$\boxed{\text{Μαθημα 20}}$ $\boxed{25/11/2022}$

$\boxed{\text{Παρατηρήσεις}}$

1) Αν $n\in\mathbb{N}$ και $z\neq 0$, τότε η ποσότητα $e^{n\log z}$ όπως την ορίσαμε παραπάνω συμπίπτει με το γινόμενο $z\cdot z\cdots z$ (n-παράγοντες) το οποίο συμβολίζουμε με z^n.

Πράγματι $e^{n\log z} = e^{\overbrace{\log z+\log z+\dots+\log z}^{n\text{-φορές}}} =$
$= \underbrace{e^{\log z}\, e^{\log z} \cdots e^{\log z}}_{n\text{-φορές}} = \underbrace{z\, z \cdots z}_{n\text{-φορές}} = z^n$

Εύκολα βλέπει κανείς ότι $z^{-\lambda} = \frac{1}{z^{\lambda}}$

$$\left(z^{-\lambda} = e^{-\lambda\log z} = \frac{1}{e^{\lambda\log z}} = \frac{1}{z^{\lambda}}\right)$$

Ιδιαιτέρως αν n θετικός ακέραιος, τότε
$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{\underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n\text{-φορές}}} = \underbrace{\frac{1}{z}\,\frac{1}{z}\cdots\frac{1}{z}}_{n\text{-φορές}}$$

άρα η ποσότητα z^{λ}, για $\lambda=-n$ συμπίπτει με την ποσότητα $\underbrace{\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z}\cdots\frac{1}{z}}_{n\text{-φορές}}$

Επίσης παρατηρούμε ότι αν $z\neq 0$ και $z=|z|\cdot e^{i\theta}$, $\theta\in(-\pi,\pi]$ ($\theta=\arg(z)$) και $n\in\mathbb{N}$ τότε η ποσότητα $z^{\frac{1}{n}}$ σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, ταυτίζεται με την ποσότητα $\sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\theta}{n}}$ και συμβολίζεται με $\sqrt[n]{z}$

$\left(z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log z} = e^{\frac{1}{n}(\log|z| + i\theta)} = e^{\frac{1}{n}\log|z|} e^{i\frac{\theta}{n}} = \right.$
$\left. = e^{\log|z|^{1/n}} e^{i\theta/n} = |z|^{1/n} e^{i\theta/n} = \sqrt[n]{|z|} e^{i\theta/n} \equiv \sqrt[n]{z}\right)$

2) Αν $a \in \mathbb{C}, a \neq 0$ τότε η συνάρτηση
$z \longmapsto a^z = e^{z\log a}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και

$(a^z)' = (e^{z\log a})' = e^{z\log a}\cdot(z\log a)' = e^{z\log a}\log a =$
$= a^z \log a$

3) Έστω $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ και $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Τότε $z^{\lambda+\mu} = z^\lambda \cdot z^\mu$

Πράγματι $z^{\lambda+\mu} = e^{(\lambda+\mu)\log z} = e^{\lambda\log z + \mu\log z} =$
$= e^{\lambda\log z} e^{\mu\log z} = z^\lambda \cdot z^\mu$

4) Σημειώνουμε ότι γενικά έχουμε I) $\log e^z \neq z$,

II) $(z^\lambda)^\mu \neq z^{\lambda\mu}$ και III) $(zw)^\lambda \neq z^\lambda \cdot w^\lambda$

Ισότητα έχουμε στην πρώτη περίπτωση αν και μόνο αν $\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]$, στην δεύτερη αν και μόνο αν $\operatorname{Im}(\lambda\log z) \in (-\pi,\pi]$ και στην τρίτη περίπτωση αν και μόνο αν $-\pi < \arg(z) + \arg(w) \leq \pi$

Απόδειξη I) $(\Rightarrow)$ Αν $\log e^z = z$ τότε $z = \log|e^z| + i\underbrace{\arg(e^z)}_{\in(-\pi,\pi]}$

Άρα $\operatorname{Im} z \in (-\pi,\pi]$

$(\Leftarrow)$ Αν $\operatorname{Im} z \in (-\pi,\pi]$ τότε $\log e^z = \log(e^{x+iy}) =$
$= \log(e^x \cdot e^{iy}) = \log|e^x e^{iy}| + i\arg(e^x e^{iy}) \overset{|e^{iy}|=1}{\underset{e^x>0}{=}}$

