ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ — Μάθημα 10ο

31/10/22

Παραδείγματα

(2) Αν $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ ρητή συνάρτηση όπου $Q\neq 0$

τότε f ολόμορφη στο $\mathbb{C}\setminus Z(Q)$ = ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$ και
(μκδ $(P,Q)=1$)

$$f'=\frac{P'Q-PQ'}{Q^2}=\text{ρητή συνάρτηση}$$

Έτσι η παράγωγος πολυωνύμου είναι πολυώνυμο και η παράγωγος ρητής συνάρτησης είναι ρητή συνάρτηση

π.χ. $f(z)=\frac{1}{z}$, $z\neq 0$ τότε $f'(z)=-\frac{1}{z^2}$, $z\neq 0$ και

Επαγωγικά $\forall\ n\geq 0$, $\forall z\neq 0$ $\quad f^{(n)}(z)=(-1)^n\cdot\dfrac{n!}{z^{n+1}}$

Επίσης αν $g(z)=\dfrac{1}{z-a}$, $z\neq a$, τότε $\forall\ n\geq 0$, ~~$\forall z\neq$~~ $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{a\}$

$$g^{(n)}(z)=(-1)^n\cdot\frac{n!}{(z-a)^{n+1}}$$

Θεώρημα (Κανόνας της αλυσίδας)

Έστω $\Omega, G\subseteq\mathbb{C}$ ανοικτά, $f:\Omega\to G$, $g:G\to\mathbb{C}$ και $a\in\Omega$. Αν η f έχει μιγαδική παράγωγο στο a και η g έχει μιγαδική παράγωγο στο $f(a)$, τότε η $g\circ f$ έχει μιγ. παρ. στο a και μάλιστα:

$$(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$$

Απόδ. Από την παρατήρηση του Καραθεοδωρή, $\exists$ συναρτήσεις $\varphi:\Omega\to\mathbb{C}$ συνεχής στο a και $\psi: G\to\mathbb{C}$ —//— $f(a)$

$$f(z)-f(a)=\varphi(z)(z-a),\ z\in\Omega \text{ και } \varphi(a)=f'(a)$$
$$g(w)-g(f(a))=\psi(w)(w-f(a)),\ w\in G \text{ και } \psi(f(a))=g'(f(a))$$

Έχουμε ότι $\forall z\in\Omega$:

$$g(\underbrace{f(z)}_{\in G})-g(f(a))=\psi(f(z))(f(z)-f(a))= \rightsquigarrow$$

$= \underbrace{(\varphi \circ f)(z)\varphi(z)}_{h(z)}(z-a)$

$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ συνεχής στο } a \\ \left.\begin{array}{l} f \text{ -//- στο } a \\ \varphi \text{ -//- στο } f(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi \circ f \text{ συν. στο } a \end{array}\right\} \Rightarrow h = (\varphi \circ f)\varphi$ συν. στο a

Έτσι $(g \circ f)(z) - (g \circ f)(a) = h(z)(z-a)$ με την h συνεχή στο a και:

$$h(a) = (\varphi \circ f)(a)\,\varphi(a) =$$
$$= \varphi(f(a))\,\varphi(a) =$$
$$= g'(f(a))\,f'(a)$$

Από το αντίστροφο της παρατήρησης του Καραθεοδωρή έχω ότι: η $g \circ f$ έχει μιγ. παράγωγο στο a και μάλιστα $(g \circ f)'(a) = h(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Παρατήρηση

1) Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα, $a \in I$ και $f: I \to \mathbb{C}$ μιγαδική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής.

Η f θα λέγεται διαφορίσιμη στο a αν το $\lim\limits_{t \to a} \dfrac{f(t) - f(a)}{t-a}$ $\exists$ στο $\mathbb{C}$.

Το όριο αυτό συμβολίζεται με $f'(a)$ και λέγεται παράγωγος της f στο a.

