ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

7/10/22 — 1º μάθημα

Στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2+1=0$ δεν έχει ρίζα
Στο $\mathbb{C}$ θα έχει ρίζες

Ορισμός: Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι
$\mathbb{C} = \mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{R}\}$

α) Αν $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d) \in \mathbb{C}$ τότε ορίζουμε

$z_1 + z_2 = (a+c,\ b+d)$

$z_1 \cdot z_2 = (ac-bd,\ ad+bc)$

Πρόταση: Το $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ είναι αλγεβρικό σώμα
Το $\mathbb{C}$ είναι μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα $1 := (1,0)$ και $\forall\ z\in\mathbb{C}\setminus\{\underset{0}{\underset{\shortparallel}{(0,0)}}\}$ $\exists$ πολ/λαστικός αντίστροφος

Για κάθε $x,z,w\in\mathbb{C}$ ισχύουν τα εξής:

- $z+w = w+z$ (αντιμεταθετική)
- $z+(w+x) = (z+w)+x$ (προσεταιριστική)
- $\exists\ 0=(0,0)$: $z+0=0+z=z$ (ύπαρξη μηδενός)
- $\exists\ -z\in\mathbb{C}$: $z+(-z) = (-z)+(z) = 0 \in\mathbb{C}$ (ύπ. αντιθέτου)
- $zw = wz$
- $z\cdot(w\cdot x) = (z\cdot w)\cdot x$
- $\exists\ 1=(1,0)$: $z\cdot 1 = 1\cdot z = z$
- $\exists\ z^{-1}\in\mathbb{C}$: $z^{-1}\cdot z = z\cdot z^{-1} = 1$
- Αν $z=(a,b)\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ τότε:

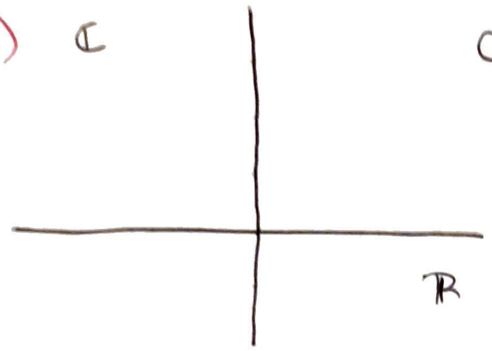
$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

Μπορούμε με πράξεις να δούμε ότι:
$z\cdot z^{-1} = z^{-1}\cdot z = 1 = (1,0)$

- $\forall\ z,w,x\in\mathbb{C}$, $x(z+w) = xz + xw$

Παρατηρήσεις:

1)



Ορίζουμε απεικόνιση

$$\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$\underset{\in \mathbb{R}}{a} \longmapsto (a,0)$$

Η φ είναι ένας μονομορφισμός σωμάτων.

φ : "1-1"

$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$

$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ (υπόσωμα)

2) Αν $a \in \mathbb{R}$ και $z = (c,d) \in \mathbb{C}$ τότε:

$$a \cdot z = (a,0)(c,d) = (ac, ad) = a(c,d)$$

τίποτε άλλο από βαθμωτό πολλαπλασιασμό στο $\mathbb{R}^2$

$\mathbb{C}$ είναι $\mathbb{R}$-διανυσματικός χώρος $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

$\mathbb{C}$ είναι $\mathbb{C}$-διανυσματικός χώρος $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$

Ορισμός: Έστω $i = (0,1)$. Το i καλείται φανταστική μονάδα. Παρατηρούμε ότι $i^2 = i \cdot i = (0,1)(0,1) = (-1,0) = -1$

Το i είναι ρίζα της $z^2 + 1 = 0$ (κερδίζουμε αυτό, αλλά χάνουμε τη διάταξη)

Αν $z = (a,b) \in \mathbb{C}$ τότε:

$$z = (a,b) = (a,0) + (0,b) = a\underbrace{(1,0)}_{1} + b\underbrace{(0,1)}_{i} =$$
$$= a 1_{\mathbb{C}} + bi = a + bi, \quad a,b \in \mathbb{R}$$

Κάθε μιγαδικός αριθμός z γράφεται σε αυτή τη μορφή.

Το $\mathbb{R}$ έχει μια διάταξη "$\leq$" η οποία σέβεται τη δομή του. Για κάθε $a, b, c \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

- $a+c \leq b+c \Leftrightarrow a \leq b$
- Αν $c \geq 0$ τότε ισχύει: $a \leq b \Rightarrow ac \leq bc$

Αν είχαμε μια τέτοια διάταξη στο $\mathbb{C}$, τότε:

αν $z \in \mathbb{C}$ τότε: $z \geq 0$ ή $z < 0$

αν $z \geq 0$ τότε $z^2 = z \cdot z \geq 0 \cdot z = 0$

αν $z < 0$ τότε $z + (-z) < 0 + (-z) \Rightarrow 0 < -z$

$\Rightarrow z^2 = (-z)\cdot(-z) > 0$

Άρα $\forall z \in \mathbb{C}$ $z^2 \geq 0$

Αλλά $1 = 1 \cdot 1 = 1 \geq 0$ και $1 \neq 0 \Rightarrow 1 > 0$

$\Rightarrow z^2 + 1 \geq 0 + 1 > 0 \Rightarrow z^2 + 1 > 0 \Rightarrow$ η εξίσωση $z^2+1=0$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$, ΑΤΟΠΟ αφού $i^2+1=0$.

Αν $z = a+bi$, $w = c+di \in \mathbb{C}$ τότε (πολ/λασμός):

$zw = (a+ib)(c+id) = ac + iad + ibc + i^2 bd =$

$= (ac-bd) + i(ad+bc) = (ac-bd, ad+bc)$

όπως το ορίσαμε αρχικά

(Πρόσθεση) $(a \pm ib) + (c \pm id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$

Αν $c+id \neq 0 \Leftrightarrow c \neq 0$ ή $d \neq 0$

τότε $\dfrac{a+ib}{c+id} = \dfrac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} =$

$$= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

$$\boxed{\text{Δυνάμεις Μιγαδικών Αριθμών με ακέραιους εκθέτες:}}$$

Ορίζουμε:

$z^1 = z$

$z^2 = z \cdot z$

$z^3 = z^2 \cdot z$

$\vdots$

$z^n = z^{n-1} \cdot z$

$z^0 = 1 \ , \ z \neq 0$

Για $z \neq 0 \ , \ n \geq 1$:

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n}$$

Έχουμε $\forall \ z, w \in \mathbb{C}, \ \forall \ n, m \in \mathbb{Z}$:

$(zw)^n = z^n \cdot w^n \ , \ z^n \cdot z^m = z^{n+m}$

$(z^n)^m = z^{n \cdot m} \ , \ 0^0$ δεν έχει νόημα

Πολυωνυμικές και Ρητές Συναρτήσεις στο $\mathbb{C}$

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n , \quad \text{όπου } a_i \in \mathbb{C}, \forall i$$