$= \log e^{x} + i\arg(e^{iy}) \overset{y\in(-\pi,\pi]}{=\!=\!=} x+iy = z$

Απόδειξη III) $(\Rightarrow)$ $\log(zw) = \log|zw| + i\arg(z\cdot w) =$
$= \log|z| + \log|w| + i\arg(zw)$ ①

Τα $\arg(zw)$ και $\arg(z)+\arg(w)$ είναι ορίσματα του zw και επειδή ανήκουν και τα δύο στο $(-\pi,\pi]$ έχουμε ότι $\arg(zw) = \arg(z)+\arg(w)$ ②

Άρα $\log(zw) \overset{①②}{=} \log|z| + \log|w| + i(\arg(z)+\arg(w)) =$
$= \log|z| + i\arg(z) + \log|w| + i\arg(w) = \log z + \log w$.

$(zw)^{\lambda} = e^{\lambda\log(zw)} = e^{\lambda(\log z + \log w)} = e^{\lambda\log z}\cdot e^{\lambda\log w} =$
$= z^{\lambda}\cdot w^{\lambda}$

$(\Leftarrow)$ Αν $(zw)^{\lambda} = z^{\lambda}w^{\lambda}$ έχουμε $e^{\lambda\log(zw)} = e^{\lambda\log z}e^{\lambda\log w}$
$\Rightarrow e^{\lambda\log(zw)} = e^{\lambda(\log z+\log w)} \Rightarrow$
$\exists k\in\mathbb{Z}: \lambda\log(zw) = \lambda(\log z + \log w) + 2k\pi i \Rightarrow$
$\log(zw) - (\log z + \log w) = \frac{2k\pi i}{\lambda} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log|zw| + i\arg(zw) - (\log|z| + i\arg(z) + \log|w| + i\arg(w)) = \frac{2k\pi i}{\lambda}$

$\Rightarrow \cancel{i}(\arg(zw) - \arg(z) - \arg(w)) = \frac{2k\pi \cancel{i}}{\lambda}$

θα το ξαναδείξει
ΚΑΠΟΥ ΚΟΛΛΑΕΙ

Επειδή $\arg(zw) - \arg(z) - \arg(w) \in (-3\pi, 3\pi]$
έχω $\frac{2k\pi}{\lambda} \in (-3\pi, 3\pi] \Rightarrow \lambda\in\mathbb{R}$ και $\frac{k}{\lambda}\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} < \frac{k}{\lambda} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2k} < \frac{1}{\lambda} \leq \frac{3}{2k} \Rightarrow \left|\frac{1}{\lambda}\right| \leq \frac{3}{2k}$

Παρατήρηση

Η συνάρτηση $g(z)=z^{\lambda}$ $(\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$ είναι ολόμορφη στον τόπο $\mathbb{C}_{\pi}$ και μάλιστα $g'(z)=\lambda z^{\lambda-1}$

Απόδειξη

Για $z\in\mathbb{C}_{\pi}$ έχω $g'(z)=(e^{\lambda \log z})'=e^{\lambda\log z}(\lambda\log z)'=$
$=e^{\lambda\log z}\cdot\frac{\lambda}{z}=\lambda\frac{e^{\lambda\log z}}{e^{\log z}}=\lambda\cdot e^{(\lambda-1)\log z}=\lambda z^{\lambda-1}$

Βέβαια αν $\lambda\in\mathbb{N}$ τότε η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και αν λ αρνητικός ακέραιος τότε είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}/\{0\}$. Αν $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$ τότε κάθε σημείο του αρνητικού πραγματικού ημιάξονα είναι σημείο ασυνέχειας της g

Από τα παραπάνω έπεται ότι η $f(z)=(1+z)^{\lambda}$ $(\lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\})$ είναι ολόμορφη στον τόπο $-1+\mathbb{C}_{\pi}=\{z-1 : z\in\mathbb{C}_{\pi}\}=$
$=\mathbb{C}\setminus\{t\in\mathbb{R} : t\leq 1\}$ και βέβαια
$f'(z)=\lambda(1+z)^{\lambda-1}$, $z\in\mathbb{C}\setminus\{t\in\mathbb{R}: t\leq 1\}$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Τύπος Newton - Abel)
Για $\lambda\in\mathbb{C}$ και $|z|<1$ ισχύει ότι

$$(1+z)^{\lambda}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\lambda}{n}z^{n}=1+\lambda z+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}z^{2}+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}z^{3}+\dots$$