Αν $f = \mathrm{Re}f + i\,\mathrm{Im}f$ τότε η f έχει παράγωγο $f'(a)$ στο a αν οι πραγματικές συναρτήσεις πραγμ. μεταβλητής $\mathrm{Re}f$ και $\mathrm{Im}f$ έχουν παράγωγο στο a και τότε $f'(a) = (\mathrm{Re}f)'(a) + i(\mathrm{Im}f)'(a) =$
$= ((\mathrm{Re}f)'(a), (\mathrm{Im}f)'(a))$

2) Η παρατήρηση του Καραθεοδωρή ισχύει και για συναρτήσεις $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Επίσης ο κανόνας της αλυσίδας ισχύει και όταν:

α) f μιγ. συνάρτηση πραγμ. μεταβλητής και η g είναι μιγ. συνάρτηση μιγαδ. μεταβλ. δηλ.

$$f: I \subseteq \mathbb{R} \to G \subseteq \mathbb{C} \quad \text{και}$$
$$g: G \to \mathbb{C}$$
$$(g\circ f)'(t) = \underbrace{g'(f(t))}_{\in\mathbb{C}} \cdot \underbrace{f'(t)}_{\in\mathbb{C}}$$

β) όταν $f: I\subseteq\mathbb{R}\to J\subseteq\mathbb{R}$ (όπου I, J διαστήματα)

και $g: J\subseteq \mathbb{R}\to\mathbb{C}$

$$(g\circ f)'(t) = \underbrace{g'(f(t))}_{\in\mathbb{C}}\, \underbrace{f'(t)}_{\in\mathbb{R}}$$

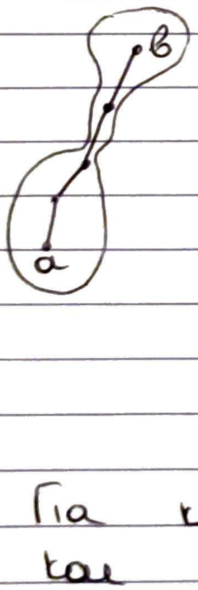
Θεώρημα Έστω $\Omega\subseteq\mathbb{C}$ τόπος → (ανοικτό και συνεκτικό) και $f:\Omega\to\mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση με $f'(z)=0\ \forall z\in\Omega$

Τότε η f είναι σταθερή στο Ω.

Αποδ. Έστω $a,b\in\Omega$ τυχόντα. Θ.δ.ο. $f(a)=f(b)$

Επειδή Ω τόπος $\exists$ πολυγωνική γραμμή $P\subseteq\Omega$ από το $z_1=a$ στο $z_n=b$ με

$P=[z_1,z_2]\cup[z_2,z_3]\cup\dots\cup[z_{n-1},z_n]$



Θέτουμε $\varphi_k(t)=(1-t)z_k+tz_{k+1}$, $t\in[0,1]$, $k=1,2,\dots,n-1$

και $\gamma_k(t)=(f\circ\varphi_k)(t)=f(\varphi_k(t))=$
$= f((1-t)z_k+tz_{k+1})$, $0\le t\le 1$

Για κάθε $t\in[0,1]$ είναι $\varphi_k'(t)=z_{k+1}-z_k$

και $\gamma_k'(t)=(f\circ\varphi_k)'(t)=$
$$= f'(\underbrace{\varphi_k(t)}_{\in\Omega})\varphi_k'(t) = 0\cdot\varphi_k'(t) = 0$$
$\underbrace{f'(\varphi_k(t))}_{=0 \text{ από υπόθεση}}$

$[0,1]$ διάστημα $\Longrightarrow$ (γ_k μιας πραγμ. μεταβλ.) $\gamma_k=$ σταθερή $\Rightarrow \gamma_k(0)=\gamma_k(1)$ δηλ. $f(z_k)=f(z_{k+1})$

$\forall k\in 1,2,\dots,n-1$

Τότε έχω $f(z_1) = f(z_2) = \dots = f(z_{n-1}) = f(z_n)$

$$\underset{f(a)}{\|} \qquad\qquad \underset{f(b)}{\|}$$

$\Rightarrow f(a) = f(b)$ και αφού $\forall\ a, b \in \Omega \Rightarrow f =$ σταθερή

Πόρισμα: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση

Υποθέτουμε ότι:

Είτε a) η f είναι πραγμ. συνάρτηση δηλ. $f(\Omega) \subseteq \mathbb{R}$

Είτε b) η f παίρνει μόνο φανταστικές τιμές, δηλ. $f(\Omega) \subseteq i\mathbb{R}$

Τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση

Αποδ

Αρκεί νδο $f'(z) = 0 \quad \forall \quad z \in \Omega$

a) Έστω $a \in \Omega$. Θέλω νδο $f'(a) = 0$. Αν $f = u + iv$, $u = \operatorname{Re} f$, $V = \operatorname{Im} f$

