frac{1}{z^2(z-1)} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z-1}$, $z \neq 0,1$

$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z-1)}dz = \int_\gamma \left(-\frac{\cos z}{z} - \frac{\cos z}{z^2} + \frac{\cos z}{z-1}\right)dz =$

$= -\int_\gamma \frac{\cos z}{z}dz - \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}dz + \int_\gamma \frac{\cos z}{z-1}dz =$

Αν $f(z)=\cos z$, $z\in\mathbb{C}$ τότε f ολόμορφη στο $\mathbb{C}$
και $a=0$ τότε

$n! = 0!$

• $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-0}\,dz = f(0)\cdot \delta_\gamma(0) =$

$= \cos 0 \cdot \delta_\gamma(0) = \delta_\gamma(0)$

$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz = 2\pi i\cdot \delta_\gamma(0)$

$n! = 1!$

• $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}\,dz = f'(0)\,\delta_\gamma(0) = -\sin 0\,\delta_\gamma(0) = 0$

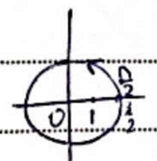
$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\cos z}{z^2}\,dz = 0$

$n! = 0!$

• $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cos z}{z-1}\,dz = \cos 1 \cdot \delta_\gamma(1) \Rightarrow$

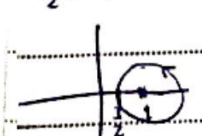
$\Rightarrow \int_\gamma \frac{\cos z}{z-1}\,dz = 2\pi i \cdot \cos 1 \cdot \delta_\gamma(1)$

Άρα $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^2(z-1)} = -2\pi i \cdot \delta_\gamma(0) + 2\pi i \cdot \cos 1 \cdot \delta_\gamma(1) =$

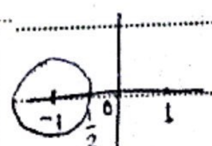


$\frac{3}{2}e^{it},\ t\in[0,2\pi]$

$$= \begin{cases} -2\pi i\cdot 1 + 2\pi i \cos 1 \cdot 1 = 2\pi i(-1+\cos 1) \\ -2\pi i \cdot 0 + 2\pi i \cos 1 \cdot 1 = 2\pi i \cdot \cos 1 \\ -2\pi i \cdot 0 + 2\pi i \cdot \cos 1 \cdot 0 = 0 \end{cases}$$



$1 + \frac{1}{2}e^{it},\ t\in[0,2\pi)$



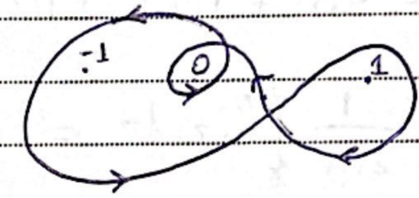
$-1 + \frac{1}{2}e^{it},\ t\in[0,2\pi)$

$\boxed{\text{Άσκηση 7}}$

Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$I = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz$ όπου $f(z) = \frac{e^z}{z^2(1-z^2)}$ και η

γ η ακόλουθη καμπύλη



Λύση

Ζητώ το $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{e^z}{z^2(1-z^2)}\,dz$

Ανάλυση σε απλά κλάσματα

$$\frac{1}{z^2(1-z^2)} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z} \quad , z \neq 0, \pm 1$$

Άρα $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \left(\frac{e^z}{z^2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^z}{1+z} + \frac{1}{2}\,\frac{e^z}{1-z}\right)dz =$

$= \int_\gamma \frac{e^z}{z^2}\,dz + \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{e^z}{z+1}\,dz - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz$ $\underline{\text{Τύπος Cauchy}}$

- $\frac{1!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z}{(z-0)^{1+1}}\,dz = f'(0)\cdot\delta_\gamma(0) = e^0\cdot 2 = 2$ $\quad (\delta_\gamma(0) = 2)$

$(\delta_\gamma(-1) = 1)$

- $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z}{z+1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-(-1)}\,dz = f(-1)\,\delta_\gamma(-1) = e^{-1}\cdot 1 = e^{-1}$

- $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz = e^1\cdot\delta_\gamma(1) = e\cdot(-1) = -e$ $\quad (\delta_\gamma(1) = -1)$

Επομένως

$$\int_\gamma f(z)\,dz \overset{f(z)=e^z}{=\!=\!=} 4\pi i + \frac{1}{2}2\pi i e^{-1} - \frac{1}{2}2\pi i(-e) =$$

$$= 4\pi i + \pi i e^{-1} + \pi i e = \pi i(4+e^{-1}+e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \frac{\pi i(4+e^{-1}+e)}{2\pi i} = 2+\frac{1}{2}(e^{-1}+e)$$

