$\boxed{\text{Μάθημα 14}}$ $\boxed{11/11/2022}$

Παρατήρηση (Από κεφ 2)

Αν $P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ τότε δεν ισχύει υποχρεωτικά ότι $\exists\, Q(z) \in \mathbb{C}[z]$ $P(x,y) = \operatorname{Re} Q(z)$

$\boxed{\text{πχ}}$

$$P(x,y) = x^2 + y^2 = z \cdot \bar{z} = \operatorname{Re} Q(z,\bar{z}) \text{ και όχι } \operatorname{Re} Q(z)$$

$\boxed{\text{Κεφ 3}}$ $\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ (Κριτήριο Σύγκρισης)

Έστω ότι $0 \le a_n \le b_n < +\infty$, για κάθε $n \ge 1$

Τότε ισχύουν:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

b) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

γ) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ τότε $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$

δ) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$ και $\exists\, \rho \in \mathbb{N} : a_\rho < b_\rho$

τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Απόδειξη

δ) Για $n \ge \rho$ έχουμε

$$(b_\rho - a_\rho) + \sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{n} b_k \le \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Άρα αφήνοντας το $n \to \infty$ λαμβάνουμε ότι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \underbrace{(b_\rho - a_\rho)}_{>0} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \le \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Παρατήρηση

a) Αν $|a_n| \le b_n$ για $n \ge N_0$, όπου N_0 θετικός ακέραιος και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνει, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα.

b) Αν $0 \le a_n \le b_n$ για $n \ge N_0$ και η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει τότε και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει.

ΟΡΙΣΜΟΣ Η Γεωμετρική Σειρά ορίζεται ως η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots$$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η γεωμετρική σειρά συγκλίνει απόλυτα για κάθε z, με $|z| < 1$ και αποκλίνει για $|z| \ge 1$

Επίσης $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, για $|z| < 1$

Απόδειξη

Έστω $z \in \mathbb{C}$ με $|z| < 1$

Θέτουμε $\sigma_n = 1 + |z| + \dots + |z|^n = \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|} \Rightarrow$

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - |z|^{n+1}}{1 - |z|} = \frac{1}{1 - |z|}$$

Άρα $\sum_{n=0}^{\infty} |z|^n = \frac{1}{1 - |z|}$, για $z < 1$ και άρα η

γεωμετρική σειρά συγκλίνει απόλυτα (άρα και απλά) για $|z| < 1$

Για το $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ Θέτουμε $S_n = 1+z+\dots+z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$, $|z|<1$

$\Rightarrow S_n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1-0}{1-z} = \frac{1}{1-z}$

Τέλος αν $|z| \geq 1$ τότε $|z|^n \geq 1 \quad \forall n \geq 1$

άρα $|z|^n \to +\infty \Rightarrow$ η $|z|^n$ δεν συγκλίνει στο μηδέν

οπότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ αποκλίνει.

$\boxed{\text{ΠΡΟΤΑΣΗ}}$ (κριτήριο Ρίζας)

Έστω $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$. Θέτουμε $a = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, τότε ισχύουν:

a) Αν $a<1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απόλυτα

b) Αν $a>1$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

Απόδειξη

a) Έστω $b \in \mathbb{R}: \ a<b<1$

Από τον χαρακτηρισμό του lim sup μιας ακολουθίας πραγματικών $\exists N_0 \in \mathbb{N} : n \geq N_0 \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq b, \ \forall n \geq N_0$

Άρα $|a_n| \leq b^n, \ \forall n \geq N_0 \Rightarrow \sum_{n=N_0}^{\infty} |a_n| \leq \sum_{n=N_0}^{\infty} b^n < +\infty$ (αφού $0<b<1$)

$\Rightarrow \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$

b) Έστω ότι $1<a$. Τότε από τον χαρακτηρισμό του $\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ το σύνολο

$M = \{n \in \mathbb{N} : \sqrt[n]{|a_n|} > 1\}$ είναι άπειρο

ώστε $|a_n| > 1, \ \forall n \in M =$ άπειρο $\Rightarrow$ η (a_n) δεν συγκλίνει στο 0 και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

ΠΡΟΤΑΣΗ (κριτηριο Λόγου)

Εστω $(a_n) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ τότε ισχυουν:

a) Αν $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει απολυτα

b) Αν $\liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, τότε η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Απόδειξη

a) Θέτουμε $a = \limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad (<1)$

και επιλέγουμε $b \in \mathbb{R} : a < b < 1$

Όπως πριν, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $n \geq N_0 \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq b$

Έπεται ότι

$$|a_{N_0+1}| \leq b|a_{N_0}|$$

$$|a_{N_0+2}| \leq b|a_{N_0+1}| \leq b^2|a_{N_0}|$$

$$\vdots$$

$$|a_{N_0+k}| \leq b^k |a_{N_0}|, \ \forall k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\xrightarrow[\sum_{k=1}^{\infty} b^k < \infty \text{ αφού } (0<b<1)]{\text{Κρ. Σύγκρισης}} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{N_0+k}| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} b^k\right)|a_{N_0}| < +\infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \text{Η } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ συγκλίνει απόλυτα}$$

b) Θέτουμε $a = \liminf \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. Τότε $a > 1$