τότε $V = 0 \Rightarrow f = u$

Έστω $a = x_0 + iy_0 \in \Omega$. Τότε:

για $z = x + iy_0 \in \Omega$ (παρ/λα με τον πραγμ. άξονα)

Έχουμε $f'(a) = \lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim\limits_{z \to a} \dfrac{u(z) - u(a)}{(x + iy_0) - (x_0 + iy_0)} =$

$= \lim\limits_{\substack{z \to a \\ (x \to x_0)}} \dfrac{u(z) - u(a)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ και

για $z = x_0 + iy \in \Omega$ (παρ/λα στον φανταστικό άξονα)

έχω $f'(a) = \lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim\limits_{z \to a} \dfrac{u(z) - u(a)}{(x_0 + iy) - (x_0 + iy_0)} =$

$= \lim\limits_{\substack{z \to a \\ (y \to y_0)}} \dfrac{u(z) - u(a)}{i(y - y_0)} = -i \underbrace{\lim\limits_{z \to a} \dfrac{u(z) - u(a)}{y - y_0}}_{\in \mathbb{R}} \in i\mathbb{R}$

Άρα το $f'(a)$ είναι πραγματικός ή φανταστικός αριθμός ταυτόχρονα άρα $f'(a) = 0$.

Αφού a τυχόν, έχω $f'(a) = 0\ \forall\ a \in \Omega \Rightarrow f =$ σταθ. στο Ω

β) Παρατηρούμε ότι $u=0$ ($f=u+iv$, $f(\Omega)\subseteq i\mathbb{R}$) και ομοίως με το (α) έχουμε ότι $f'(z)=0$ $\forall z\in\Omega \Rightarrow f=$ σταθερή

Θεώρημα (αντίστροφης συνάρτησης)

Έστω $\Omega, G\subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά, $f:\Omega\to G$ συνεχής, $g: G\to\mathbb{C}$ ολόμορφη

Υποθέτουμε ότι $g'(w)\neq 0$ $\forall w\in f(\Omega)$ και ότι $g(f(z))=z$ $\forall z\in\Omega$

Τότε η f είναι ολόμορφη και ισχύει ότι:
$$f'(z)=\frac{1}{g'(f(z))},\ z\in\Omega.$$

Αποδ. Έστω $a\in\Omega$.
Επειδή υπάρχει παράγωγος της g στο $f(a)$ από την παρατήρηση του Καραθεοδωρή $\exists$ συνάρτηση $\varphi: G\to\mathbb{C}$ συνεχής στο $f(a)$ με $g(w)-g(f(a))=\varphi(w)(w-f(a))$ $\forall w\in G$ και $\varphi(f(a))=g'(f(a))$

Για $z\in\Omega$ και $w=f(z)$ έχουμε:

$$z-a=g(f(z))-g(f(a))=\varphi(f(z))(f(z)-f(a))$$
$$\Rightarrow z-a=\varphi(f(z))(f(z)-f(a))\ (*)$$

Παρατηρώ ότι f συνεχής στο $a\in\Omega$, φ συνεχής στο $f(a)\in G$ $\Rightarrow$
$\varphi\circ f$ συνεχής στο a. Επίσης $\varphi(f(a))=g'(f(a))\neq 0$
$\Rightarrow (\varphi\circ f)(a)\neq 0$. Από τη συνέχεια $\underset{\in f(\Omega)}{}$
της $\varphi\circ f$ στο a $\exists$ $r>0$: $\Delta(a,r)\subseteq\Omega$ και $\forall z\in\Delta(a,r)$ ισχύει ότι $(\varphi\circ f)(z)\neq 0$.

Από την $(*)$ έχω: $\forall z\in\Delta(a,r)$, ~~...~~
$$f(z)-f(a)=\frac{1}{\varphi(f(z))}(z-a)$$ και $\frac{1}{\varphi\circ f}$ συνεχής στο a

άρα από αντίστροφο παρατ. Καραθεοδωρή έχω ότι η f έχει μιγαδική παράγωγο στο α, και μάλιστα

$$f'(a) = \frac{1}{\varphi(f(a))} = \frac{1}{g'(f(a))}$$

$$\Rightarrow f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))} \quad \forall z \in \Omega$$

Παρατήρηση

1) Από το θεώρημα του Cauchy (παρακάτω) έχω ότι αν $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και Ω τόπος, τότε το $f(\Omega)$ είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$ (θεώρημα ανοικτής απεικόνισης)
Αν $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη και 1-1 έχω ότι $f'(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$ και η f^{-1} είναι επίσης ολόμορφη.

