ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Μάθημα 10° 2/11/2022

Λήμμα Ένας πίνακας $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ αναπαριστά με τον πολ/σμό πινάκων $\mathbb{R}^2 \ni (x,y) \longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ πολ/μό με ένα σταθερό μιγαδικό, έστω $A+iB$

$\mathbb{C} \ni z \longmapsto (A+iB)(x+iy) \in \mathbb{C}$ ανν $a=d$ και $b=-c$

Ο ζητούμενος μιγαδικός τότε είναι $A+iB = a+ic = d-ib$.

Αποδ. "$\Rightarrow$"

Έστω ότι $\exists$ μιγαδικός $A+iB$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (A+iB)(x+iy) \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} ax+by &= Ax-By \\ cx+dy &= Ay+Bx \end{aligned}\right\} \forall\, x,y \in \mathbb{R}$$

Για $x=1$ και $y=0$ έχω: $\left.\begin{aligned} a&=A \\ c&=B \end{aligned}\right\}$

Για $x=0$ και $y=1$ έχω: $\left.\begin{aligned} b&=-B \\ d&=A \end{aligned}\right\}$

Έτσι $a=d=A$ και $b=-c=-B$.

και έτσι: $A+iB = a+ic = d-ib$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι $a=d$ και $b=-c$

Τότε ορίζω τον μιγαδικό

$A+iB = a+ic$ και με πράξεις έχω:

$\forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax-cy \\ cx+ay \end{pmatrix} \quad \text{και}$$

$$(a+ic)(x+iy) = (ax-cy)+i(ay+cx) = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Παρατήρηση

i) Αν $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$, η απεικόνιση $\varphi: \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ είναι $\mathbb{F}$-γραμμική ανν $\exists\, a \in \mathbb{F} : \varphi(x) = ax \ \forall x \in \mathbb{F}$

ii) Το λήμμα μας λέει μια $\mathbb{R}$-γραμμική απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^2$ = $\mathbb{R}$-γραμμικός χώρος) είναι $\mathbb{C}$-γραμμική ($f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$) ($\mathbb{C}$ = $\mathbb{C}$-γρ. χώρος) ανν η f είναι της μορφής : $\exists\, a \in \mathbb{C} : F(z) = az,\ z \in \mathbb{C}$

Τυπικό Παράδειγμα $\mathbb{R}$-γραμμικής απεικόνισης $\mathbb{F}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που δεν είναι $\mathbb{C}$-γραμμική είναι η $F(x,y) = (x,-y)$ δηλαδή η $F(z) = \bar{z},\ z \in \mathbb{C}$

Πράγματι ο πίνακας της F είναι ο $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ που δεν έχει "σωστή" μορφή $(1 \neq -1)$.

Θεώρημα (Εξισώσεις Cauchy-Riemann)

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ($f = u + iv$)

ΤΑΕΙ:

i) Η f έχει μιγαδική παράγωγο στο a

ii) Η f έχει διαφορικό στο a (ισοδύναμα οι u,v έχουν διαφορικό στο a) και ισχύουν στο $a \in \Omega$ οι εξισώσεις Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(a) = -\frac{\partial v}{\partial x}(a)$$

Τότε ισχύει: $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) \left(= \frac{\partial f}{\partial x}(a) \right)$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a) \overset{(*)}{=} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}(a) \right)$$

(*) $= \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(a) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(a)\right)$

Αποδ.

Αν η $f'(a)$ υπάρχει, τότε (Ν.δ.ο.) $\exists$ οι μερικοί παράγωγοι των u και v και ισχύουν οι εξισώσεις C-R

Έστω ότι $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$

Έχουμε ότι: $f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} =$

$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{(u(a+h)-u(a)) + i\,(v(a+h)-v(a))}{h} =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(a) \quad \text{και} \quad f'(a) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{(u(a+ih)-u(a))}{ih} \ldots + \frac{i\,(v(a+ih)-v(a))}{ih}$$

$$= \frac{1}{i} \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{(u(a+ih)-u(a)) + i\,(v(a+ih)-v(a))}{h}$$

$$= \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}(a) + i\,\frac{\partial v}{\partial y}(a)\right) =$$

$$= \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(a)$$

Έπεται ότι $\frac{\partial u}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a)$ και $\frac{\partial v}{\partial x}(a) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a)$

Έτσι $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a) = \frac{\partial v}{\partial y}(a) - i\frac{\partial u}{\partial y}(a)$

"$\Rightarrow$" Η ύπαρξη της $f'(a)$ ισοδυναμεί με:
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0 : \forall\ z \in \Omega$
$0 < |z-a| < \delta \Rightarrow \frac{|f(z)-f(a)-f'(a)(z-a)|}{|z-a|} < \varepsilon$

Θέτω $T_a : \mathbb{C}=\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ με $T_a(z) = f'(a)\cdot z$.
Τότε έχω:
$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \delta>0 : \forall\ z\in\Omega\quad 0<|z-a|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{|f(z)-f(a)-T_a(z-a)|}{|z-a|} < \varepsilon$.

