7/11/2022

Μάθημα 13ο

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Παραδείγματα

① Έστω $u(x,y) = ax + by + \gamma$, όπου $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$ πολυώνυμο πρώτου βαθμού των πραγματικών μεταβλητών x και y. Αποδείξτε ότι η u είναι το πραγματικό μέρος(*) μιας ολόμορφης συνάρτησης f. Να υπολογιστεί η f.

Λύση

Έστω $f = u + iv$ ολόμορφη συνάρτηση στο $\mathbb{C}$ με $\operatorname{Re} f = u$. Από τις εξισώσεις Cauchy-Riemann έχουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \iff$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = a \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -b$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -b \overset{\int dx}{\Longrightarrow} v(x,y) = -bx + c(y)$$

Αλλά $\frac{\partial v}{\partial y} = a \Rightarrow c'(y) = a \Rightarrow c(y) = ay + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}$

Έτσι $v(x,y) = ay - bx + c_1$

Συνεπώς η ζητούμενη συνάρτηση f είναι η

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= u(x,y) + i v(x,y) = \\ &= ax + by + \gamma + iay - ibx + ic_1 = \\ &= (ax+by) + i(ay - bx) + \gamma + ic_1 = \\ &= \underbrace{(a-ib)}_{A}\underbrace{(x+iy)}_{z} + \gamma + ic_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R}) \\ &= Az + \Gamma, \text{ όπου } A = a - ib,\ z = x + iy \end{aligned}$$

Δηλ. η f είναι μιγαδικό πρωτοβάθμιο πολυώνυμο του z. $\quad \Gamma = \gamma + ic_1$

Σημείωση: Το προηγούμενο αποτέλεσμα δεν ισχύει γενικά $\forall$ πολυώνυμο $u(x,y)$ (των πραγμ. μεταβλητών με πραγμ. συντελεστές)

(*) Βγαίνει από το τέλος γυρίζοντας προς τα πίσω.

Πράγματι η συνάρτηση $u(x,y)=x^2+y^2$ δεν είναι αρμονική όπως και η $u(x,y)=x^2$

(2) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $u(x,y)=2x(1-y)$ είναι αρμονική σε κάποιο τόπο $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και βρείτε την αρμονική συζυγή της.

Λύση

Παρατηρούμε ότι η u είναι αρμονική στο $\Omega=\mathbb{R}^2$

Πράγματι $\frac{\partial u}{\partial x}=2(1-y)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-2x$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

Άρα $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0+0=0$ $u\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ως πολυώνυμο των x και y

άρα είναι αρμονική

(Παρατήρηση: Δεν ισχύει ότι κάθε πολυώνυμο $P(x,y)\in\mathbb{R}[x,y]$ είναι και πολυώνυμο του z.

π.χ. $P(x,y)=x^2+y^2=z\bar{z}\neq$ πολυώνυμο του z)

Για να βρούμε την αρμονική συζυγή της u, έστω v, χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις Cauchy-Riemann

Έχουμε $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ και $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ $(\Leftrightarrow)$

$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=2(1-y)$ και $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=2x$

$\overset{\int dx}{\Longrightarrow} v(x,y)=\int v(x,y)\,dx = x^2+c(y)$

Όμως $\frac{\partial v}{\partial y}=2(1-y)\Rightarrow c'(y)=2-2y\Rightarrow c(y)=2y-y^2+c$, $c\in\mathbb{R}$

Άρα η $v(x,y)=x^2+2y-y^2+c$ είναι η αρμονική συζυγής της u. Μάλιστα η ολόμορφη συνάρτηση f με $\mathrm{Re}f=u$ και $\mathrm{Im}f=v$ είναι η:

$f(\underset{x+iy}{z})=u(x,y)+iv(x,y)=2x(1-y)+i(x^2+2y-y^2+c)=$

$=\sim$

$= 2x - 2xy + ix^2 + 2iy - iy^2 + ic =$

$= (ix^2 - iy^2 + i^2 2xy) + 2x + 2iy + ic =$

$= i(x^2 - y^2 + 2xyi) + 2(x+iy) + ic =$

$= i(x+iy)^2 + 2(x+iy) + ic = iz^2 + 2z + ic$, $z = x+iy \in \mathbb{C}$

(3) Μια αρμονική συνάρτηση u ορισμένη σε ένα τόπο $\underline{\Omega}$ του $\mathbb{R}^2$ δεν έχει υποχρεωτικά αρμονική συζυγή (δηλ. u δεν είναι υποχρεωτικά το $\operatorname{Re} f$ κάποιας ολόμορφης $f : \Omega \to \mathbb{C}$)

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι η $u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$
$(x,y) \in \underline{\Omega} = \mathbb{C}\setminus\{0\}$

Η u είναι πράγματι αρμονική στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ αφού

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}}\,\cancel{2}x = \frac{x}{x^2+y^2}$$ και

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{(x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad , \quad (x,y) \in \underline{\Omega} = \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Όμοια $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $(x,y) \in \underline{\Omega}$

Επομένως $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ στο $\underline{\Omega}$ $\Rightarrow$ u αρμονική στο $\underline{\Omega}$.

