Άρα $g(z) = F(z)F(a-z) = F(a) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Επειδή το a ήταν τυχαίο, παίρνω $a = z+w$ και λαμβάνω $\underbrace{F(z+w)}_{a} = F(z)\,\underbrace{F(w)}_{a-z}$

Μάθημα 18 — 22/11/2022

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η εκθετική συνάρτηση αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 ως εξής:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad z \in \mathbb{C}$$

Δηλαδή ισχύει $F(z) = e^z$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$

Απόδειξη

Πρώτα θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό $F(iy) = e^{iy}, \forall y \in \mathbb{R}$

Πράγματι, έστω $y \in \mathbb{R}$. Τότε έχουμε

$$F(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \dots + \frac{(iy)^n}{n!}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \dots + \frac{(iy)^{2n}}{(2n)!} + \frac{(iy)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{i^2y^2}{2!} + \dots + \frac{i^{2n}y^{2n}}{(2n)!}\right) + i\left(y + \frac{i^2y^3}{3!} + \dots + \frac{i^{2n}y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 - \frac{y^2}{2!} + \dots + (-1)^n\frac{y^{2n}}{(2n)!}\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \dots + (-1)^n\frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\right] =$$

$$= \cos y + i \sin y = e^{iy}$$

Έστω τώρα $z = x+iy$ με $x, y \in \mathbb{R}$
Τότε $F(x+iy) = F(x) \cdot F(iy) = e^x \, e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$
$\Rightarrow F(z) = e^z$

Προηγουμένως δείξαμε ότι $F(iy) = \cos y + i \sin y$, $y \in \mathbb{R}$
Μπορούμε αντί για $y \in \mathbb{R}$ να πάρουμε $y \in \mathbb{C}$
Έτσι θα λάβαμε το ακόλουθο

ΘΕΩΡΗΜΑ (Τύπος του Euler)

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Η Περιοδικότητα της εκθετικής συνάρτησης)

a) $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i$, όπου $k \in \mathbb{Z}$ και

b) $e^z = e^w \iff z - w = 2k\pi i$, όπου $k \in \mathbb{Z}$

Σημείωση ($e^{i\theta} = 2\pi$ - περιοδική, $e^{iz} = 2\pi i$ - περιοδική)

Απόδειξη

a) Έστω $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.
Τότε $e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i \sin(2k\pi) = 1 + i0 = 1$

Αντίστροφα

Έστω $e^z = 1$, όπου $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$
Τότε $e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y) = 1 \iff$
$\iff \left.\begin{array}{l} e^x \cos y = 1 \quad (1) \\ e^x \sin y = 0 \quad (2) \end{array}\right\}$

$(2) \Rightarrow \sin y = 0 \Rightarrow y = \lambda\pi$, για κάποιο $\lambda \in \mathbb{Z}$ (3)

$(1),(3) \Rightarrow e^x \cos(\lambda\pi) = 1 \Rightarrow e^x (-1)^\lambda = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow e^x = (-1)^{-\lambda} = (-1)^\lambda \Rightarrow e^x = 1$ και $\lambda = 2k$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 0$ και $\lambda = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

Άρα $z = x + iy = 0 + i\lambda\pi = i2k\pi = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

b) Από το (a) έχουμε $e^z = e^w \Leftrightarrow e^{z-w} = 1$
$\Leftrightarrow z - w = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Κάθε ακέραιο πολλαπλάσιο του $2\pi i$ είναι μια περίοδος για την εκθετική συνάρτηση.
Ιδιαιτέρως η εκθετική συνάρτηση δεν είναι 1-1 (σε αντίθεση με τον περιορισμό της στο $\mathbb{R}$)

ΠΟΡΙΣΜΑ

a) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $z \in \mathbb{C}$

b) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$, $z \in \mathbb{C}$

γ) $\sin(z+w) = \sin z \cdot \cos w + \cos z \cdot \sin w$ και
$\cos(z+w) = \cos z \cdot \cos w - \sin z \cdot \sin w$

δ) $\cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ και
$\sin z = 0 \Leftrightarrow z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Απόδειξη

a) Από τον τύπο του Euler έχω ότι

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \quad \text{και} \quad e^{-iz} = \cos(-z) + i\sin(-z) = \cos z - i\sin z$$

Με πρόσθεση κατά μέλη έχω

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2\cos z \Rightarrow \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