Μιγαδικό πολυώνυμο

$$Q(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m} , \quad b_m \neq 0$$

ρητή μιγαδ. συνάρτηση

Διώνυμο του Νεύτωνα

$\forall \ z, w \in \mathbb{C}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$:

$$(z+w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k , \quad \text{όπου } \binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Αποδ.: Με επαγωγή

Παραδείγματα

(1) $i^{4n} = (i^4)^n = (i^2)^{2n} = (-1)^{2n} = 1$

$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = 1 \cdot i^2 = -1$

$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = 1 \cdot i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = 1 \cdot i = i$

(2) $(1+i)^{20} = ((1+i)^2)^{10} = (1+2i+i^2)^{10} =$
$= (1+2i-1)^{10} = (2i)^{10} = 2^{10} \cdot i^{10} = 2^{10} \cdot i^{4\cdot 2+2} =$
$= 2^{10} \cdot (-1) = -2^{10} = -1024$

Μιγαδικοί Συζυγείς

Αν $z = a+bi \in \mathbb{C}$ $(a,b \in \mathbb{R})$ τότε ορίζουμε:
i) Πραγματικό μέρος του z να είναι το $\boxed{a = Re(z)}$
ii) Φανταστικό μέρος του z θα είναι το $\boxed{b = Im(z)}$
$z = a+ib$
Ο μιγαδικός συζυγής του είναι το $\bar{z} = a - ib$

π.χ. $z = 2+3i$, $\bar{z} = 2-3i$
$Re(z) = 2$, $Im(z) = 3$

Για κάθε $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ ισχύουν τα ακόλουθα:
i) $\overline{z_1 + z_2 + \dots + z_n} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n$
ii) $\overline{z_1 \cdot z_2 \cdots z_n} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n$
iii) $z_2 \neq 0 \Rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Ισχύουν ακόμα:
iv) $\overline{(\bar{z})} = z$
v) $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

★ Αν $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ με $a_i \in \mathbb{R}$ και $z_0 \in \mathbb{C}$:
$P(z_0) = 0$, τότε $P(\bar{z}_0) = 0$

Αποδ.: $P(\bar{z}_0) = a_0 + a_1 \bar{z}_0 + a_2 \bar{z}_0^2 + \dots + a_n \bar{z}_0^n =$
$= \bar{a}_0 + \bar{a}_1 \bar{z}_0 + \bar{a}_2 \bar{z}_0^2 + \dots + \bar{a}_n \bar{z}_0^n =$
$= \overline{a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \dots + a_n z_0^n} =$ ← συζυγές
$= \overline{P(z_0)} = \bar{0} = 0.$

Απόλυτη Τιμή Μιγαδικού Αριθμού (ή Μιγαδικό Μέτρο)

Αν $z = a + bi \in \mathbb{C}$ τότε ορίζω $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

Ιδιότητες:

i) Προφανώς $|z| \geq 0, \ \forall z$

ii) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

iii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

iv) $z^{-1} = \dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad z \neq 0$

v) $|Re(z)| \leq |z|, \quad |Im(z)| \leq |z|$

vi) $|a| = |(a,0)| \ \forall a \in \mathbb{R}$

$\overset{\shortparallel}{|\varphi(a)|} \longrightarrow$ ισομετρία, διατηρεί τις αποστάσεις

Βασικές Ιδιότητες:

α) $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Αποδ.: $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = (z_1 \bar{z}_1 \, z_2 \bar{z}_2) = |z_1|^2 |z_2|^2 =$
$= (|z_1||z_2|)^2 \Rightarrow |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ■

Με επαγωγή: $|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|$

β) Αν $z_2 \neq 0$: $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

γ) $z_1 \cdot z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$ ή $z_2 = 0$

Τριγωνική Ανισότητα

Αν $z, w \in \mathbb{C}$ τότε $|z+w| \leq |z| + |w|$

$|z+w|^2 = (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) = z \cdot \bar{z} + z \cdot \bar{w} + w \cdot \bar{z} + w\bar{w} =$
$= |z|^2 + 2\,Re(z\bar{w}) + |w|^2 \overset{*}{\leq}$
$\leq |z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2$
$= (|z| + |w|)^2 \Rightarrow$

(*) $Re(z\bar{w}) \leq |z\bar{w}| =$
$= |z| \cdot |\bar{w}| =$
$= |z| \cdot |w|$

$\rightsquigarrow \Rightarrow |z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2 \Rightarrow |z+w| \leq |z|+|w|, \ \forall z,w \in \mathbb{C}$

$|z-w| \leq |z|+|w|$

Δυϊκή Τριγωνική Ανισότητα

$$||z|-|w|| \leq |z+w|$$

$$\left.\begin{aligned} |z|-|w| &\leq |z+w| \\ |w|-|z| &\leq |z+w| \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{aligned} |z| &\leq |z+w|+|w| \\ |w| &\leq |z+w|+|z| \end{aligned}\right\}$$ που ισχύουν από τριγωνική

$(z = z+w+(-w))$

Ταυτότητα Langrange

Έστω $a_j, b_j \in \mathbb{C}$ $\quad j=1,2,\dots,n$ τότε:

$$\left(\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}|b_j|^2\right) - \left|\sum_{j=1} a_j b_j\right|^2 =$$

$$= \sum_{1\leq j<k\leq n} |a_j\bar{b}_k - a_k\bar{b}_j|^2$$

<u>Αποδ.</u> $\left|\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right|^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\bar{a}_k\bar{b}_k\right) =$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} a_j b_j \bar{a}_k \bar{b}_k = \sum_{j=1}^{n}|a_j|^2|b_j|^2 + \sum_{1\leq j<k\leq n}(a_j b_j - \cdots$$

Συνέχεια στο Μάθημα 2

10/10/22 2º Μάθημα

Ταυτότητα Langrange

Έστω $a_i, b_i \in \mathbb{C}$ $i = 1, 2, \ldots, n$ τότε

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right) - \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 = \sum_{1 \leq i \leq k \leq n} |a_i \bar{b}_k - a_k \bar{b}_i|^2$$

Απόδειξη

1º τμήμα

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \bar{a}_k \bar{b}_k\right) = \sum_{1 \leq i, k \leq n} a_i \bar{a}_k b_i \bar{b}_k =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{a}_i \cdot b_i \bar{b}_i + \sum_{1 \leq i < k \leq n} \left(a_i b_i \bar{a}_k \bar{b}_k + a_k b_k \bar{a}_i \bar{b}_i\right) \quad ①$$

