ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

14/11/2022
15ο Μάθημα

Θεώρημα (Κριτήριο Weierstrass)

Έστω X τυχόν σύνολο και $f_n : X \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$ ακολουθία συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_\infty < +\infty \quad , \text{ όπου } \quad \|f_n\|_\infty = \sup_{x \in X} |f_n(x)|$$

Τότε η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του X σε κάποια συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$

Αποδ. Θέτουμε $s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$, $n \geq 1$

Θα δ.ο. η (s_n) είναι ομοιόμορφα Cauchy δηλ. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ N_0 \in \mathbb{N} : n > m > N_0 \Rightarrow \|s_n - s_m\|_\infty < \varepsilon$

Έστω $\varepsilon > 0$. Επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < +\infty$ $\exists$ $N_0 = N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ $: n > m \geq N_0 \Rightarrow \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\| < \varepsilon$

(από κριτήριο Cauchy για ακολουθίες στο $\mathbb{R}$)

Αν $n > m \geq N_0$ και $x \in X$ τότε $|s_n(x) - s_m(x)| =$

$$= |f_{m+1}(x) + \dots + f_n(x)| \leq$$
$$\leq |f_{m+1}(x)| + \dots + |f_n(x)| \leq$$
$$\leq \|f_{m+1}\| + \dots + \|f_n\| = \sum_{k=m+1}^{n} \|f_k\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \|s_n - s_m\| < \varepsilon \quad \forall \ n > m \geq N_0$$

Συνεπώς η (s_n) είναι ομοιόμορφα Cauchy και άρα $\exists$ συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ ώστε

$$f = \sum_{n=1} f_n \text{ ομοιόμορφη επί του } X.$$

Παράδειγμα

Η σειρά συναρτήσεων $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{z^n}{\sqrt{n}}}_{f_n(z)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα επί του δίσκου $\overline{\Delta(0,r)}$ αν $0 < r < 1$

Πράγματι, αν $|z| \leq r$, τότε $\left|\frac{z^n}{\sqrt{n}}\right| = \frac{|z|^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{r^n}{\sqrt{n}} \leq r^n$

και επειδή $\sum_{n=1}^{\infty} r^n < +\infty$ από το κριτήριο Weierstrass έπεται το συμπέρασμα.

Δυναμοσειρές

<u>Ορισμός:</u> Έστω $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ ακολουθία μιγ. αριθμών και $a \in \mathbb{C}$. Τότε η $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n =$

$$= a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots + a_n(z-a)^n + \dots \quad (1)$$

λέγεται <u>δυναμοσειρά</u> κέντρου a με συντελεστές $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

- Παρατηρούμε ότι η (1) είναι σειρά συναρτήσεων δηλ. σειρά των (πολυωνυμικών) συντελεστών
$$\mathbb{C} \ni z \longmapsto a_n(z-a)^n \in \mathbb{C}$$
- Προφανώς μια δυναμοσειρά συγκλίνει πάντα για $z=a$, δηλ. στο κέντρο της.
- Μας ενδιαφέρει για ποια $z \neq a$ συγκλίνει η (1) και ακόμα αν θέσουμε $A = \{ z \in \mathbb{C} : \text{η } \sum_{m=0}^{\infty} a_m(z-a)^m \text{ συγκλ.} \}$ τότε ποιά είναι η συνάρτηση:
$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n, \quad z \in A \quad \text{και}$$
τι ιδιότητες έχει.

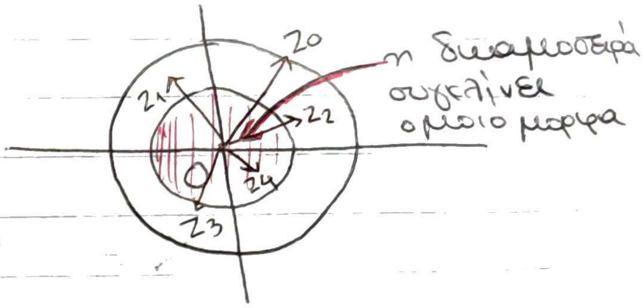
<u>Παρατήρηση</u>

Η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ συγκλίνει: $z \neq a$ αν η δυναμοσειρά (κέντρου 0) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ συγκλ. για $w = z-a \neq 0$.