2) Είχαμε πριν ότι $g(f(z)) = z$ $\forall z \in \Omega$
Από αυτό έπεται ότι $f = 1\text{-}1$ στο Ω και $g = 1\text{-}1$ στο $f(\Omega)$
Άρα η υπόθεση $g'(w) \neq 0$ $\forall w \in f(\Omega)$ και η συνέχεια της f μπορούν να παραληφθούν στο προηγούμενο θεώρημα

ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ Cauchy-Riemann

Υπενθύμιση: Αν $f: \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ όπου Ω ανοικτό και $n=2$, $m=1$ ή 2 λέμε ότι η f είναι διαφορίσιμη στο $a \in \Omega$ αν $\exists$ γραμμική απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m$ ώστε:

$$\lim_{z \to a} \frac{|f(z) - f(a) - T(z-a)|}{|z-a|} = 0$$

Η T είναι μοναδική (αν $\exists$) και λέγεται διαφορικό της f στο a και συμβολίζεται με $(Df)(a)$
Αν $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ και $f = u + iv$, $u = \operatorname{Re} f$, $V = \operatorname{Im} f$ τότε ισχύουν: ~>

α) Η f είναι διαφορίσιμη στο a ανν οι u, v είναι διαφορίσιμες στο a. Τότε έχουμε ότι $(Df)(a) = ((Du)(a), (Dv)(a))$

β) Αν η f είναι διαφορίσιμη στο a, τότε $\exists$ οι μερικές παράγωγοι των u και v στο a και ο πίνακας

$$J_{f(a)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$$

λέγεται πίνακας Jacobi της f στο a και συνδέεται με το διαφορικό $(Df)(a)$ ως εξής:

$$(Df)(a)(h) = J_{f(a)}h \quad , \quad h = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

γινόμενο πινάκων

3η ώρα extra με ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Κεφ. 1

5) Λύστε την εξίσωση $z^n = \bar{z}$

Λύση Αν $z=0$ τότε $0^n = \bar{0} = 0 \Rightarrow z=0$ είναι λύση

Αν $z \neq 0$ τότε $z = re^{i\theta}$, $r>0$, $\theta = \arg(z) \in (-\pi, \pi]$

Τότε έχω $z^n = \bar{z} \Leftrightarrow (re^{i\theta})^n = \overline{re^{i\theta}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = r e^{-i\theta} \overset{r>0}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow r^{n-1} e^{in\theta} = e^{-i\theta} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^{n-1} e^{in\theta} \cdot e^{i\theta} = e^{-i\theta} e^{i\theta} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^{n-1} e^{in\theta} e^{\theta} = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^{n-1} e^{i(n+1)\theta} = 1 \cdot e^{i0} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} r^{n-1} = 1 \text{ και} \\ (n+1)\theta = 0 + 2k\pi, \text{ για κάποιο } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{n+1}, \text{ για } k \in \mathbb{Z} \end{array}\right\}$$

Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $z=0$, $z = 1 \cdot e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$, όπου $k \in \mathbb{Z}$ δηλ. $\{0\} \cup \{ e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}, k \in \{0,1,2,\ldots,n\}\}$ (*)

(*) (Αν $k = \lambda(n+1) + u$, $u \in \{0,1,2,\ldots,n\}$ και $e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} = e^{i\frac{2u\pi}{n+1}}$)

⑥ Δο οι ρίζες της εξίσωσης $(z+1)^5 + z^5 = 0$ βρίσκονται στην ευθεία $x = -\frac{1}{2}$

Λύση Θδο $(z+1)^5 + z^5 = 0 \Rightarrow Re z = -\frac{1}{2}$

Παρατηρώ ότι $z \neq 0$ (δεν επαληθεύει την εξίσωση)

άρα $(z+1)^5 + z^5 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^5 = -z^5 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z}\right)^5 = -1$$

Θέτοντας $w = \frac{z+1}{z}$ έχω: $w^5 = -1 \Rightarrow |w^5| = |-1| \Rightarrow$

$|w|^5 = 1 \Rightarrow |w| = 1$ ①

$$w = \frac{z+1}{z} \Leftrightarrow w = 1 + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = w - 1 \underset{w \neq 1}{\Leftrightarrow} z = \frac{1}{w-1} \quad ②$$