Άσκηση 9

Έστω $a,b\in\mathbb{C}$ ώστε $\operatorname{Re}a, \operatorname{Re}b\le 0$

Αποδείξτε ότι $|e^a-e^b|\le|a-b|$

Λύση

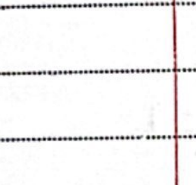
Θέτουμε $L=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}z\le 0\}$ και $f(z)=e^z$

Τότε $f'(z)=f(z)$, $z\in\mathbb{C}$ και αν $z\in L$ τότε

$|f'(z)|=|e^z|=e^{\operatorname{Re}z}\le e^0=1$

Έστω $a,b\in L$ Θέτουμε $\gamma=[a,b]$ και τότε

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_{[a,b]} f'(z)\,dz = f(b)-f(a) = e^b-e^a$$



Άρα $|e^b-e^a| = \left|\int_\gamma f'(z)\,dz\right| \le \sup_{z\in[a,b]}|f'(z)|\cdot \ell(\gamma)\le$

$$\le \sup_{z\in L}|e^z|\cdot|b-a| \le 1\cdot|b-a| = |b-a|$$

Άσκηση 13

Δώστε παράδειγμα δύο συναρτήσεων f και g, οι οποίες να έχουν καθε μια πόλο τάξης 4 στο δοθέν σημείο $a \in \mathbb{C}$ και η διαφορά τους $f-g$ να έχει πόλο τάξης 2 στο a

Λύση

Θέτουμε $g(z) = \frac{1}{(z-a)^4}$, $z \neq a$

Η g έχει πόλο στο a τάξης 4

Θέτω επίσης $f(z) = \frac{1}{(z-a)^4} + \frac{1}{(z-a)^2} = \frac{1+(z-a)^2}{(z-a)^4}$

(Ώστε $f-g = \frac{1}{(z-a)^2}$)

Επειδή για $z \neq a$: $(z-a)^4 f(z) = 1+(z-a)^2 \xrightarrow[z \to a]{} 1+0^2 = 1 \neq 0$

έχουμε ότι η f έχει στο a πόλο τάξης 4

Όμως για $z \neq a$ είναι $f(z) - g(z) = \frac{(z-a)^2}{(z-a)^4} = \frac{1}{(z-a)^2}$

η οποία έχει στο a πόλο τάξης 2

Άσκηση 14

Έστω f μια ακέραια συνάρτηση και $a, b \in \mathbb{C}$ με $a \neq b$ και $R > \max\{|a|, |b|\}$.
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I_R = \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz$$ και μετά να αποδειχτεί το Θ. Liouville

Λύση

Για $z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ ζητάμε

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} = \frac{A(z-b) + B(z-a)}{(z-a)(z-b)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = (A+B)z - Ab - Ba$$

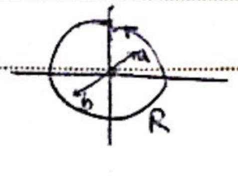
$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ bA+aB=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} B=-A \\ (b-a)A=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -\frac{1}{b-a} = \frac{1}{a-b} \\ B = -\frac{1}{a-b} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Για $z \neq a, b$ έχουμε ότι

$$\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \cdot \frac{f(z)}{z-a} - \frac{1}{a-b} \cdot \frac{f(z)}{z-b} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz = \frac{1}{a-b} \cdot \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a}\,dz - \frac{1}{a-b} \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b}\,dz$$

τύπος Cauchy για την f $$\frac{1}{a-b}\left(2\pi i\, f(a)\, \overset{1}{\delta_{C(0,R)}(a)} - 2\pi i\, f(b)\, \overset{1}{\delta_{C(0,R)}(b)}\right) \overset{R > |a|, |b|}{=\!=}$$



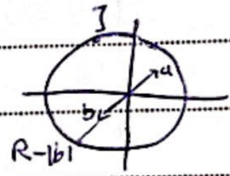
$$= \frac{2\pi i}{a-b}\left(f(a)-f(b)\right) = 2\pi i \, \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$$

Έστω f ακέραια και φραγμένη συνάρτηση

Θ.δ.ο. f σταθερή

Έστω $M>0 : |f(z)| \leq M \ \forall \ z \in \mathbb{C}$

Τότε $\left|2\pi i \frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right| = |I_R| = \left|\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz\right| \leq$



$\leq \max_{|\zeta|=R} |g(\zeta)| \cdot 2\pi R \leq \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)} \cdot 2\pi R \xrightarrow{R\to+\infty} 0$

Αλλά $|g(\zeta)| = \left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)(\zeta-b)}\right| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-a||\zeta-b|} \leq \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)}$

(Για $\zeta \in C(0,R)$ έχω $|\zeta-b| \geq R-|b| > 0$ και $|\zeta-a| \geq R-|a| > 0$)

$\Rightarrow 2\pi \left|\frac{f(a)-f(b)}{a-b}\right| = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) = f(b) \ \forall \ a,b \in \mathbb{C}$ με $a \neq b$ και άρα f σταθερή