ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ 19/10/22

6º Μάθημα

Ανοικτά και κλειστά σύνολα, Όρια - Συνέχεια Συναρτήσεων

Με τον όρο μιγαδική συνάρτηση ονομάζουμε κάθε συνάρτηση $f: A \to \mathbb{C}$ όπου $A \neq \emptyset$ τυχόν σύνολο. Για εμάς, συνήθως $A =$ ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$.
Για $z \in A$ θέτουμε $u(z) = Re(f(z))$, $v(z) = Im\, f(z)$

Έτσι $f = u + iv$

Παράδειγμα:

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad z \neq 0 \quad (z = x + iy,\ x, y \in \mathbb{R})$$

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \underset{(x,y)}{\overset{\shortparallel}{u(z)}} = Re\, f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{Re\, z}{|z|^2}$$

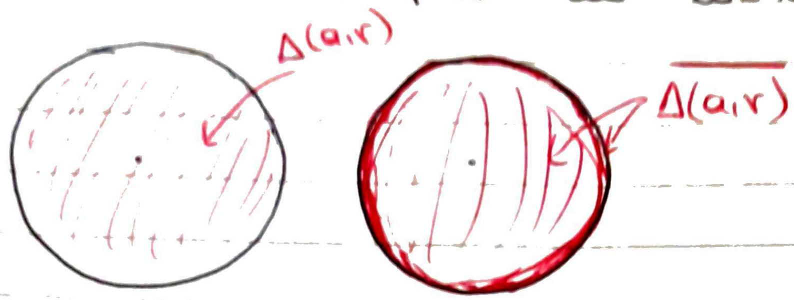
$$\text{και } \underset{(x,y)}{\overset{\shortparallel}{v(z)}} = Im\, f(z) = -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{Im\, z}{|z|^2}$$

Ορισμός: Έστω $a \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ (i) Ο ανοικτός δίσκος κέντρου a και ακτίνας r είναι το σύνολο
$\Delta(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$

(ii) Ο κλειστός δίσκος κέντρου a και ακτίνας r είναι το σύνολο $\overline{\Delta(a,r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq r\}$

Γεωμετρικά $\Delta(a, r) =$ το εσωτερικό του κύκλου κέντρου a και ακτίνας r.

Ο $\overline{\Delta(a,r)}$ = το εσωτερικό του κύκλου μαζί με τον κύκλο.



Με $C(a,r)$ συμβολίζουμε τον κύκλο με κέντρο a και ακτίνα r.

Ορισμός: Έστω $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{C}$ (i) Το S λέγεται ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ αν $\forall\, z \in S\ \exists\, r>0 : \Delta(a,r) \subseteq S$

(ii) Το S λέγεται κλειστό $\subseteq \mathbb{C}$ αν το σύνολο $S^c = \mathbb{C} \setminus S$ είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$ ή ισοδύναμα: $\forall$ ακολουθία $(z_n) \subseteq S$ τ.ω. $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$ έχουμε $z \in S$
$\exists\, z \in \mathbb{C}$

(iii) Το $S \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται φραγμένο αν $\exists\, r>0 : S \subseteq \overline{\Delta(0,r)}$
δηλ. αν $\exists\, r>0 : \forall\, z \in S$ να ισχύει $|z| \leq r$

Ορισμός: Έστω $S \subseteq \mathbb{C}$ και $z \in \mathbb{C}$. Το z λέγεται σημείο συσσώρευσης του S αν $\forall\, r>0\ \exists\, w \in S$ με $w \neq z : w \in \Delta(z,r)$

Χαρακτηρισμός των σ.σ.

Το z είναι σ.σ. του S αν $\exists$ ακολουθία $(z_n) \subseteq S$ με $z_n \neq z$ ώστε $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$

Το σύνολο όλων των σ.σ. ενός συνόλου S το συμβολίζουμε με S' και το καλούμε παράγωγο σύνολο του S.

Το S' είναι κλειστό σύνολο (ΑΣΚΗΣΗ)

Η <u>κλειστότητα</u> (ή <u>κλειστή θήκη</u>) του S είναι το σύνολο $\bar{S} = S \cup S'$.

Το $z \in \bar{S} \iff \exists$ ακολ. $(z_n) \subseteq S$: $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z$

Η $\bar{S}$ είναι το μικρότερο κλειστό σύνολο που περιέχει το S, δηλ. $\bar{S} = \bigcap \{F \subseteq \mathbb{C},\ F$ κλειστό και $S \subseteq F\}$.

Ένα σύνολο $S \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται <u>συμπαγές</u> αν το S είναι κλειστό και φραγμένο.