Με αφαίρεση κατά μέλη έχω

$$e^{iz} - e^{-iz} = 2i\sin z \Rightarrow \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2}$$

b) $$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left[(e^{iz}+e^{-iz})^2 - (e^{iz}-e^{-iz})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[e^{2iz} + e^{-2iz} + 2\underbrace{e^{iz}\cdot e^{-iz}}_{1} - e^{2iz} - e^{-2iz} + 2\underbrace{e^{iz}\cdot e^{-iz}}_{1}\right] =$$

$$= \frac{1}{4}(2+2) = 1$$

γ) Έχουμε $4(\cos z\cos w - \sin z\cdot\sin w) =$

$$= \cancel{4}\left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{\cancel{2}}\cdot\frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2} - \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\cdot\frac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i}\right) =$$

$$= (e^{iz}+e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw}) + (e^{iz}-e^{-iz})(e^{iw}-e^{-iw}) =$$

$$= e^{i(z+w)} + \cancel{e^{i(z-w)}} + \cancel{e^{i(w-z)}} + e^{-i(z+w)} + e^{i(z+w)} - \cancel{e^{i(z-w)}} -$$

$$- \cancel{e^{i(w-z)}} + e^{-i(z+w)} = 2(e^{i(z+w)} + e^{-i(z+w)}) = 2\,2\cos(z+w) =$$

$$= 4\cos(z+w)$$

$$\Rightarrow \cos(z+w) = \cos z\cos w - \sin z\cdot\sin w$$

Όμοια δουλεύουμε για το $\sin(z+w)$

δ) $\cos z = 0 \overset{(α)}{\Longleftrightarrow} \dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{iz}+e^{-iz} = 0 \Leftrightarrow$

$(e^{iz}+e^{-iz})e^{iz} = 0 \Leftrightarrow e^{2iz}+1 = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow$

$\overset{\text{Περιοδικότητα}}{\underset{\text{της exp}}{\Longleftrightarrow}}$ $2iz = i\pi + 2k\pi i$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$

Ανάλογα δουλεύουμε για τις ρίζες της $\sin z = 0$

Παρατήρηση

Όπως στην τριγωνομετρία ορίζουμε τις υπόλοιπες τριγωνομετρικές συναρτήσεις: εφαπτομένη, συνεφαπτομένη, τέμνουσα και συντέμνουσα

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z} \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + n\pi ,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \{n\pi ,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z} \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + n\pi ,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

$$\csc z = \frac{1}{\sin z} \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \{n\pi ,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε τους γνωστούς τύπους:

$\boxed{\tan' z = \sec^2 z}$

$\boxed{\cot' z = -\csc^2 z}$

$\boxed{\sec' z = \sec z \cdot \tan z}$

$\boxed{\csc' z = -\csc z \cdot \cot z}$

Παρατήρηση

Οι συναρτήσεις $\sin z, \cos z, \sec z, \csc z$ έχουν περίοδο 2π και οι συναρτήσεις $\tan z, \cot z$ έχουν περίοδο π

Θα αποδείξουμε παρακάτω την "Αρχή της ταυτότητας" για ολόμορφες συναρτήσεις

Αν $D \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, $f, g : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφες και $S \subseteq D$ με σ.σ. στο D ώστε $f(z) = g(z)$ $\forall z \in S$, τότε $f(z) = g(z)$ $\forall z \in D$

Αν θέλω ν.δ.ο $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \cdot \sin w$

Η ισότητα ισχύει στο $\mathbb{R}$ και το $\mathbb{R}$ έχει σ.σ. στο $\mathbb{R}$ (π.χ. $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}'$) άρα ισχύει $\forall z, w \in \mathbb{C}$

Τέλος οι <u>υπερβολικές</u> συναρτήσεις επεκτείνονται και αυτές σε ολόμορφες συναρτήσεις σε όλο το $\mathbb{C}$. Έτσι ορίζαμε:

$$\boxed{\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}} \quad \text{και} \quad \boxed{\sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}} \quad , z\in\mathbb{C}$$

Έχουμε ότι: $\cosh z = 0 \Leftrightarrow z \in \{(n+\frac{1}{2})\pi i : n\in\mathbb{Z}\}$

και $\sinh z = 0 \Leftrightarrow z\in\{n\pi i : n\in\mathbb{Z}\}$

Έτσι π.χ. έχουμε:

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z} \quad , z\in\mathbb{C}\setminus\{(n+\tfrac{1}{2})\pi i : n\in\mathbb{Z}\}$$

Οι συναρτήσεις $\sinh z$, $\cosh z$ είναι $2\pi i$-περιοδικές και $\boxed{\cosh' z = \sinh z}$ και $\boxed{\sinh' z = \cosh z}$