2º τμήμα

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \bar{a}_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k \bar{b}_k\right) =$$

$$= \sum_{i,k=1}^{n} a_i \bar{a}_i b_k \bar{b}_k = \sum_{i=1}^{n} a_i \bar{a}_i b_i \bar{b}_i + \sum_{1 \leq i < k \leq n} \left(a_i \bar{a}_i b_k \bar{b}_k + a_k \bar{a}_k b_i \bar{b}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 |b_i|^2 + \sum_{1 \leq i < k \leq n} \left(a_i b_k \bar{a}_i \bar{b}_k + a_k b_i \overline{a_k b_i}\right) \quad ②$$

Τα αφαιρούμε

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right) - \left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \overset{①,②}{=}$$

$$= \cancel{\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|^2} + \sum_{1 \leq i < k \leq n} \left(a_i b_k \bar{a}_i \bar{b}_k + a_k b_i \overline{a_k b_i}\right) -$$

$$- \cancel{\sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|^2} - \sum_{1 \leq i < k \leq n} \left(a_i b_i \bar{a}_k \bar{b}_k + a_k b_k \overline{a_i b_i}\right) =$$

$$= \sum_{1 \leq i < k \leq n} \left(a_i b_k \bar{a}_i \bar{b}_k + a_k b_i \overline{a_k b_i} - a_i b_i \overline{a_k b_k} - a_k b_k \overline{a_i b_i}\right) =$$

$$= \sum_{1\le i<k\le n} \left[a_i b_k \overline{a_i b_k} + a_k b_i \overline{a_i}\, \overline{b_i} - 2\mathrm{Re}(a_i b_i \overline{a_k}\, \overline{b_k}) \right] =$$

$$= \sum_{1\le i<k\le n} \left[|\underbrace{a_i \overline{b_k}}_{z}|^2 + |\underbrace{a_k \overline{b_i}}_{w}|^2 - 2\mathrm{Re}(\underbrace{a_i \overline{b_k}}_{z}\, \underbrace{b_i \overline{a_k}}_{\overline{w}}) \right]$$

$$= \sum_{1\le i<k\le n} |a_i \overline{b_k} - a_k \overline{b_i}|^2$$

<u>Πόρισμα</u> Έστω $a_i b_i \ (i=1,2,\dots,n) \in \mathbb{C}$

τότε $\left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right|^2 \le \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2\right)$ Cauchy-Swartz

<u>Αποδ</u> Από ταυτότητα Lagrange

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2\right) - \left|\sum_{i=1}^n a_i b_i\right|^2 =$$

$$= \sum_{1\le i<k\le n} |a_i \overline{b_k} - a_k \overline{b_i}|^2 \ge 0 \Rightarrow \text{Ζητούμενο}$$

<u>Παρατήρηση</u>

Στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε την ευκλείδεια νόρμα

$$\underset{(x_1,x_2,\dots,x_n)}{\|x\|} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}$$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ Αν $z=(a,b)\in\mathbb{R}^2$ τότε $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \|(a,b)\|_2 = \|z\|_2$

Από C-S μπορούμε να αποδ. την τριγωνική

ανισότητα στο $\mathbb{C}$. Πράγματι:

Έστω $z_1 = a+bi$, $z_2 = c+di$

Τότε $|z_1+z_2|^2 = (a+c)^2+(b+d)^2$

$(|z_1|+|z_2|)^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| =$

$= (a^2+b^2)+(c^2+d^2)+2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}$

$-|z_1+z_2|^2+(|z_1|+|z_2|)^2 =$

$=(\dots) = 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} - 2(ac+bd) =$

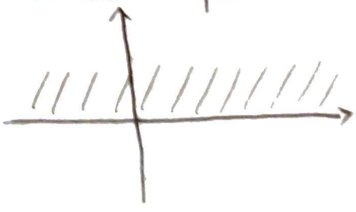
$= 2\|(a,b)\|_2 \, \|(c,d)\|_2 - 2\langle (a,b),(c,d)\rangle \geq 0$

από C-S στο $\mathbb{R}$

οπότε δ.ο. $\boxed{|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2|}$ ✓

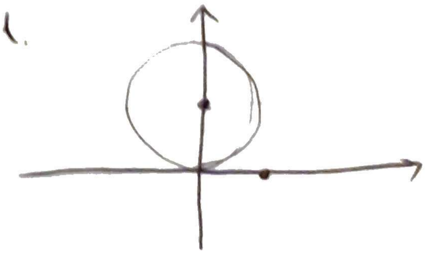
Παραδείγματα

① α) Το $E=\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z>0\}$ είναι το άνω ημιεπίπεδο



β) Το $\{z\in\mathbb{C} : z=\bar{z}\}$ είναι η πραγμ. ευθεία

γ) Το $\{z\in\mathbb{C} : |z-i|<1\}$ είναι ο ανοικτός δίσκος με κέντρο το i και ακτίνα 1.



(2) Αν $\lambda > 0$ δ.ο. το σύνολο $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \lambda|z-1|\}$ είναι κύκλος ή ευθεία

Έστω $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε $z \in K \Leftrightarrow$

$|z| = \lambda|z-1| \Leftrightarrow |z|^2 = \lambda^2|z-1|^2 \Leftrightarrow$

$$x^2 + y^2 = \lambda^2((x-1)^2 + y^2) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = \lambda^2(x^2 - 2x + 1 + y^2) \Leftrightarrow$$

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 x^2 - 2x\lambda^2 + \lambda^2 + \lambda^2 y^2 \Leftrightarrow$$

$$(1-\lambda^2)x^2 + (1-\lambda^2)y^2 + 2\lambda^2 x - \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\lambda^2-1)x^2 + (\lambda^2-1)y^2 - 2\lambda^2 x + \lambda^2 = 0 \quad (1)$$

• Αν $\lambda = 1$ τότε $z \in K \Leftrightarrow$

$-2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ ευθεία

• Αν $\lambda \neq 1$ τότε $(1) \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2-1}\cdot x + \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{\lambda^4}{(\lambda^2-1)^2} - \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1} = \frac{\lambda^2}{(\lambda^2-1)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2-1}\right)^2$$

Άρα K είναι κύκλος κέντρου $\left(\frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}, 0\right)$ και

ακτίνας $\frac{|\lambda|}{|\lambda^2-1|}$

③ Δ.ο. α) $|z| \leq |Re z| + |Im z| \leq \sqrt{2}|z|$

β) $\max\{|Re z|, |Im z|\} \leq |z| \leq \sqrt{2} \max\{|Re z|, |Im z|\}$

α) Αν $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ τότε το (α) γίνεται:

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2} + \sqrt{y^2} = |x| + |y|$$

($f(x) = \sqrt{x}$ υποπροσθ.)

$$|x| + |y| = 1 \cdot |x| + 1 \cdot |y| = \langle (1,1), (|x|, |y|) \rangle \leq$$
$$\leq \|(1,1)\|_2 \, \|(|x|, |y|)\|_2 = \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

β) Το (β) γίνεται:

$$\max\{|x|, |y|\} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\}$$

Παρατηρούμε ότι: $\left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x| \\ \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{y^2} = |y| \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \geq \max\{|x|, |y|\}$$