και από τα χαρακτηριστικά του liminf μιας ακολουθίας πραγματικών, βρίσκουμε $N_0 \in \mathbb{N}$

ώστε $n \geq N_0 \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ άρα $|a_{n+1}| > |a_n| \ \forall n \geq N_0$

Έπεται ότι η (a_n) δεν συγκλίνει στο μηδέν και άρα η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει

Σημείωση

Το κριτήριο λόγου ισχύει και για μία ακολουθία $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ για την οποία $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $a_n \neq 0,\ \forall n \geq N_0$

Παραδείγματα

a) Αν $w \in \mathbb{C}$ με $|w| \leq 1$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^n}{n^2}$ συγκλίνει απόλυτα, αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{w^n}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|w|^n}{n^2} \underset{|w|\leq 1}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

b) Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+i}$ συγκλίνει αλλά όχι απόλυτα

Πράγματι, αν $a_n = \frac{(-1)^n}{n+i}$ τότε $a_n = \frac{(-1)^n (n-i)}{(n+i)(n-i)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a_n = \frac{(-1)^n (n-i)}{n^2+1} = \frac{(-1)^n \cdot n}{n^2+1} - i\,(-1)^n \cdot \frac{1}{n^2+1}$$

Επειδή οι ακολουθίες $\frac{n}{n^2+1}$ και $\frac{1}{n^2+1}$ είναι φθίνουσες και μηδενικές, από κριτήριο Leibnitz

έχουμε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n}{n^2+1}$, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2+1}$ συγκλίνουν.

και άρα η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει επίσης.

Επειδή $|a_n| = \frac{1}{|n+i|} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} \geq \frac{1}{n+1}\quad \forall n \geq 1$

Έπεται ότι η $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = +\infty$, δηλαδή η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ δεν συγκλίνει απόλυτα

Ακολουθίες και σειρές μιγαδικών συναρτήσεων

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω X σύνολο $(\neq \emptyset)$, $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$ ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων και $f : X \to \mathbb{C}$ συνάρτηση

a) Λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο στην f επί του X αν και μόνο αν $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$, $x \in X$

Ισοδύναμα $\forall \varepsilon > 0$, $\forall x \in X$

$$\exists N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : n \geq N(\varepsilon, x) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

b) Λέμε ότι η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X αν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$$n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \ \forall x \in X$$

Ισοδύναμα αν και μόνο αν $\|f_n(x) - f(x)\|_\infty \to 0$

όπου αν $g : X \to \mathbb{C}$ συνάρτηση τότε

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in X} |g(x)|$$

Παρατηρούμε τα ακόλουθα

1) Αν $X \subseteq \mathbb{C}$ (ή γενικότερα αν X μετρικός χώρος) και $f_n : X \to \mathbb{C}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα επί του X, τότε η f είναι συνεχής συνάρτηση.

2) Μια ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X σε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ αν και μόνο αν η ακολουθία (f_n) είναι ομοιόμορφα Cauchy δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ αν $n > m \geq N(\varepsilon)$ τότε $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$

Είναι προφανές ότι αν η $f_n \to f$ ομοιόμορφα επί του X, τότε η $f_n \to f$ κατά σημείο επί του X

Το αντίστροφο δεν ισχύει

$\boxed{\text{π.χ}}$

Η ακολουθία $f_n(z) = z^n$, $n \geq 1$, $|z|<1$

συγκλίνει κατά σημείο (κ.σ.) στο 0 ($f_n(z) = z^n \xrightarrow{\text{κ.σ}} 0$, για $|z|<1$)

όμως η σύγκλιση δεν είναι ομοιόμορφη στον $\Delta(0,1)$

Πράγματι $\sup\limits_{z\in\Delta(0,1)} |z^n - 0| = \sup\limits_{|z|<1} |z|^n = 1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f_n \underset{\text{ομοιόμορφα}}{\not\to} f \equiv 0$

$\boxed{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$

Έστω X σύνολο και $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$ ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων.

Η ακολουθία συναρτήσεων $S_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$, $n \geq 1$ ονομάζεται σειρά συναρτήσεων γενικού όρου f_n και συμβολίζεται $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$

a) Λέμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει κατά σημείο επί του X σε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ αν $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $\forall x \in X$, δηλαδή αν $S_n(x) \to f(x)$, $\forall x \in X$

b) Λέμε ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X στην $f : X \to \mathbb{C}$, αν η (S_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f, δηλαδή $\|S_n - f\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Παρατηρήσεις

1) Αν $f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει κατά σημείο επί του X τότε $f_n \longrightarrow 0$ κατά σημείο επί του X.

2) Αν $f=\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X τότε $f_n \longrightarrow 0$ ομοιόμορφα επί του X

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κριτήριο Weierstrass) (M-test)

Έστω X τυχόν σύνολο και $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$ ακολουθία συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty$, όπου $\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in X} |f_n(x)|$

Τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X σε μια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$