Όμως θα δούμε παρακάτω ότι η u δεν έχει αρμονική συζυγή στο $\underline{\Omega} = \mathbb{C}\setminus\{0\}$

Όμως η u έχει αρμονική συζυγή στον τόπο $D = \mathbb{C}\setminus\{(x,0) : x \leq 0\}$ όπως σε κάθε κυρτό ή γενικότερα αστρόμορφο τόπο

S αστρόμορφος

Κεφάλαιο 3

Ορισμός 3.1 Έστω (a_n) ακολουθία μιγαδικών αριθμών (θα γράφουμε $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$). Θέτουμε $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, $n \geq 1$. Η (S_n) λέγεται ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της (a_n) ή σειρά με γενικό όρο a_n και συμβολίζεται με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Θα λέμε ότι η σειρά των $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, αν η ακολουθία (S_n) είναι συγκλίνουσα στο $\mathbb{C}$. Στην περίπτωση αυτή, το όριο S της (S_n) το λέμε άθροισμα της σειράς και το συμβολίζουμε (επίσης) με $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
Γράφουμε δηλαδή $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Βασικές Ιδιότητες Σειρών Μιγαδικών Αριθμών

① Αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει, τότε $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(Το αντίστροφο δεν ισχύει π.χ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$)

② Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ τότε και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n)$ συγκλίνει και $\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \mu \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

③ Αν $a_n = x_n + i y_n$, $n \geq 1$ ($(x_n), (y_n) \subseteq \mathbb{R}$) τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ συγκλίνουν. Τότε ισχύει: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + i \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

Ορισμός Θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ συγκλίνει.

Πρόταση: Αν η σειρά μιγαδική $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα τότε είναι και συγκλίνουσα και ισχύει ότι: $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

Το αντίστροφο δεν ισχύει. πχ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ συγκλίνει (κριτήριο Leibnitz) αλλά δεν συγκλίνει απόλυτα

limsup και liminf ακολουθιών πραγματικών αριθμών

Παρατηρούμε ότι αν $A \neq \emptyset \subseteq \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = [-\infty, +\infty]$ τότε τα $\sup A$ και $\inf A$ υπάρχουν.

Πράγματι (επεκτείναμε τη διάταξη του $\mathbb{R}$ στο $\overline{\mathbb{R}}$ θέτοντας $-\infty < x < +\infty$ $\forall x \in \mathbb{R}$) αν $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ και το A είναι άνω φραγμένο τότε από την αρχή της πληρότητας, $\exists$ το $\sup A$ και είναι πραγμ. αριθμός. Αν το A δεν είναι άνω φραγμένο τότε θέτουμε $\sup A = +\infty$.

Ανάλογα ισχύουν και για ένα κάτω φραγμένο (ή όχι κάτω φραγμένο) $\subseteq \mathbb{R}$.

Ορισμός: Έστω (a_n) ακολουθία στο $\mathbb{R}$.
Θέτουμε $A = \{t \in \overline{\mathbb{R}} : \exists$ υπακολουθία (a_{k_n}) της (a_n) με $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = t\}$

Από το Θ. Bolzano-Weierstrass προκύπτει ότι το $A \neq \emptyset$.
Ορίζουμε ως ανώτερο όριο της (a_n) το $\sup A$, δηλ. θέτουμε $\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup A$

Ανάλογα ορίζουμε θέτοντας $\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf A$, το κατώτερο όριο της (a_n)

Παρατήρηση: (Ιδιότητες limsup και liminf)

1. $-\infty \leq \liminf a_n \leq \limsup a_n \leq +\infty$, όπου $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$

2. Η $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ είναι συγκλίνουσα στο $\overline{\mathbb{R}} \Leftrightarrow \liminf a_n = \limsup a_n$

(3) Αν $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ με $a_n \leq b_n$ $\forall n \geq 1$, τότε $\liminf a_n \leq \liminf b_n$, $\limsup a_n \leq \limsup b_n$ και
$\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$

(4) Αν $(a_n), (b_n) \subseteq \mathbb{R}$ με $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ και $b_n \to b > 0$, τότε $\limsup(a_n \cdot b_n) = b \limsup a_n$

(5) Το $\limsup$ μιας (άνω φραγμένης) ακολουθίας $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ χαρακτηρίζεται ως εξής:

Έστω $a \in \mathbb{R}$ τότε $a = \limsup a_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} : a_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\}$ είναι άπειρο και το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} ; a_n \geq a+\varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο.

Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $a_n \geq 0$ $\forall n \geq 1$ τότε η ακολουθία $\sigma_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ της (a_n) είναι αύξουσα και άρα είτε συγκλίνει (αν (σ_n) άνω φραγμένη) ή απειρίζεται θετικά (αν (σ_n) όχι άνω φραγμένη).

Στην πρώτη περίπτωση γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ και στη δεύτερη $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

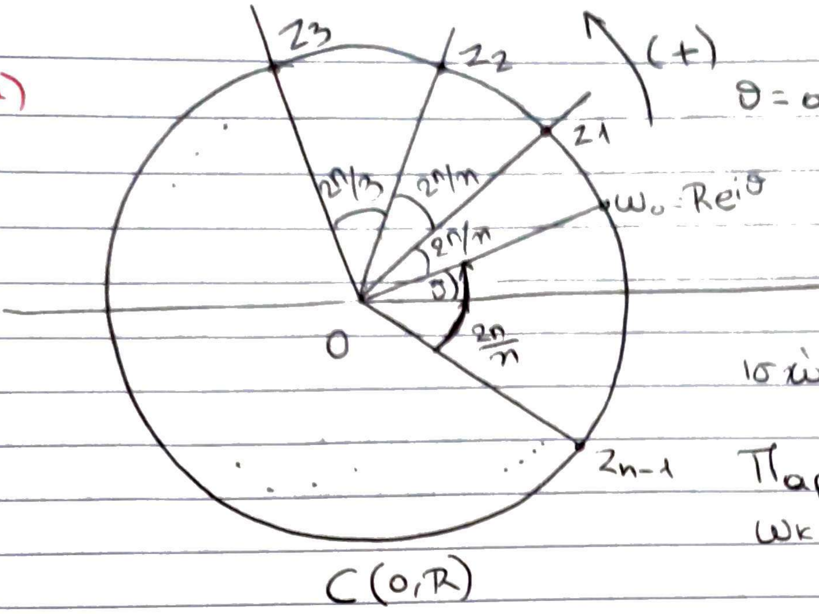
3η ώρα Ασκήσεων

Κεφ. 1

(9) Έστω $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ οι διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού n-γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο $C(a, R)$ ($a \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $n \geq 2$)
Αποδείξτε ότι a) Αν $a = 0$ τότε οι κορυφές του n-γώνου συμπίπτουν με τις n-οστές ρίζες κατάλληλου μιγαδικού αριθμού και συμπεράνατε ότι $w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = 0$.

β) Στην περίπτωση $a \neq 0$, υπολογίστε το $w_0 + w_1 + \dots w_{n-1}$

α)



$\theta = \arg(z)$

Οπότε αν $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ είναι οι κορυφές του n-γώνου τότε $\forall k \in \{0,1,2,\dots,n-1\}$ ισχύει $w_k = w_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}}$

Παρατηρούμε ότι $\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\}$

$$w_k = Re^{i\theta} e^{i\frac{2k\pi}{n}} =$$

$$= Re^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{\pi}\right)}$$

και έτσι $\forall$ ~~...~~ $k = 0,1,\dots,n-1$ είναι

$$w_k^n = \left(Re^{i\frac{n\theta+2k\pi}{n}}\right)^n = R^n e^{\frac{i(n\theta+2k\pi)}{n}\cdot n} = R^n e^{i(n\theta+2k\pi)} =$$

$$= R^n e^{in\theta}\cdot \underbrace{e^{2k\pi i}}_{1} = R^n \cdot e^{in\theta} = (R\cdot e^{i\theta})^n = w_0^n$$

$\Longrightarrow \forall k = 0,1,\dots,n-1$ είναι $w_k^n = w_0^n = w \Rightarrow$

Οι n-οστές ρίζες του μιγαδικού w είναι ακριβώς τα $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$.