Χαρακτηρισμός με ακολουθίες

Το $S \subseteq \mathbb{C}$ είναι συμπαγές $\iff \forall$ ακολ. $(z_n) \subseteq S$ $\exists$ υπακολουθία (z_{k_n}) της (z_n) και $z \in S$ ώστε $z_{k_n} \to z$

Το <u>εσωτερικό</u> ενός συνόλου $S \subseteq \mathbb{C}$, που συμβολίζεται με <u>$\mathrm{int}(S)$</u> ή <u>S°</u>, είναι το σύνολο των $z \in \mathbb{C}$: $\exists$ $\varepsilon > 0$ με $\Delta(z, \varepsilon) \subseteq S$

Αποδεικνύεται ότι το $\overset{\mathrm{int}(S)}{=} S^\circ$ είναι το μεγαλύτερο ανοικτό σύνολο που περιέχεται στο S δηλ.

$S^\circ = \bigcup \{ U \subseteq \mathbb{C} : U$ ανοικτό και $U \subseteq S\}$

Ενδέχεται $\mathrm{int}(S) = \emptyset$.

Το <u>σύνορο</u> του S είναι το σύνολο

$\partial S = \mathrm{bd}(S) = \bar{S} \cap \overline{S^c}$, όπου $S^c = \mathbb{C} \setminus S$.

τα σημεία του ∂S λέγονται <u>συνοριακά σημεία</u> του S

Μπορούμε ν.δ.ο. $\partial S = \bar{S} \setminus \mathrm{int}(S)$ και τα σύνολα $\mathrm{int}(S), \partial S$, $\mathrm{int}(\mathbb{C} \setminus S)$ είναι διαμέριση του $\mathbb{C}$.

Πρόταση: Κάθε ανοικτός δίσκος $\Delta(z,r)$ $(z\in\mathbb{C},\ r>0)$ είναι ανοικτό σύνολο.

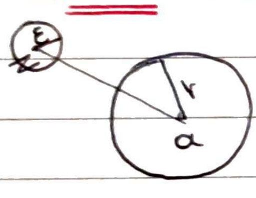
Απόδ. Αν $w\in\Delta(z,r)$ τότε για $\delta=\frac{1}{2}(r-|w-z|)$ έχω $\Delta(w,\delta)\subseteq\Delta(z,r)$

Πράγματι αν $x\in\Delta(w,\delta)$ τότε

$$|x-z|\leq|x-w|+|w-z|<\frac{1}{2}(r-|w-z|)+|w-z|$$
$$<r-|w-z|+|w-z|=r\Rightarrow|x-z|<r$$
$$\Rightarrow x\in\Delta(z,r)$$

Πρόταση: Κάθε κλειστός δίσκος $\overline{\Delta(a,r)}$ είναι κλειστό σύνολο

Απόδ. Θ.δ.ο. $\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta(a,r)}=$ ανοικτό $\subseteq\mathbb{C}$



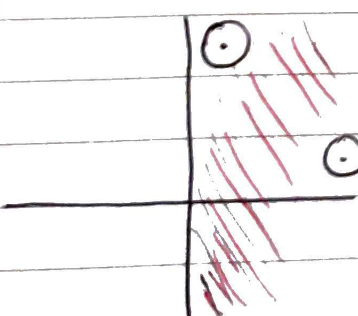
Έστω $z\in\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta}(a,r)$

Παίρνω $\varepsilon=\frac{1}{2}(\underbrace{|z-a|-r}_{>0})$ και έχω ότι $\Delta(z,\varepsilon)\subseteq\mathbb{C}\setminus\overline{\Delta}(a,r)$

Αν $w\in\Delta(z,\varepsilon)$ τότε $|w-a|\geq\big||w-z|-|z-a|\big|\geq$
$$\geq|z-a|-|w-z|>|z-a|-\varepsilon>|z-a|-(|z-a|-r)=r$$

Παραδείγματα

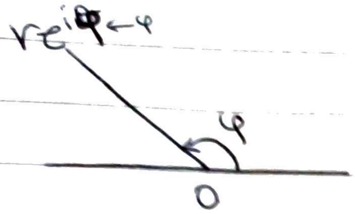
① Το σύνολο $E=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z>0\}$ είναι το δεξιό ημιεπίπεδο δίπλα από τον φανταστικό άξονα. Αποδεικνύεται ότι το E είναι ανοικτό σύνολο.



Το $E^c=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z\leq 0\}$ είναι κλειστό σύνολο (προφανώς) και το σύνορο του E είναι $\partial E=\overline{E}\cap\overline{E^c}=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Re}z=0\}$ δηλ. ο φανταστικός άξονας.