Από τον ορισμό της $\mathbb{R}$-διαφορισιμότητας έχουμε ότι $\exists$ το $(Df)_a \overset{\text{και}}{=} T_a$ δηλ.
$(Df)_a(z) = f'(a)z$ ($\mathbb{C}$ - γραμμική $\Rightarrow \mathbb{R}$-γραμμική)

"$\Leftarrow$" Έστω ότι η f είναι διαφορίσιμη στο a και ότι οι u,v ικανοποιούν τις εξισώσεις Cauchy-Riemann. Θδο. $\exists$ η $f'(a)$

Από τον ορσ. της διαφορισιμότητας, $\forall\ \varepsilon>0$
$\exists\ \delta>0 :\ z\in\Omega$ και $0<|z-a|<\delta \Rightarrow$
$\Rightarrow \frac{|f(z)-f(a)-(Df)_{(a)}(z-a)|}{|z-a|} < \varepsilon$

Όμως $\forall\ (x,y)\in\mathbb{R}^2$:
$$(Df)(a)\,(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(a) & \frac{\partial u}{\partial y}(a) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(a) & \frac{\partial v}{\partial y}(a) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = J_{f(a)}\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}$$

Επειδή ισχύουν οι εξισώσεις Cauchy-Riemann από το λήμμα (αρχή του μαθήματος) ο $J_{f(a)}$

αναπαριστά πολ/μο με το σταθερό μιγαδικό
$A+iB = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a)$ δηλ. $(Df)_{(a)}(x,y) = J_{f(a)}\binom{x}{y} =$

$= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a)\right)\underbrace{(x+iy)}_{z}$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$.

Άρα $\exists$ η $f'(a)$ και είναι $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(a) + i\frac{\partial v}{\partial x}(a)$.

Πόρισμα Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνάρτηση ($f = u+iv$) και $a \in \Omega$. Υποθέτουμε ότι:

α) Οι μερικές παράγωγοι των u και v $\exists$ σε μια περιοχή U του a και είναι συνεχείς στο a, και

β) Η f ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στο a

Τότε η f έχει στο a μιγαδική παράγωγο

Έπεται ότι αν η f είναι C^1 στο Ω και ικανοποιεί τις εξισώσεις C-R στο Ω, τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω.

Αποδ (α) $\xRightarrow{\text{Απ.3}}$ Οι u,v έχουν διαφορικό στο a
$\Rightarrow$ η f έχει διαφορικό στο a και μαζί με την ισχύ των Εξ. C-R στο a, έχω ότι η f έχει μιγαδική παράγωγο στο a.

Παραδείγματα

① Μια συνάρτηση ενδέχεται να ικανοποιεί τις εξισώσεις C-R σε ένα σημείο, χωρίς να έχει μιγαδ. παράγωγο στο σημείο αυτό.

(ΠΑ) Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \begin{cases} 1, & \text{αν } z = x+iy \text{ με } x \neq 0, y \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x=0 \text{ ή } y=0 \end{cases}$

δηλ. $f = \chi_V$, η χαρακτηριστική συνάρτηση του ανοικτού συνόλου $V = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \neq 0 \text{ και } \operatorname{Im} z \neq 0\}$

Γράφουμε $f = u + iv$ και παρατηρούμε ότι $u = f$ και $v = 0$. Τότε έχω:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{\overset{f}{u(x,0)} - \overset{f}{u(0,0)}}{x-0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{0-0}{x} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) =$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{u(0,y) - u(0,0)}{y-0} = \lim_{y \to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

και $\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ στο $\mathbb{C}$.

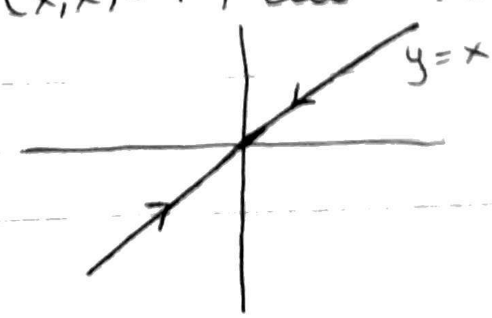
Άρα $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ $(=0)$ και:

$\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{(0,0)}$ $(=0)$ $\Rightarrow$ ισχύουν στο 0 οι C-R

<u>Ισχυρισμός</u>

Η f <u>δεν</u> <u>είναι</u> <u>συνεχής</u> στο $(0,0) \Rightarrow$ η f δεν έχει στο $(0,0)=0$ μιγ. παράγωγο.

Πράγματι $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x) = 1$, ενώ $f(0,0) = 0 \neq 1$



② Η απεικόνιση $f(z)=\bar{z}$, $z\in\mathbb{C}$ αν και είναι $\mathbb{R}$-γραμμική, δεν ικανοποιεί τις εξ. C-R

$\left(f(\overset{\in\mathbb{R}}{\lambda}\overset{\in\mathbb{C}}{z}) = \overline{\lambda z} = \bar{\lambda}\cdot\bar{z} \underset{\lambda\in\mathbb{R}}{=} \lambda\bar{z} = \lambda f(z)\right)$ σε κανένα σημείο του $\mathbb{C}$

Πράγματι $f(x,y) = (x,-y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

και $u(x,y)=x$, $v(x,y)=-y$ και $\dfrac{\partial u}{\partial x}=1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$,

$\dfrac{\partial v}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}=-1$ $\Rightarrow u_x \neq v_y$ στο $\mathbb{C}$.

Άρα η f δεν έχει μιγ. παράγωγο πουθενά στο $\mathbb{C}$ (αφού δεν είναι $\mathbb{C}$-γραμμική δηλ. δεν ικανοποιεί τις εξισώσεις C-R).