Έχω $w_0 + w_1 + \dots + w_{n-1} = Re^{i\theta} + Re^{i\theta}e^{\frac{2\pi i}{n}} + \dots + Re^{i\theta}e^{\frac{2\pi(n-1)i}{n}} =$

$$= Re^{i\theta}\left(1 + e^{\frac{2\pi i}{n}} + e^{\left(\frac{2\pi i}{n}\cdot 2\right)} + \dots + e^{\frac{2\pi i(n-1)}{n}}\right) =$$

$$= R\cdot e^{i\theta}\left(1 + e^{\frac{2\pi i}{n}} + \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^2 + \dots + \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= R\cdot e^{i\theta}\,\frac{1-\left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n}{1-e^{\frac{2\pi i}{n}}} = R\cdot e^{i\theta}\,\frac{(1-e^{2\pi i})}{1-e^{\frac{2\pi i}{n}}} =$$

$$= R\cdot e^{i\theta}\,\frac{1-1}{1-e^{\frac{2\pi i}{n}}} = 0$$

β) $w_0, w_1, \dots, w_{n-1} \in C(a,R) \Rightarrow$
$w_0 - a, w_1 - a, \dots, w_{n-1} - a \in C(0,R)$
Όμως τα $w_0 - a, w_1 - a, \dots, w_{n-1} - a$ είναι κορυφές κανονικού

n-γώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο $C(0,R) \Rightarrow$

$\Rightarrow (w_0 - a) + \cdots + (w_{n-1} - a) = 0 \Rightarrow$

$w_0 + w_1 + \cdots + \underbrace{w_{n-1}}_{} - na = 0 \Rightarrow w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1} = na$

(10) Έστω $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ οι n-οστές ρίζες της μονάδας $(n \geq 2)$. Μελετήστε ως προς τη σύγκλιση την ακολουθία

$(z_1^m)_{m \geq 1} \quad (z_1 = e^{\frac{2\pi i}{n}})$

Για $m \geq 1$ έχω $z_1^m = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^m = e^{\frac{2\pi m i}{n}}$

Αν $m = \lambda \cdot n + u$, $u \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ τότε

$z_1^m = e^{\frac{2\pi m i}{n}} = e^{2\pi \frac{(\lambda n + u) i}{n}} = \underbrace{e^{2\pi \lambda i}}_{1} e^{\frac{2\pi i u}{n}} = e^{\frac{2\pi u i}{n}}$

$\Rightarrow \forall m \in \mathbb{N} \quad z_1^m = e^{\frac{2\pi i m}{n}} \in \{ e^{\frac{2\pi i u}{n}}, u \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \} =$

$=$ οι n-οστές ρίζες της μονάδας

Αν $m = nk$ τότε $\underset{z_1^{nk}}{z_1^m} = e^{2\pi k i} = 1 \xrightarrow{k \to \infty} 1$

Αν $m = nk+1$ τότε $\underset{z_1^{nk+1}}{z_1^m} = e^{\frac{2\pi i}{n}} \xrightarrow[k \to \infty]{} e^{\frac{2\pi i}{n}}$

$\vdots$

Αν $m = nk + (n-1)$ τότε $z_1^m = z_1^{nk+(n-1)} = e^{\frac{2\pi i (n-1)}{n}} \xrightarrow[k \to \infty]{} e^{\frac{2\pi i (n-1)}{n}}$

Άρα η ακολουθία $(z_1^m)_{m \geq 1}$ δεν συγκλίνει και μάλιστα έχει ως το πλήθος οριακά σημεία, τις n-οστές ρίζες της μονάδας.

Κεφ. 2

(5) α) Αν $z = x + iy$, έστω $f(z) = \dfrac{(1+i)x^3 - (1-i)y^3}{x^2 + y^2}$, $z \neq 0$ και $f(0) = 0$

Αποδ. ότι η f είναι συνεχής στο 0 και ότι οι εξ. C-R

$\rightsquigarrow$

ικανοποιούνται εκεί αλλά $\nexists$ η $f'(0)$. Αντιφατικό αυτό με το Θεώρημα χαρακτηρισμού ~~του~~ της μιγ. παραγώγισης μέσω C-R;

Για $z \neq 0$

$$f(z) = \frac{(1+i)x^3 - (1-i)y^3}{x^2+y^2} = \frac{(x^3-y^3)+i(x^3+y^3)}{x^2+y^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}_{v(x,y)}$$

Εξετάζω τα όρια $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)$ και $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y)$

$$\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x} = \underline{\qquad\qquad}$$