Αν $|x| \leq |y|$ τότε $x^2 \leq y^2$ άρα

$$\sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{y^2+y^2} = \sqrt{2y^2} = \sqrt{2}|y| =$$
$$= \sqrt{2} \max\{|x|, |y|\}$$

ομοίως αν $|y| \leq |x|$

4. Πότε ισχύει η ισότητα στην τριγωνική ανισότητα;

$|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \Leftrightarrow |z_1+z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2 \Leftrightarrow$

$\cancel{|z_1|^2} + \cancel{|z_2|^2} + \cancel{2} Re(z_1\bar{z_2}) = \cancel{|z_1|^2} + \cancel{|z_2|^2} + \cancel{2}|z_1||z_2| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Re(\underbrace{z_1\bar{z_2}}_{w}) = |z_1||z_2| = |\underbrace{z_1\bar{z_2}}_{w}|$

Άρα $Re\, w = |w| = \sqrt{(Re\, w)^2 + (Im\, w)^2} \Rightarrow$

έστω $z_2 \neq 0$

$Im(z_1, \bar{z_2}) = 0 \Rightarrow z_1\bar{z_2} = |z_1||z_2| \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 = \dfrac{|z_1||z_2|}{\bar{z_2}} = \dfrac{|z_1||z_2|}{z_2\bar{z_2}} z_2 = \dfrac{|z_1||\cancel{z_2}|}{|z_2|^{\cancel{2}}} z_2 \Rightarrow$

$\Leftrightarrow z_1 = \underbrace{\left(\dfrac{|z_1|}{|z_2|}\right)}_{\lambda \geq 0} z_2$ άρα $\vec{z_1}$ και $\vec{z_2}$ είναι συγγραμικά και ομόρροπα

★ Γενικότερα αν $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ τότε
$|z_1+z_2+\dots+z_n| = |z_1|+|z_2|+\dots+|z_n| \Leftrightarrow$
Τα $z_1, z_2, \dots, z_n$ είναι στην ίδια ημιευθεία που περνάει απ' το 0.

5. Δ.ο $1+z+z^2+\dots+z^{n-1} = \dfrac{1-z^n}{1-z}$ για $z \neq 1$

Είναι: $(1+z+z^2+\dots+z^{n-1})(1-z) = 1 + \cancel{z} + \cancel{z^2} + \cancel{\dots} + z^{n-1} - \cancel{z} - \cancel{z^2} - \cancel{\dots} - z^n =$

$= 1 - z^n$

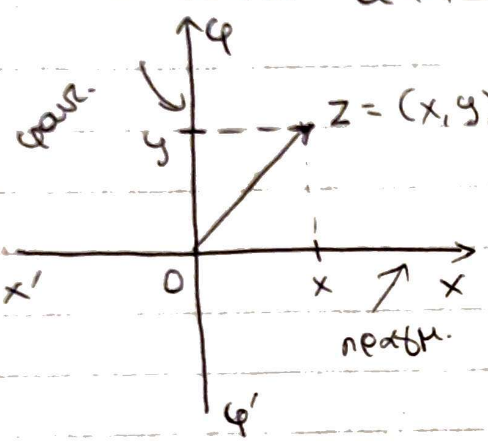
Αν $z, w \in \mathbb{C}$, $z \neq w \neq 0$ τότε βάζοντας όπου z το $\frac{z}{w}$ και έχω $\dfrac{z^n - w^n}{z-w} = z^{n-1} + z^{n-2}w + \dots + zw^{n-2} + w^{n-1}$

Αν n περιττός τότε βάζοντας όπου ω το $-\omega$ έχω

$$\frac{z^n+\omega^n}{z+\omega} = z^{n-1} - z^{n-2}\omega + \dots - z\omega^{n-2} + \omega^{n-1} \quad \text{για } z+\omega \neq 0$$

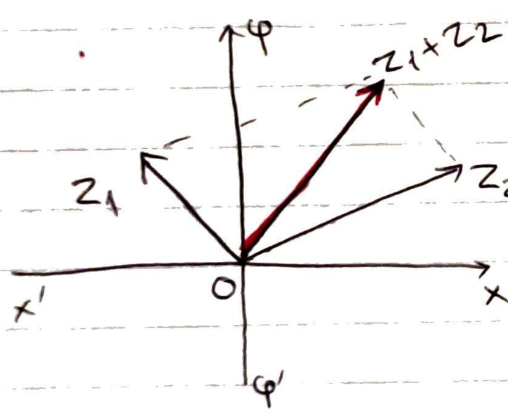
$\boxed{\text{ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ}}$

$z=(a,b)=a+ib$



$z \equiv \vec{OZ}$

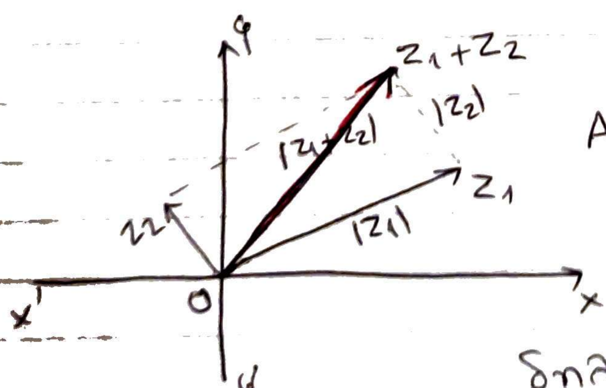
Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ τότε
z_1+z_2 = διανυσματική πρόσθεση των $\vec{OZ_1}, \vec{OZ_2}$



Αν $z=a+bi$, τότε
$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ = το μήκος του $\vec{OZ}$

Αν $z_1 = a+ib$, $z_2 = c+id$ τότε
$|z_1-z_2| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ = η ευκλ. απόσταση του z_1 απ' το z_2

Άρα $|z_2| = |(z_1+z_2)-z_1|$ = η απόσταση του z_1+z_2 απ' το z_1

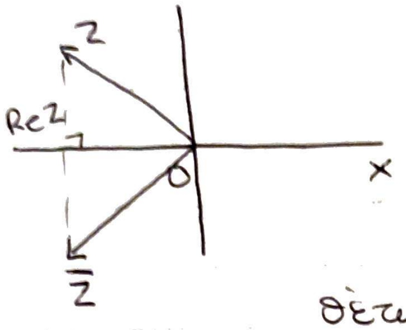


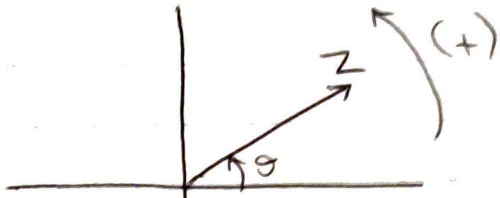
Από τριγωνική ανισότητα στη Γεωμετρία έχω ότι:

$$|\overrightarrow{OZ_{1+2}}| \leq |\overrightarrow{OZ_1}| + |\overrightarrow{Z_1 Z_{1+2}}|$$