Από τις ①, ② θδο $Re z = -\frac{1}{2}$ δηλ. $Re\left(\frac{1}{w-1}\right) = -\frac{1}{2}$

Υπολογίζω $\frac{1}{w-1} = \frac{\overline{w-1}}{(w-1)(\overline{w-1})} = \frac{\bar{w}-1}{(w-1)(\bar{w}-1)} = \frac{\bar{w}-1}{|w|^2 - (w+\bar{w}) + 1} \overset{①}{=}$

$$= \frac{\bar{w}-1}{1 - 2Re w + 1} = \frac{\bar{w}-1}{2(1-Re w)}$$

$\left(Re w = \frac{w+\bar{w}}{2}\right)$

Αν $w = x + iy$ τότε:

$$\frac{1}{w-1} = \frac{x - iy - 1}{2(1-x)} = \frac{(x-1) - iy}{2(1-x)} =$$

$$= \frac{(x-1)}{2(1-x)} - i\frac{y}{2(1-x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{Re\left(\frac{1}{w-1}\right)}_{= Re z} = \frac{x-1}{2(1-x)} = -\frac{1}{2}$$

$(x \neq 1$ αφού $\bar{w} \neq 1)$

7 Δ.ο. οι ρίζες της εξίσωσης:

$$(1+z)^{2n}+(1-z)^{2n}=0 \quad (n\in\mathbb{N})$$ δίνονται

από τον τύπο $z_k = i\tan\frac{(2k+1)}{4n}\cdot\pi$, $k=0,1,2,\dots,n-1$

Λύση

Παρατηρούμε ότι $z\neq 1$ $(2^{2n}\neq 0)$, $z\neq -1$ (ομοίως)

$$(1+z)^{2n}+(1-z)^{2n}=0 \Leftrightarrow (1+z)^{2n}=-(1-z)^{2n}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{2n}=-1$$ Θέτω $w=\frac{1+z}{1-z}$ και έχω:

$$w^{2n}=-1=1\cdot e^{i\pi} \quad (\arg(-1)=\pi) \Leftrightarrow$$

$$w=\underbrace{\sqrt[2n]{1}}_{1}\cdot e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2n}} = e^{\underbrace{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}_{i\vartheta}}, \quad k\in\{0,1,2,\dots,2n-1\}$$

$$w=\frac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow w(1-z)=1+z \Leftrightarrow w-wz=1+z \Leftrightarrow$$

$$w-1=wz+z \Leftrightarrow w-1=(w+1)z \Leftrightarrow z=\frac{w-1}{w+1}$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{e^{i\vartheta}-1}{e^{i\vartheta}+1}=\frac{(e^{i\vartheta}-1)(\overline{e^{i\vartheta}}+1)}{(e^{i\vartheta}+1)(\overline{e^{i\vartheta}}+1)}=$$

$\boxed{\sin 2a = 2\sin a\cos a}$

$$=\frac{\cancel{1}+e^{i\vartheta}-\overline{e^{i\vartheta}}-\cancel{1}}{|1+e^{i\vartheta}|^2}=\frac{e^{i\vartheta}-\overline{e^{i\vartheta}}}{(1+\cos\vartheta)^2+\sin^2\vartheta}=$$

$\boxed{\frac{a-\bar{a}}{2i}=\operatorname{Im}a}$

$$=\frac{2i\operatorname{Im}(e^{i\vartheta})}{1+\cos^2\vartheta+2\cos\vartheta+\sin^2\vartheta}=\frac{\cancel{2}i\sin\vartheta}{\cancel{2}+\cancel{2}\cos\vartheta}=\frac{i\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta}=$$

$$=i\frac{\cancel{2}\sin(\frac{\vartheta}{2})\cos(\frac{\vartheta}{2})}{\cancel{1}+\cancel{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}-\cancel{1}}=i\frac{\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}{\cos^2\frac{\vartheta}{2}}=i\tan\frac{\vartheta}{2}=$$

$$=i\tan\frac{(2k+1)\pi}{4n}, \quad k\in\{0,1,2,\dots,2n-1\}$$

$\boxed{\begin{array}{l}\cos 2a = 2\cos^2 a-1\\ \Rightarrow \cos a = 2\cos^2\frac{a}{2}-1\end{array}}$