$\boxed{\text{ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ}}$

α) $\cosh z = \cos(iz)$

b) $\sinh z = -i\cdot\sin(iz)$

γ) $\sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i\cos x\cdot\sinh y$

δ) $\cos(x+iy) = \cos x\cdot\cosh y - i\sin x\cdot\sinh y$

Από τις (γ),(δ) συνάγουμε τη μορφή του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του $\sin z$ και του $\cos z$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $\overline{(e^z)} = e^{\bar z}$

Πράγματι, αν $z = x+iy$, τότε $\overline{(e^z)} = \overline{e^x \cdot e^{iy}} = e^x\, \overline{e^{iy}} =$
$= e^x\, \overline{(\cos y + i\sin y)} = e^x (\cos y - i\sin y) = e^x\cdot(\cos(-y) + i\sin(-y)) =$
$= e^x e^{-iy} = e^{x-iy} = e^{\bar z}$

2) $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Έστω $z = x+iy$ τότε $e^z = e^x \cdot e^{iy} \Rightarrow$
$\Rightarrow |e^z| = |e^x \cdot e^{iy}| = |e^x|\cdot|e^{iy}| = e^x \cdot |e^{iy}| = e^x \cdot 1 = e^x > 0$
$\Rightarrow e^z \neq 0$

$$\boxed{|e^z| = e^{\mathrm{Re} z} \Rightarrow |e^z| = e^{\mathrm{Re} z} \leq e^{|z|}}$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η εκθετική παίρνει όλες τις μιγαδικές τιμές εκτός του 0.
Δηλαδή ισχύει $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\quad (\exp(z) = e^z)$

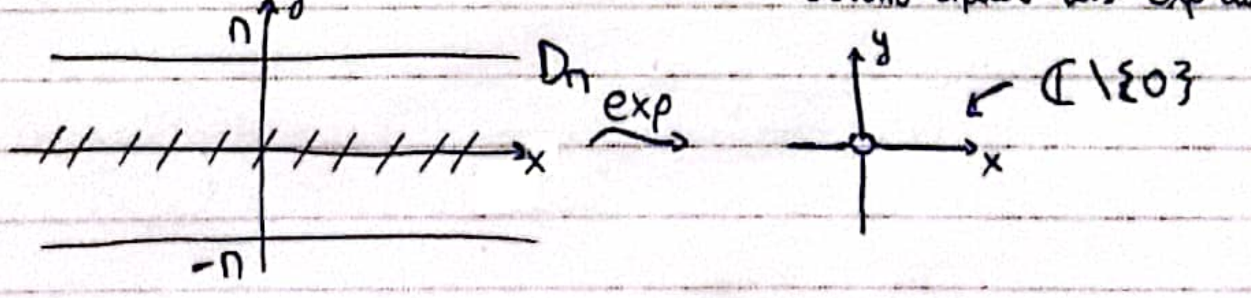
Απόδειξη

Έστω $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$. Θέλουμε να λύσουμε ως προς z την εξίσωση $e^z = w$.
Γράφουμε $w = |w| e^{i\theta}$, όπου θ ένα όρισμα του w
π.χ. $\theta = \arg(w)$
Όμως $|w| = e^{\log|w|}$ άρα $w = e^{\log|w|} \cdot e^{i\theta} =$
$= e^{\log|w| + i\theta}$. Έτσι $e^z = w = e^{\log|w| + i\theta} \Leftrightarrow$

$\iff z = \log|w| + i\theta + 2k\pi i = \log|w| + i(\theta + 2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$
όπου οι αριθμοί $\theta + 2k\pi$ είναι όλα τα δυνατά ορίσματα του w

$\boxed{\text{Παρατήρηση}}$

Κάθε μιγαδικός $w \neq 0$ έχει μοναδικό όρισμα στο διάστημα $(-\pi, \pi]$
(το κύριο όρισμα $\theta = \arg(w)$. Από αυτό έπεται ότι η εξίσωση $e^z = w$ έχει μοναδική λύση στην "ταινία" $D_\pi = \mathbb{R} \times (-\pi, \pi]$ της μορφής $z = x + i\theta$ με $x = \log|w|$ και $\theta = \arg(w) \in (-\pi, \pi]$
Έπεται ότι η εκθετική συνάρτηση περιορισμένη στο D_π γίνεται 1-1 και επιπλέον λαμβάνει εκεί όλες τις τιμές της, δηλαδή $\exp(D_\pi) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
Το ίδιο ισχύει αν περιορίσουμε την εκθετική σε υποσύνολα του $\mathbb{C}$ της μορφής $D = \mathbb{R} \times I$, όπου $I = (a - 2\pi, a]$ ή $I = [a - 2\pi, a)$ με $a \in \mathbb{R}$
Έτσι έχουμε $\exp|_D = 1-1$ και $\exp(D) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$
σύνολο τιμών της exp από D