δηλ. $|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_2| \Rightarrow$ γνωστή η τριγ ανισότητα του $\mathbb{C}$

Γεωμετρικά η απεικόνιση $z \in \mathbb{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ είναι η ανάκλαση ως πρός τον πραγματικό άξονα





Αν $z \in \mathbb{C}$

θέτω $r = |z|$

και θ η θετικά προσανατολισμένη γωνία με πρώτη πλευρά τον ημιάξονα $\vec{Ox}$ και δεύτερο την ημιευθεία Oz

Αυτές είναι οι πολικές συντεταγμένες του z

(r, θ)

και $\left.\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right\}$

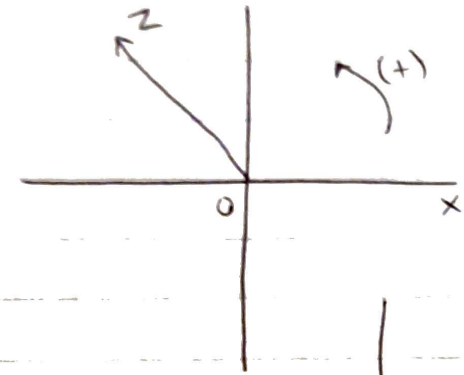
ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

3ο μάθημα

12/10/22

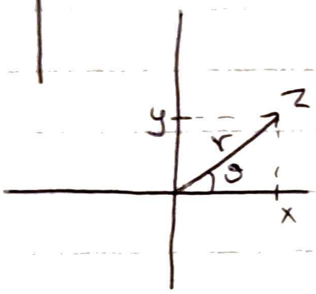
Πολικές Συντεταγμένες

Έστω $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Τότε $z = x + iy$ και θέτω



$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ θ = όρισμα του z

θ = η προσανατολισμένη γωνία με πρώτη ~~συζεζ~~ πλευρά την ημιευθεία Ox και δεύτερη πλευρά την Oz



$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

Έτσι $z = x + iy = r\cos\theta + i r\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

Αυτή είναι η λεγόμενη τριγωνομετρική μορφή του z.

Αν $z_1 = r_1 \cdot (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ $\Rightarrow$ $z_1 \neq 0$ και $z_2 \neq 0$

$\Rightarrow$ τότε

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2 (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_1 r_2(\cos\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2) + i\, r_1 \sin\theta_1 \cos\theta_2 r_2 + i\, r_1 \cdot r_2 \cos\theta_2 \sin\theta_1$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right)}$$

και $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$

και $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

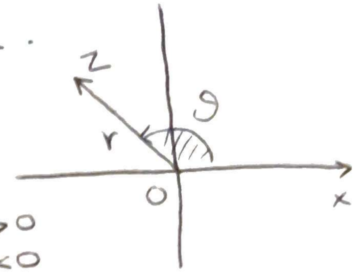
Ένα τέτοιο θ λέγεται ένα όρισμα του z

Τα ορίσματα του z είναι τα στοιχ. του συνόλου

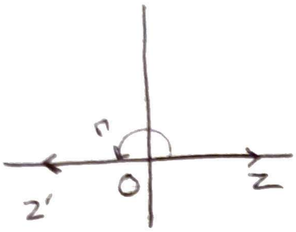
$$Arg(z) = \{\theta + 2\kappa\pi : \kappa \in \mathbb{Z}\}$$

Κάθε ημιανοικτό διάστημα της μορφής $[a, a+2\pi)$ ή $(a, a+2\pi]$ περιέχει ένα μόνο όρισμα του z.

Το μοναδικό όρισμα του z στο $(-\pi, \pi]$ λέγεται κύριο ή πρωτεύον όρισμα του z.
Συμβολίζεται με $\arg(z)$



Αν $z \in \mathbb{R}$ τότε $\arg(z) = \begin{cases} 0, & z>0 \\ \pi, & z<0 \end{cases}$



$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Παρατήρηση

Από τα παραπάνω έχω για $z = \cos\theta + i\sin\theta$ ότι $(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)) = (\cos(\theta+(-\theta)) + i\sin(\theta+(-\theta))) =$

$$= \cos 0 + i\sin 0 = 1 + 0\cdot i = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos\theta - i\sin\theta = \overline{\cos\theta + i\sin\theta}$$

Αν $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ και $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ με $z_1, z_2 \neq 0$ τότε υπολογίζω το

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)) =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{και} \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \pmod{2\pi}$$

Με επαγωγή έχω $z_1 \cdots z_n = |z_1 \cdot z_2 \cdots z_n|(\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n))$

Ταυτότητα de Moivre (εκθετική μορφή)

- $(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = e^{in\theta}$

  $\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$ $\quad n \in \mathbb{Z},\ \theta \in \mathbb{R}$

- $e^{i\theta} = 1 \iff \cos\theta + i\sin\theta = 1 = \cos 0 + i\sin 0 \iff \theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

- Αν $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ και $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\theta_2}$, τότε

  $z_1 = z_2 \iff |z_1| = |z_2|$ και $\theta_1 = \theta_2 \pmod{2\pi}$

  ή $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Παραδείγματα

1. $z = \dfrac{(1-i)^8}{(\sqrt{3}+i)^5}$

Βρείτε την τριγ. μορφή και $\arg(z)$

$$1-i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

άρα $(1-i)^8 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^8 =$

$$= 16\left(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\right)$$

$$(\sqrt{3}+i)^5 = 32\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

οπότε $z = \dfrac{16\left(\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\right)}{32\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)} =$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(-2\pi - \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-2\pi - \frac{5\pi}{6}\right)\right) =$$

Ιδιαιτέρως αν $z = |z|\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$ τότε

$$\boxed{z^n = |z|^n\,(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)),\ n \in \mathbb{N}}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{|z|}\cdot(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))$$

$\Rightarrow$ Για $n \in \mathbb{N}$ έχω: $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n} =$

$$= (z^{-1})^n = \frac{1}{|z|^n}(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^n$$

$$= \frac{1}{|z|^n}\cdot(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta))$$

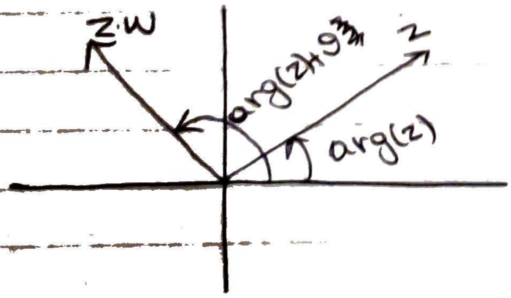
οπότε έχουμε την

Ταυτότητα de Moivre

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta),\ \theta \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z}$$