(2) Έστω $0<\varphi<\pi$. Θέτουμε: $A=\{z=re^{i\theta} : 0<\theta<\pi, r>0\}$

$B=\{z=re^{i\theta} : 0\leq\theta\leq\pi, r\geq 0\}$



Το A είναι το εσωτερικό της κυρτής γωνίας με πλευρές τον ημιάξονα Ox και την ημιευθεία $\{z=re^{i\varphi} : r\geq 0\}$

B = εσωτερικό της γωνίας μαζί με τις πλευρές.

Παρατηρούμε ότι $B=\bar{A}$ και $\partial A=\partial B=\bar{A}\setminus int(A)=$
$=\{r : r\geq 0\}\cup\{re^{i\varphi} : r\geq 0\}$

(3) Κάθε κλειστός δίσκος είναι κλειστό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και άρα είναι συμπαγές $\subseteq\mathbb{C}$.

α) $\partial\Delta(a,r)=\partial\bar{\Delta}(a,r)=C(a,r)$

β) Το σύνολο των σ.σ. του $\Delta(a,r)$ είναι ο $\bar{\Delta}(a,r)$
(ΑΣΚΗΣΗ)

(4) Δεν είναι σωστό ότι κάθε σημείο ενός κλειστού συνόλου είναι σ.σ. του συνόλου.

π.χ. $S=\{\frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$

Είναι $S'=\{0\}$ με $0\in S \Rightarrow \bar{S}=S\cup S'=S \Rightarrow S$ κλειστό
και $\forall n\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{n}\notin S'$

(5) Κάθε πεπερασμένο σύνολο είναι συμπαγές (ΑΣΚΗΣΗ)

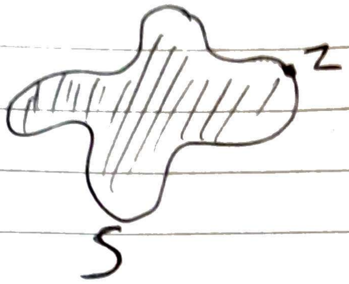
Παρατήρηση:

1) Τα σημεία z ενός συνόλου S που δεν είναι σ.σ. του S λέγονται <u>μεμονωμένα</u> σημεία του S.

Αν $z\in S$ τότε z μεμονωμένο $\Leftrightarrow \exists\ r>0 : \Delta(z,r)\cap S=\{z\}$

2) Αν $S \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό τότε κάθε σημείο του S είναι σ.σ. του S, δηλ. $S \subseteq S'$

Επίσης αν S ανοικτό τότε $z \in \partial S \Leftrightarrow z$ είναι σ.σ. του S αλλά $z \notin S$ δηλ. το z είναι στην "άκρη του S"



Ορισμός: Έστω $f: S \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ και $z_0 \in \mathbb{C}$. z_0 σ.σ. του S. Τότε ορίζουμε:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0 : \text{ αν } z \in S \text{ και } 0 < |z - z_0| < \delta \text{ τότε: } |f(z) - \ell| < \varepsilon$$

$(z \neq z_0)$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : f(\Delta(z_0, \delta) \cap S \setminus \{z_0\}) \subseteq \Delta(\ell, \varepsilon)$$

Πρόταση: (χαρακτ. ορίων με ακολουθίες)

Έστω $f: S \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, z_0 σ.σ. του S και $\ell \in \mathbb{C}$

ΤΑΕΙ:

i) $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$

ii) $\forall$ ακολ. $(z_n) \subseteq S$ με $z_n \neq z_0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ και $z_n \to z_0$ ισχύει ότι $f(z_n) \xrightarrow[n]{} \ell$

Πρόταση: Αν $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$ και $\lim_{z \to z_0} g(z) = k$ τότε

α) $\lim_{z \to z_0} (c_1 f + c_2 g)(z) = c_1 \ell + c_2 k$

β) $\lim_{z \to z_0} (f \cdot g)(z) = \ell k$

δ) $\lim\limits_{z\to z_0}\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{\ell}{k}$, αν $k \neq 0$

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z)$$
$$(cf)(z) = c\cdot f(z)$$
$$(fg)(z) = f(z)\,g(z)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$$

Πρόταση:

$\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \ell = \ell_1 + i\ell_2 \Leftrightarrow$

$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(a,b)} \ell_1$ και

$v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(\underbrace{x,y}_{z}) \xrightarrow{(x,y)\to(a,b)} \ell_2$ όπου

$f = u + iv$, $z = x + iy$

και $z_0 = a + ib$