ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

21/10/22

7ο Μάθημα

Παρατήρηση

Έστω $S \subseteq \mathbb{C}$. Το άπειρο $\infty \in \tilde{\mathbb{C}}$ είναι σ.σ. του S αν $\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, z \in S : |z| > \varepsilon$

Ισοδύναμα το ∞ είναι σ.σ. του S αν $\exists$ ακολουθία $(z_n)_{n\geq 1}$ με $z_n \in S \;\forall n$ ώστε $z_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

$f: S \overset{\subseteq \mathbb{C}}{\longrightarrow} \mathbb{C}$

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε το $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \ell$ όρια

$z, \ell \in \tilde{\mathbb{C}}$, $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

π.χ. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \ell \in \mathbb{C} \iff \forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 :$
$\forall\, z \in S$ με $|z| > \delta$ έχουμε:
$|f(z) - \ell| < \varepsilon$.

Ανάλογα ορίζονται τα εξής:

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty \quad , \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \quad (z_0 \in \mathbb{C})$$

Παραδείγματα

① Το όριο $\lim\limits_{z\to z_0} z^n = z_0^n$
όπου $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$

Με ακολουθίες: έστω $(z_m) \subseteq \mathbb{C}$ και $z_m \neq z_0 \;\forall m$ με $z_m \xrightarrow{m\to\infty} z_0$

τότε $\forall\, n \in \mathbb{N}$ έχουμε: $z_m^n = \underbrace{z_m \cdot z_m \cdots z_m}_{n \text{ φορές}} \longrightarrow \underbrace{z_0 \cdot z_0 \cdots z_0}_{n-\text{φορές}} = z_0^n$

② Το όριο $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z} \;\nexists$

Έστω $z = x + iy$ με $x \neq 0$, ή $y \neq 0$

τότε για $z = x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ έχω: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\bar{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x} = 1$,

ενώ για $z = iy$, $y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ έχω:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\overline{iy}}{iy} = \lim_{y\to 0} \frac{-iy}{iy} = \lim_{y\to 0} (-1) = -1 \neq 1$$

$$\Rightarrow \nexists \lim_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$$

(3) $\lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$, $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty$, $\lim_{z\to\infty} z^n = \infty$ $(n \in \mathbb{N})$

Αποδ.

• Έστω $\varepsilon > 0$. Παίρνω $\delta = \frac{1}{\varepsilon} > 0$ και έχω $\forall z \in \mathbb{C}$
$|z| > \delta = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} < \varepsilon \Rightarrow$

$\left|\frac{1}{z}\right| < \varepsilon$

$\Rightarrow \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} = 0$

• Έστω $\varepsilon > 0$. Ζητώ $\delta > 0$: $|z| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > \varepsilon \Rightarrow$
$\Rightarrow |z| < \frac{1}{\varepsilon} = \delta.$

Παίρνω $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ και για $z \in \mathbb{C}$ και $z \neq 0$ με $|z| < \delta = \frac{1}{\varepsilon}$ έχω
$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > \varepsilon \Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{1}{z} = \infty$

• Έστω $\varepsilon > 0$. Παίρνω $\delta = \sqrt[n]{\varepsilon}$
τότε αν $z \in \mathbb{C}$ με $|z| > \delta = \sqrt[n]{\varepsilon} > 0$
είναι $|z^n| = |z|^n > \delta^n = (\sqrt[n]{\varepsilon})^n = \varepsilon \Rightarrow \lim_{z\to\infty} z^n = \infty$

Ορισμός: Μια συνάρτηση $f: S \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ λέγεται **συνεχής** στο $z_0 \in S$ αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, z_0) > 0$ $\forall z \in S$ με $|z - z_0| < \delta$ ισχύει $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

Ισοδύναμα: Η f είναι συνεχής στο $z_0 \in S \Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$: $f(\Delta(z_0, \delta) \cap S) \subseteq \Delta(f(z_0), \varepsilon)$

Σημείωση

i) Αν $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι σ.σ. του $S \subseteq \mathbb{C}$ τότε: f είναι συνεχής στο $z_0 \Leftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

ii) Αν το z_0 είναι μεμονωμένο σημείο του S τότε η f είναι συνεχής στο z_0. ~~[illegible]~~

Για εμάς S ανοιχτό και άρα $S \subseteq S'$

Μια συνάρτηση $f: S \to \mathbb{C}$ θα λέγεται <u>συνεχής</u> αν είναι συνεχής σε κάθε $z_0 \in S$

<u>Πρόταση</u> (χαρακτ. συνέχειας με ακολουθίες)