Γεωμετρική Ερμηνεία του Γινομένου ~~στη~~ Μιγαδικών ~~Μιγαδική~~

Αν ο $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ πολλαπλάζεται με το $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ τότε το $|z|$ α γίνεται $|zw| = r|z|$ και $\arg(z)$ φ γίνεται $\arg(zw) = \arg(z) + \theta \pmod{2\pi}$



Συμβολισμός $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$ θέτουμε $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$

Αν $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ τότε $e^{i\theta_1}\cdot e^{i\theta_2} =$
$= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) =$
$= e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

$Ob+c$ και Oa είναι στην ίδια ευθεία άρα τα αντίστοιχα διανύσματα είναι αντίρροπα (συγγραμμικά με αντίθετη φορά)

Έχουμε λοιπόν $|b+c| = |a| = 1 \Rightarrow b+c = -a \Rightarrow a+b+c=0$

"$\Leftarrow$" Έστω $a+b+c=0 \Rightarrow b+c=-a$ και άρα $|b+c| = |-a| = 1 \Rightarrow (b+c)(\overline{b+c}) = |b+c|^2 = 1$

$$\Rightarrow |b|^2 + |c|^2 + 2\operatorname{Re}(b\bar{c}) = 1 \Rightarrow 2\operatorname{Re}(b\bar{c}) = -1$$

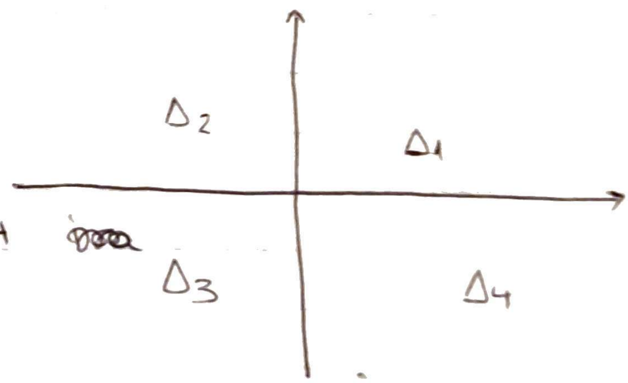
$$\Rightarrow |b-c|^2 = |b|^2 + |c|^2 - 2\operatorname{Re}(b\bar{c}) = 1 + 1 - 2\left(-\tfrac{1}{2}\right) = 1+1+1 = 3$$

Άρα $|b-c| = \sqrt{3}$

Όμοια $|a-b| = |a-c| = \sqrt{3}$ και άρα $\overset{\triangle}{abc}$ ισόπλευρο.

4) Αν $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^{\neq 0}$ τότε $\exists\, S \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$:

$$\left|\sum_{k\in S} z_k\right| \geq \frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$



Λύση

Το $\mathbb{C}$ χωρίζεται σε 4 κλειστά τεταρτημόρια

$$\sum_{z_k\in\Delta_1}|z_k| + \sum_{z_k\in\Delta_2}|z_k| + \sum_{z_k\in\Delta_3}|z_k| + \sum_{z_k\in\Delta_4}|z_k| = \sum_{k=1}^{n}|z_k|$$

Τότε $\exists\, k_0 \in \{1,2,3,4\}$:

$$\sum_{z_k\in\Delta_{k_0}} |z_k| \geq \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}|z_k|$$

Αλλιώς αν ήταν $\sum_{k=1}^{n}|z_k| = \sum_{i=1}^{4}\sum_{z_k\in\Delta_i}|z_k| < \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}|z_k|$

τότε θα είχαμε $\frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n}|z_k| < 0$ ΑΤΟΠΟ

$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ $\quad \arg(z) = -\frac{5\pi}{6} \in (-\pi, \pi]$

(2) Χρησιμοποιώντας De Moivre δ.ο.:

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta$$

και

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

Λύση

Πράγματι: $\cos 3\theta + i\sin 3\theta \underset{\text{Δ.Μ.}}{=} (\cos\theta + i\sin\theta)^3 =$

$= \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\, i\sin\theta + 3\cos\theta\, i^2\sin^2\theta + i^3\sin^3\theta$

$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\, i\sin\theta + 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$

$\cancel{= \cos\theta(\cos^2\theta - 3\sin\theta - 3\sin^2\theta) - i\sin^3\theta}$

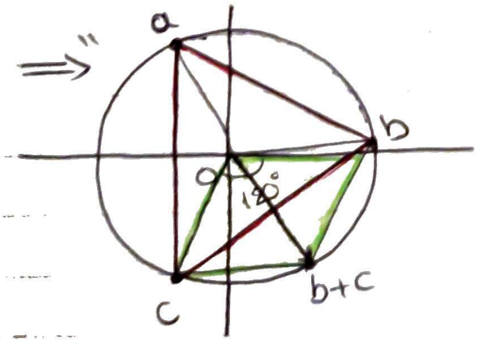
$= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$

Εξισώνω πραγμ. και φανταστικό μέρος και έπεται το ζητούμενο.

(3) Έστω $a, b, c \in \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ σημεία του μον. κύκλου
Δ.ο. τα a, b, c είναι κορυφές ισοπλεύρου τριγώνου
αν $a + b + c = 0$.

Λύση

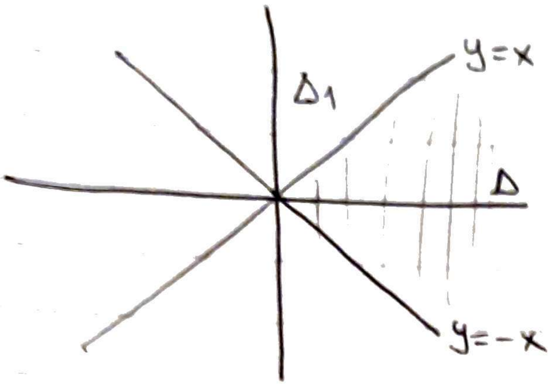
" ⇒ "



Έστω ότι $\hat{abc}$ ισόπλευρο.

Το $\#\, 0b(b+c)c$ είναι παρ/μο και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες με μήκος 1. Άρα είναι ρόμβος οπότε (*) η διαγώνιος $0b{+}c$ διχοτομεί την $\hat{0bc} \Rightarrow |b+c| = 1$

(*) και οι διαγώνιες είναι κάθετες



Μπορώ με κατάλληλη στροφή να υποθέσω ότι Δ_1 είναι το κλειστό τεταρτημόριο Δ μεταξύ $y=x$ και $y=-x$, $x>0$

Αλλά $\forall\ z \in \Delta$ έχω $\operatorname{Re} z \geq \frac{|z|}{\sqrt{2}}$ (γιατί;)

Τώρα έχω $\left|\sum_{z_k \in \Delta} z_k\right| \geq \sum_{z_k \in \Delta} \operatorname{Re}(z_k) \geq$

$$\geq \sum_{z_k \in \Delta} \frac{|z_k|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{z_k \in \Delta} |z_k|$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

14/10/22

4ο μάθημα

(4) Αν $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ τότε $\exists$ $S \subseteq \{1,2,\ldots,\}$ το μέτρο εκεί δεν είναι μέσα Σ|| είναι |Σ |.