Έτσι αν θέσουμε $B = \{ w \in \mathbb{C} : \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n \text{ συγκλίνει} \}$ και $A = \{ z \in \mathbb{C} : \text{η } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n \text{ συγκλίνει} \}$ τότε $A = a + B$

Η απλούστερη δυναμοσειρά είναι η γεωμετρική σειρά που παράγεται από την σταθερή ακολουθία $a_n = 1, n \geq 1$ και το μιγαδικό $a = 0$.

Λήμμα (Abel)



Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δυναμοσειρά και $z_0 \in \mathbb{C}$: η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ να συγκλίνει, τότε ισχύουν:

α) η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα για $|z| < |z_0|$ και

β) η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(0,r)}$ $\forall$ $r: 0 \leq r < |z_0|$

Αποδ.

Η ακολουθία $(a_n z_0^n)$ είναι μηδενική άρα είναι φραγμένη.

Έστω $M > 0$: $|a_n z_0^n| \leq M$, $\forall$ $n \geq 0$

α) Έστω $z \in \Delta(0, |z_0|) \Leftrightarrow |z| < |z_0|$

Παρατηρούμε ότι $a_n z^n = (a_n z_0^n)\left(\frac{z}{z_0}\right)^n$, $n \geq 0$

Άρα $|a_n z^n| \leq M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$, $n \geq 0$ ⊗

Όμως $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$ άρα η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ συγκλίνει.

Από το κριτήριο σύγκρισης και την ⊗ έπεται ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n| < +\infty$, δηλ. η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απόλυτα.

β) Έστω $0 < r < |z_0|$

Αν $|z| \leq r$ τότε όπως πριν έχουμε:

$$|a_n z^n| \leq M\left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leq M\left|\frac{r}{z_0}\right|^n, \; n \geq 0$$

και βέβαια η γεωμετρική $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{|z_0|}\right)^n$ συγκλίνει αφού $0 < \frac{r}{|z_0|} < 1$

Από το κριτήριο Weierstrass ~~έχουμε~~ έπεται ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο δίσκο $\overline{\Delta(0,r)}$

Ορισμός: Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά.
Ορίζουμε ως **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς
τη μη αρνητική ποσότητα
$$R \overset{\text{ορσ}}{=} \sup\{ r \geq 0 : \exists\ z_0 \in \mathbb{C} \text{ με } |z_0 - a| = r \text{ ώστε η σειρά } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_0 - a)^n \text{ να συγκλίνει}\}$$
Προφανώς $0 \leq R \leq +\infty$

Θεώρημα (Cauchy-Hadamard)
Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R > 0$. Τότε ισχύουν:

α) Η δυναμοσειρά συγκλίνει απόλυτα σε κάθε σημείο του ανοικτού δίσκου $\Delta(a, R)$

β) Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(a, r)}$ $\forall\ 0 < r < R$.

γ) Η δυναμοσειρά αποκλίνει για $z \in \mathbb{C}$ με $|z-a| > R$.

δ) $R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$, όπου $\dfrac{1}{0} = +\infty$ και $\dfrac{1}{+\infty} = 0$

Για $|z-a| = R$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Αποδ. Υποθέτω χ.β.τ.γ. ότι $a = 0$

α) Έστω $z \in \Delta(0, R) \Leftrightarrow |z| < R$.
Από τον ορισμό του R $\exists\ z_0 \in \mathbb{C} : |z| < |z_0| \leq R$ και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ συγκλίνει. Από το λήμμα του Abel έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απόλυτα (διότι $|z| < |z_0|$)