Έστω $f: S \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $z_0 \in S$. ΤΑΕΙ:
i) Η f είναι συνεχής στο z_0
ii) $\forall$ ακολουθία $(z_n) \subseteq S$ με $z_n \xrightarrow{n\to\infty} z_0$ ισχύει: $f(z_n) \underset{n\to\infty}{\to} f(z_0)$

<u>Πρόταση:</u> Έστω $f_1 f_2 : S \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση στο $z_0 \in S$.

i) Οι συναρτήσεις $c_1 f_1 + c_2 f_2$ όπου $c_i \in \mathbb{C}$ και $f_1 f_2$ είναι συνεχής στο $z_0 \in S$

ii) Αν $f_2(z) \neq 0$ τότε $\exists\ \delta > 0 : f_2(z) \neq 0 : \forall z \in S \cap (\Delta(z_0, \delta))$ και η $\frac{f_1}{f_2}$ ορισμένη στο $S \cap \Delta(z_0, \delta)$ είναι συνεχής στο z_0

iii) Αν $f = u + iv$ ορισμένη στο S, τότε η f είναι συνεχής στο $z_0 \in S \Leftrightarrow$ οι συναρτήσεις $u = \mathrm{Re} f$ και $v = \mathrm{Im} f$ είναι συνεχείς στο z_0 $(f = u + iv)$

<u>Πρόταση:</u> Έστω $f: S \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ και $g: T \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(S) \subseteq T$. Αν f είναι συνεχής στο $z_0 \in S$ και η g είναι συνεχής στο $f(z_0) \in T$, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο $z_0 (\in S)$

Ορισμός: Αν $S \subseteq \mathbb{C}$, $S \neq \emptyset$ και $V \subseteq S$ τότε:

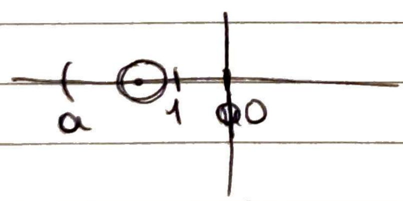
i) λέμε ότι το V είναι ανοικτό στο S (ή σχετικά ανοικτό) $\Leftrightarrow \exists\, U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό ώστε $V = S \cap U$

ii) Λέμε ότι το V είναι κλειστό στο S (ή σχετικά κλειστό) $\Leftrightarrow \exists\, F \subseteq \mathbb{C}$ κλειστό ώστε $V = F \cap S$

Παρατήρηση:

① Αν $S = [0,1) \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ τότε το σύνολο $V = [0, \frac{1}{2})$ είναι ανοικτό στο S, διότι $V = \underbrace{\Delta(0, \tfrac{1}{2})}_{\text{ανοικτό} \subseteq \mathbb{C}} \cap \underbrace{[0,1)}_{S}$, ενώ το σύνολο $F = [\frac{1}{2}, 1)$ είναι κλειστό (στο S) διότι $F = \underbrace{[0,1)}_{S} \cap \underbrace{[\tfrac{1}{2}, +\infty)}_{\text{κλειστό} \subseteq \mathbb{C}}$

② Το διάστημα $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$ αλλά όχι στο $\mathbb{C}$.!



③ Το $V \subseteq S$ είναι ανοικτό στο S $\Leftrightarrow$ το $S \setminus V$ είναι κλειστό στο S.

Πρόταση: Έστω $f: S \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. ΤΑΕΙ:

i) Η f είναι συνεχής

ii) Για κάθε $U \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, το $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο S (αν S ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$ τότε $f^{-1}(U)$ επίσης ανοικτό στο $\mathbb{C}$)

iii) Για κάθε κλειστό $K \subseteq \mathbb{C}$, το $f^{-1}(K)$ είναι κλειστό στο S.
(Αν το S ήταν κλειστό $\subseteq \mathbb{C}$ τότε και το $f^{-1}(K)$ θα ήταν κλειστό στο $\mathbb{C}$)

Παραδείγματα

① Μια συνάρτηση $f: S \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ είναι Lipschitz με σταθερά $k>0$ αν $\forall\ z, w \in S$ ισχύει ότι $|f(z) - f(w)| \leq k\,|z-w|$. Η f λέγεται k-Lipschitz.
Παρατηρούμε ότι κάθε Lipschitz συνάρτηση είναι συνεχής.
(Για τυχόν $\varepsilon>0$, παίρνω $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ και έχω $\forall\ z, w \in S$, $|z-w| < \delta = \frac{\varepsilon}{k} \Rightarrow |f(z) - f(w)| \leq k\,|z-w| < \cancel{k} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{k}} = \varepsilon$)