Ρίζες Μιγαδικών Αριθμών

Έστω $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$

Αν $z \in \mathbb{C} : z^n = w$ τότε το z λέγεται n-οστή ρίζα του w.

Το w έχει ακριβώς n μιγαδικές ρίζες.

Αν $w = |w|(\cos\theta + i\sin\theta)$ και $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ τότε

$z^n = w \Leftrightarrow |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)) = |w|(\cos\theta + i\sin\theta) \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} |z|^n = |w| \\ n\varphi - \theta = 2k\pi, \text{ για } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ \varphi = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Άρα $z^n = w \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$

Αν $k \in \mathbb{Z}$ τυχαίος τότε $\exists$ $\ell \in \{0,1,\ldots,n-1\} : k = mn + \ell \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt[n]{|w|}\left(\cos\frac{2k\pi + \theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|w|} \cdot e^{i\frac{2(mn+\ell)\pi + \theta}{n}}$

$= \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\theta + 2\ell\pi}{n}} \cdot e^{i2\pi m} = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{\theta + 2\ell\pi}{n}}$

$e^{i2\pi m} = \cos(2\pi m) + i\sin(2\pi m) = 1 + 0 = 1$

$z^n = w \Leftrightarrow z = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\frac{2k\pi + \theta}{n}}$, $0 \le k \le n-1$

Αν $k, \ell \in \{0,1,\ldots,n-1\}$ και

$$\cancel{\sqrt[n]{|w|}}\, e^{i\frac{2k\pi + \theta}{n}} = \cancel{\sqrt[n]{|w|}}\, e^{i\frac{2\ell\pi + \theta}{n}} \Leftrightarrow$$

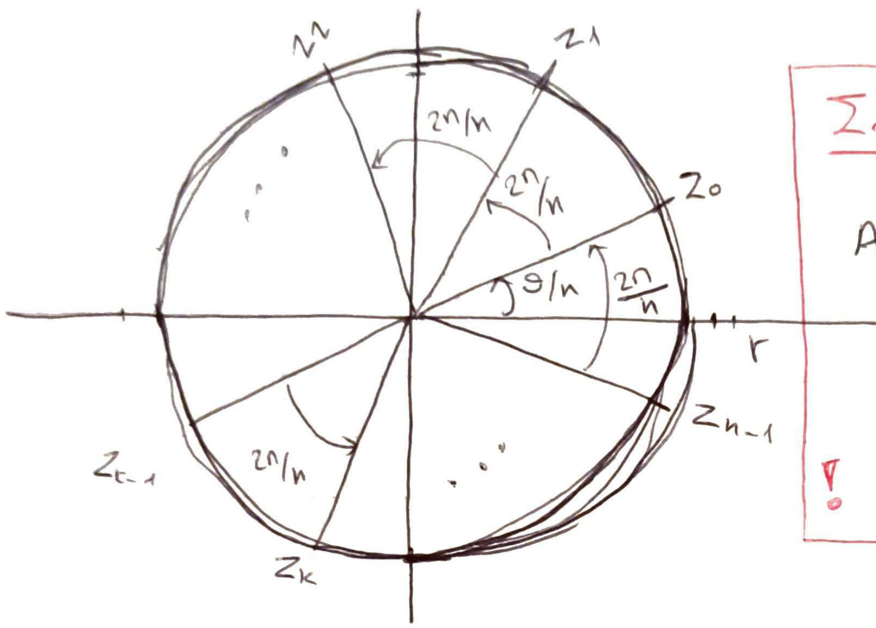
$\xRightarrow[\cos,\sin]{\text{περιοδικότητα}}$ $\frac{2k\pi + \theta}{n} - \frac{2\ell\pi + \theta}{n} = 2m\pi$ για κάποιο $m \in \mathbb{Z}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{k-\ell}{n} = m \Rightarrow k - \ell = mn \\ k,\ell \in \{0,1,\ldots,n-1\} \Rightarrow |k-\ell| \le n-1 \end{array}\right\} \Rightarrow n \mid k-\ell \in \{0,\ldots,n-1\} \Rightarrow k = \ell$$

οι ρίζες της $z^n = w$ είναι ακριβώς οι (1)

$$\left\{ \sqrt[n]{|w|}\; e^{i\frac{2k\pi+\theta}{n}} : 0 \le k \le n-1 \right\}$$

Οι n-οστές ρίζες του $w=|w|e^{i\theta}$ είναι κορυφές κανονικού n-γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο $C(0, \sqrt[n]{|w|})$



Σημαντική Σημείωση!

Αν $\theta \in \mathbb{R}$ τότε $|e^{i\theta}|=1$

$$|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Οι n-ρίζες της μονάδας

Έστω $n \geq 2$ $(n \in \mathbb{N})$

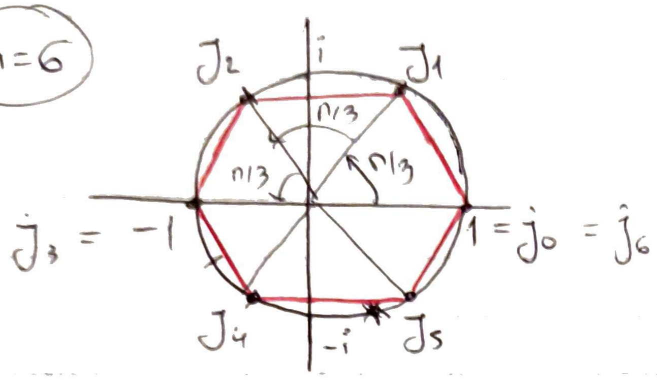
Επειδή $1 = \cos 0 + i \sin 0$ έχω $r=|1|=1$
$\theta = \arg(1) = 0$ άρα οι ρίζες της $z^n=1$ είναι της μορφής $j_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

Θέτω $w = j_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$

Από de Moivre έχω $j_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (e^{i\frac{2\pi}{n}})^k = j_1^k = w^k$ $\forall\, k=0,1,\dots,n-1$
Επειδή $w^n=1$ και $w \neq 1$
$$1+w+w^2+\dots+w^{n-1} = \frac{w^n-1}{w-1} = \frac{1-1}{w-1} = 0$$

Οι n-οστές ρίζες της μονάδας είναι κορυφές κανονικού n- γώνια εγγεγραμμένα στον $C(0,1)$ και μια κορυφή είναι το $z=1$

$n=6$



$$\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

Οι έκτες ρίζες του 1 είναι $j_0 = 1$, $j_1 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$

$$j_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$j_3 = \cos\frac{3\pi}{\cancel{3}} + i\sin\frac{3\pi}{\cancel{3}} = -1$$

$$j_4 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = -j_1$$

$$j_5 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = -j_2$$

Οι 4-ες ρίζες της 1 είναι $\{\pm 1, \pm i\}$

Παραδείγματα Να βρεθούν οι ~~τριγωνομετρικές~~ τετραγωνικές ρίζες του $w = -3+4i$