ΟΡΙΣΜΟΣ

Για κάθε $z\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0$ θέτουμε

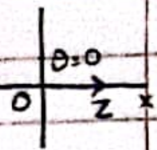
$$\boxed{\log z = \log|z| + i\arg(z)}$$

όπου $\arg(z)$ = το πρωτεύον όρισμα του z

Η κατ' αυτόν τον τρόπο ορισμένη συνάρτηση $\log:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C}$ ονομάζεται κύριος κλάδος του λογαρίθμου.

Είναι σαφές ότι ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου είναι 1-1 συνάρτηση και $\log(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = D_\pi = \mathbb{R}\times(-\pi,\pi]$ με αντίστροφη συνάρτηση την $\exp|_{D_\pi}$ ← εκθετική αν την περιορίσουμε στην λωρίδα D_p

Επομένως για $w\neq 0$: $e^{\log w} = w$ και για $z\in D_\pi \iff \operatorname{Im} z\in(-\pi,\pi]$ είναι $\log e^z = z$



Παρατηρούμε ότι αν z είναι θετικός πραγματικός αριθμός τότε $\arg(z)=0$ και άρα ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου επεκτείνει τον πραγματικό λογάριθμο

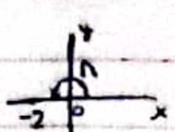
$x\in(0,+\infty)\longmapsto \log x\in\mathbb{R}$

$\left(\log x = \ln|x| + i\arg(x) \underset{x>0}{=} \ln x + i\cdot 0 = \ln x\right)$

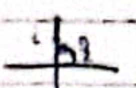
Παραδείγματα

1) Να υπολογισθούν οι $\log(-2)$, $\log(i)$, $\log(-1)$
2) Δείξτε ότι $\log(i(-1+i)) \neq \log i + \log(-1+i)$ και $\log(-1)^2 \neq 2\log(-1)$
3) Να λυθεί η εξίσωση $e^z = -2$

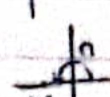
Λύση



1) $\log(-2) = \log|-2| + i\arg(-2) = \log 2 + i\cdot\pi$



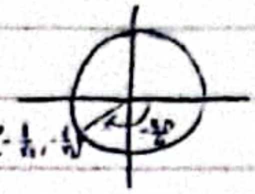
$\log(i) = \log|i| + i\arg(i) = \overset{0}{\log 1} + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$



$\log(-1) = \log|-1| + i\arg(-1) = \overset{0}{\log 1} + i\pi = i\pi$

2) $i(-1+i) = -i + i^2 = -1 - i$

$|-1-i| = \sqrt{2}$

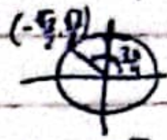


και $\arg(-1-i) = \arg\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3\pi}{4} \in (-\pi,\pi]$

(Διαιρώ με το μέτρο του μιγαδικού για να το δω

άρα

$$\log(i(-1+i)) = \log\sqrt{2} + i\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{3\pi i}{4}$$



Επίσης έχουμε $|-1+i| = \sqrt{2}$

$$\arg(-1+i) = \arg\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4} \in (-\pi,\pi]$$

άρα

$$\log(-1+i) = \log\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\log 2 + i\frac{3\pi}{4}$$

Ακόμα $\log i = i\frac{\pi}{2}$ και συνεπώς

$$\log(-1+i) + \log i = \frac{1}{2}\log 2 + i\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + i\frac{5\pi}{4} \neq \log(i(-1+i))$$

(όμως οι δύο λογάριθμοι διαφέρουν κατά $2k\pi$ με $k=1\in\mathbb{Z}$)

(Γενικά ισχύει ότι $\boxed{\log(zw) = \log z + \log w + 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}}$

$\log(-1)^2 \neq 2\log(-1)$ διότι $\log(-1)^2 = \log 1 = 0$

ενώ $2\log(-1) = 2i\pi \neq 0$

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

Αν $-\pi < \arg(z) + \arg(w) \le \pi$ τότε ισχύει ότι

$\log(z\cdot w) = \log z + \log w$