② Οι απεικονίσεις $z \in \mathbb{C} \rightarrow \mathrm{Re}\,z \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ και $z \in \mathbb{C} \rightarrow \mathrm{Im}\,z \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ είναι 1-Lipschitz και άρα συνεχείς.
Πράγματι $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$ έχω $|\mathrm{Re}\,z - \mathrm{Re}\,w| = |\mathrm{Re}(z-w)| \leq$
$\leq 1 \cdot |z-w|$. Ομοίως $|\mathrm{Im}\,z - \mathrm{Im}\,w| = |\mathrm{Im}(z-w)| \leq |z-w|$

③ Αν $n \in \mathbb{N}$ τότε η συνάρτηση $\varphi(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$ είναι συνεχής (αφού $\forall\ z_0 \in \mathbb{C}$ $\lim\limits_{z \to z_0} \underset{\varphi(z)}{\underset{\shortparallel}{z^n}} = z_0^n = \varphi(z_0)$)

Οι απεικονίσεις $z \mapsto z^n$, $z \in \mathbb{C}$ λέγονται μιγαδικά μονώνυμα. Επίσης ξέρουμε ότι κάθε μιγαδικό πολυώνυμο $P(z)$ είναι της μορφής $a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$, όπου $a_i \in \mathbb{C}$ $\forall i$, άρα είναι συνεχής συνάρτηση ως γραμμικός συνδυασμός μονωνύμων (που είναι συνεχή)

Αν $f=\frac{p}{q}$ μια μιγαδική ρητή συνάρτηση όπου p, q πολυώνυμα με $q \neq 0$ είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού της το οποίο αν $\text{μκδ}(p,q)=1$, είναι το $\mathbb{C} \setminus Z(q)$ με $Z(q)=\{z \in \mathbb{C} \setminus q(z)=0\}$. Το $Z(q)=q^{-1}(\{0\})$ είναι κλειστό άρα το $\mathbb{C} \setminus Z(q)$ είναι ανοικτό σύνολο.

(4) Η συνάρτηση απόλυτη τιμή $z \in \mathbb{C} \to |z|$ είναι συνεχής ως Lipschitz αφού $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι $||z|-|w|| \leq |z-w|$.

(5) Δ.ο. $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$ $|e^{ix}-e^{iy}| \leq |x-y|$ και συμπεράνατε ότι η $\varphi: x \in \mathbb{R} \to e^{ix} \in \mathbb{C}$ είναι συνεχής. Δώστε γεωμ. ερμηνεία.

Λύση

Έχουμε $|e^{ix}-e^{iy}|^2 = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 =$

$$= \cos^2 x + \cos^2 y - 2\cos x \cos y + \sin^2 x + \sin^2 y -$$

$$- 2 \sin x \sin y =$$

$$= 2(1-(\cos x \cos y + \sin x \sin y)) =$$

$$= 2(1-\cos(x-y)) =$$

$$= 2 \cdot 2 \sin^2 \frac{(x-y)}{2} = 4 \sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right) \Rightarrow$$

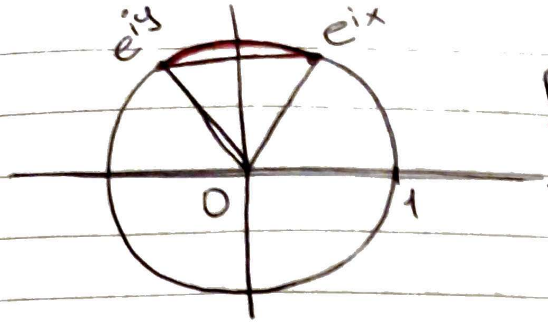
$$\Rightarrow \boxed{\cos a = 1 - 2\sin^2 \frac{a}{2}}\ !$$

$$\boxed{|\sin x| \leq |x|}\ !$$

$$|e^{ix}-e^{iy}|^2 = 4\left|\sin^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leq 4\left|\frac{x-y}{2}\right|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |e^{ix}-e^{iy}| \leq |x-y|$$

$\Rightarrow$ $\varphi(x)=e^{ix}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι 1-Lipschitz $\Rightarrow$ φ συνεχής.



Γεωμετρική Ερμηνεία

Το μήκος της χορδής που συνδέει e^{ix} και e^{iy} είναι μικρότερο από αυτό του τόξου που τα συνδέει.

6) Η συνάρτηση $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής
$z \xmapsto{\varphi} \frac{z}{|z|}$ ως πηλίκο συνεχών και έχει σύνολο τιμών το $\varphi(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = C(0,1)$ διότι $\forall$ $z \neq 0$ είναι
$$|\varphi(z)| = \left|\frac{z}{|z|}\right| = 1.$$