Λύση

$w = |w|e^{i\theta} = 5\left(-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right) = 5(\cos\theta + i\sin\theta)$ όπου

θ: $\cos\theta = -\frac{3}{5}$, $\sin\theta = \frac{4}{5}$

Οι τετρ. ρίζες του w είναι $z_0 = \sqrt{|w|}\, e^{i\frac{2\cdot 0\pi+\theta}{2}} = e^{i\frac{\theta}{2}}$

$= \sqrt{5}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$

$$z_1 = \sqrt{|w|}\, e^{i\frac{2\pi+\theta}{2}} = \sqrt{5}\, \underbrace{e^{i\pi}}_{-1}\, e^{i\frac{\theta}{2}} = -\sqrt{5}\, e^{i\theta/2} = -\sqrt{5}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

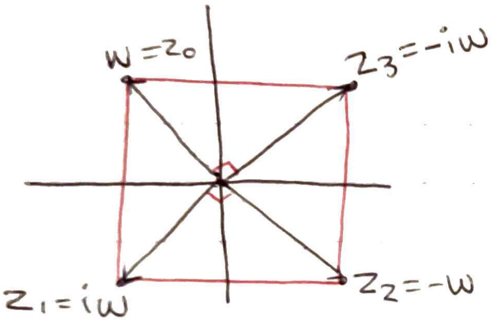
$$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$z_0=\cancel{\sqrt{5}}\cdot\frac{1+i}{\cancel{\sqrt{5}}}=1+i \quad \text{ή } 1+2i(?)$$

$$z_1=-1-2i$$

(2) Αν $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, να βρεθούν οι διαφορετικές τιμές της ακολουθίας $z_n=i^n w$, $i=e^{i\frac{\pi}{2}}$



$z_0=w$
$z_1=iw$
$z_2=i^2w=-w$
$z_3=i^3w=-iw$

Άρα οι διαφορετικοί όροι της (z_n) είναι οι κορυφές του παραπάνω τετραγώνου

Αν $n=4k+\upsilon$, $\upsilon\in\{0,1,2,3\}$ τότε

$$z_n=i^{4k+\upsilon}w=(\underbrace{i^4}_{1})^k\cdot i^\upsilon w=i^\upsilon\cdot w \Rightarrow$$

$$\forall n\in\mathbb{N},\ z_n\in\{i^\upsilon w:\upsilon\in\{0,1,2,3\}\}=\{w,iw,-w,-iw\}$$

Οι τιμές της z_n είναι ακριβώς οι ρίζες της εξίσωσης $z^4=w^4$

Αν $n\in\mathbb{N}$ τότε $z_n^4=(z_n)^4=(i^\upsilon w)^4=\underbrace{i^{4\upsilon}}_{1}\cdot w^4=w^4$

(3) Δ.ο. οι n-οστές ρίζες της μονάδας εκτός της ρίζας $z_0=1$ είναι ρίζες του κυκλοτομικού πολυωνύμου
$\varphi(z)=z^{n-1}+z^{n-2}+\dots+z+1$

Λύση Αν $z^n = 1$ με $z \neq 1$ τότε: $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 =$

$$= \frac{z^n - 1}{z-1} = \frac{1-1}{z-1} = 0.$$

(4) Θεωρούμε τις $(n-1)$ "διαγωνίους" (n πλευρές)? κανονικού n-γώνου $(n \geq 4)$ εγγεγραμμένου στον $C(0,1)$ που άγονται από μια κορυφή του προς τις υπόλοιπες. Δ.ο. το γινόμενο των μηκών τους ισούται με n.

Λύση

Με κατάλληλη στροφή, υποθέτουμε ότι οι κορυφές του n-γώνου συμπίπτουν με τις n-οστές ρίζες της μονάδας και ότι η κορυφή απ' όπου άγονται οι ευθείες μας είναι το $z_0 = 1$.

Αν $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ τα μήκη των ευθειών αυτών, (*) και $(z_i)_{i=0}^{n-1}$ οι n-οστές ρίζες του 1 με $z_0 = 1$
τότε $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_{n-1} = |z_0 - z_1||z_0 - z_2| \cdots |z_0 - z_{n-1}| =$

$$= |(z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \cdots (z_0 - z_{n-1})|$$

Είδαμε πριν ότι τα $z_1, \dots, z_{n-1}$ είναι ρίζες του $\varphi(z) = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}$

Άρα $\varphi(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_{n-1})$

Συνεπώς ζητώ το $\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |\varphi(z_0)| = |\varphi(1)| = n \cdot 1 = n$

(5) Δ.ο. $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\frac{k\pi}{n} = \sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdots \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$, $n \geq 2$.

Από την ασκ. (4) έχω ότι:

$$n = \varphi(1) = (1 - z_1)(1 - z_2) \cdots (1 - z_{n-1}) =$$
$$= \left(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)\left(1 - e^{i\frac{4\pi}{n}}\right) \cdots \left(1 - e^{i\frac{2(n-1)\pi}{n}}\right)$$
$$\Rightarrow n^2 = \left|\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right)\right|^2 = \prod_{k=1}^{n-1}\left[\left(1 - \cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2 + \sin\frac{2 \cdot 2k\pi}{n}\right)\right]$$

Για $k \in \{0,1,\dots,n-1\}$ έχω:

$$\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2+\sin^2\frac{2k\pi}{n}=2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)=2^2\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

$$n^2=\prod_{k=1}^{n-1}\left(4\sin^2\frac{k\pi}{n}\right)=4^{n-1}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)^2 \xRightarrow{\frac{k\pi}{n}\in(0,\pi)}$$

$$\Rightarrow n=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \Rightarrow \frac{n}{2^{n-1}}=\prod_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

★ Η δευτεροβάθμια εξίσωση $az^2+bz+c=0$, $a\neq 0$

$\Leftrightarrow 4a^2z^2+4abz+4ac=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2az)^2+2\cdot 2azb+b^2=b^2-4ac \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2az+b)^2=b^2-4ac$

Αν w μια τετραγωνική ρίζα του b^2-4ac τότε $(2az+b)^2=w^2 \Leftrightarrow 2az+b=\pm w \Leftrightarrow$ $z=\frac{-b\pm w}{2a}$

Παρατήρηση: Αν $z\neq 0$ και $z=|z|e^{i\theta}$ τότε ορίζω $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\theta}{n}}$ και $\sqrt[n]{0}=0$

Έτσι επεκτείναμε την $x\in[0,+\infty)\longrightarrow \sqrt[n]{x}\in[0,+\infty)$

Αν $w=\sqrt{b^2-4ac}$ τότε $z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$