όπου $\binom{\lambda}{n}=\frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}$ για $n\in\mathbb{N}$ και $\binom{\lambda}{0}=1$

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$

1) Αν $\lambda \in \mathbb{R}$ τότε βέβαια ο τύπος Newton - Abel

$(1+z)^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} z^n$, $|z|<1$, $z \in \mathbb{C}$ είναι επέκταση του γνωστού τύπου από τον Απειροστικό (του Newton)

$$(1+x)^{\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} x^n \quad , |x|<1, \; x \in \mathbb{R}$$

Απόδειξη Θεωρήματος

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής αποτέλεσμα
Αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη τότε η f είναι αναλυτική στο Ω.
Δηλαδή $\forall a \in \Omega$ και $\forall r>0$ $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ υπάρχει δυναμοσειρά κέντρου a και ακτίνας σύγκλισης $R \geq r$ ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $|z-a|<r$
όπου $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, $n \geq 0$

Πράγματι η f: $f(z) = (1+z)^{\lambda}$ είναι ολόμορφη στον τόπο $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R}, t \leq 1\}$ και βέβαια $\Delta(0,1) \subseteq \Omega$. Άρα υπάρχει δυναμοσειρά με κέντρο 0 ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $|z|<1$

Παρατηρούμε ότι $f'(z) = \lambda(1+z)^{\lambda-1}$, $f''(z) = \lambda(\lambda-1) z^{\lambda-2}$
και επαγωγικά έχουμε $f^{(n)}(z) = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)(1+z)^{\lambda-n}$
για $z \in \Omega$, $n \geq 0$

Έτσι $f^{(n)}(0) = \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)$, $n \geq 0$

και άρα $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n+1)}{n!} = \binom{\lambda}{n}$, $n \geq 0$

$\Rightarrow f(z) = (1+z)^\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\lambda}{n} z^n$, $z \in \Delta(0,1)$

$\boxed{\text{Παράδειγμα}}$

Υπολογίστε το άθροισμα $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\binom{i}{n}(i-1)^n$

Παρατηρούμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}\binom{i}{n}(i-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{i}{n}\left(\frac{i-1}{2}\right)^n$ και

ότι αν $w = \frac{i-1}{2}$ τότε $|w| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$

Επομένως το ζητούμενο άθροισμα είναι

$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{i}{n} w^n = (1+w)^i = \left(1+\frac{i-1}{2}\right)^i = \left(\frac{1+i}{2}\right)^i = e^{i\log\left(\frac{1+i}{2}\right)}$

Υπολογίζουμε $\log\left(\frac{1+i}{2}\right) = \log\left|\frac{1+i}{2}\right| + i\arg\left(\frac{1+i}{2}\right) =$

$= \log\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\pi}{4}$ και άρα

$(1+w)^i = e^{i\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\pi}{4}\right)} = e^{-\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\log\frac{\sqrt{2}}{2}} =$

$= e^{-\frac{\pi}{4}}\left(\cos\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\sin\left(\log\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$

$\boxed{\text{Ασκηση 10}}$

Εστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολομορφη της μορφής
$f(z) = u(x) + i\,v(y)$, $z = x + iy \in \mathbb{C}$
Αποδείξτε οτι η f είναι μιγαδικό πολυώνυμο πρώτου βαθμού.

Λυση

Επειδή f ολόμορφη (στο $\mathbb{C}$) ικανοποιεί τις εξισώσεις C-R.

Άρα $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$\Rightarrow \forall z = (x,y) \in \mathbb{C}$ είναι $u'(x) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y) =$

$= \dfrac{\partial v}{\partial y}(x,y) = v'(y)$

$\Rightarrow \exists\, c \in \mathbb{R} : u'(x) = c = v'(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} : u(x) = cx + d_1$, $d_1 \in \mathbb{R}$ και $\forall y \in \mathbb{R} : V(x) = cy + d_2$, $d_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall z = (x,y) \in \mathbb{C}$ είναι

$f(z) = u(x) + i v(y) = cx + d_1 + icy + id_2 =$

$= c(x+iy) + \underbrace{(d_1 + i d_2)}_{d \in \mathbb{C}} = cz + d$ = πρωτοβαθμιο πολυωνυμο του z