β) Έστω $r : 0 < r < R$, τότε (όπως πριν) $\exists\ z_0 \in \mathbb{C}$ ώστε $r < |z_0| \leq R$ και η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$ να συγκλίνει.
Πάλι από το λήμμα του Abel, έχουμε ότι η

δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στον κλειστό δίσκο $\overline{\Delta(0,r)}$

γ) Αν $|z|>R$ τότε από τον ορισμό του R έχω ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αποκλίνει

δ) Θέτουμε $a=\limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ και έχουμε ότι:

i) Αν $|z|<\frac{1}{a}$ τότε $\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} =$
$= |z| a < 1$ οπότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει απόλυτα (κριτήριο ρίζας)

ii) Αν $|z|>\frac{1}{a}$ τότε:
$\limsup \sqrt[n]{|a_n z^n|} = |z| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |z| a > 1$
$\Rightarrow$ Από κριτήριο ρίζας η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ αποκλίνει
Από τα παραπάνω έπεται ότι $R=\frac{1}{a}$ αναγκαία

Παρατήρηση:

1) Παρατηρούμε ότι οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης ($\forall\, a \in \mathbb{C}$) η οποία ισούται με $R=\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$ και ακόμα ότι οι δίσκοι σύγκλισης συνδέονται ως εξής: $\underbrace{\Delta(a,R)}_{A} = a + \underbrace{\Delta(0,R)}_{B}$

2) Έστω $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C}$ και $k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$ γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών ακεραίων. Αποδεικνύεται ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^{k_n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης που δίνεται από τον τύπο $R=\frac{1}{\limsup \sqrt[k_n]{|a_n|}}$

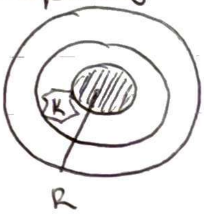
(Οι συντελεστές είναι $b_m = \begin{cases} 0, & m \neq k_n \ \forall n \in \mathbb{N} \\ a_n, & \text{αν } m = k_n \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\sqrt[m]{|b_m|} = \begin{cases} 0, & m \neq k_n \ \forall n \\ \sqrt[m]{|a_n|} = \sqrt[k_n]{|a_n|}, & m = k_n \end{cases} \Rightarrow \limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|b_m|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{|a_n|}$)

$b_m = b_{k_n} = a_n$

3) Λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων $(f_n : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C})_{n \geq 1}$ <u>συγκλίνει ομοιόμορφα</u> στα συμπαγή υποσύνολα του A στην συνάρτηση $f: A \to \mathbb{C}$ αν $\forall\, K \subseteq A$ συμπαγές ισχύει ότι $f_n|_K \xrightarrow{n\to\infty} f|_K$ ομοιόμορφα επί του K.

Από το Θεώρημα Cauchy-Hadamard είναι σαφές ότι μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R>0$ συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του δίσκου $\Delta(a,R)$



3^{η} ώρα ΑΣΚΗΣΕΙΣ

5) Αν $z = x+iy$, έστω

a) $f(z) = \dfrac{(1+i)x^3 - (1-i)y^3}{x^2+y^2}$, $z \neq 0$, $f(0)=0$

<u>f συνεχής στο 0</u>: Έστω $z = x+iy \neq 0$ τότε:

$$|f(z)| = \left| \frac{(1+i)x^3 - (1-i)y^3}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|1+i|\,|x|^3 + |1-i|\,|y|^3}{x^2+y^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,(|x|^3+|y|^3)}{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{2}\,(|x|+|y|)(x^2-|x||y|+y^2)}{x^2+y^2} =$$

$$= \sqrt{2}\,(|x|+|y|)\underbrace{\left(1-\frac{|x||y|}{x^2+y^2}\right)}_{\leq 1-0=1} \leq \sqrt{2}\,(|x|+|y|)$$

$$\left(\begin{array}{c} x^2+y^2 \geq 2|x||y| \Leftrightarrow \\ 0 \leq \dfrac{|x||y|}{x^2+y^2} \leq \dfrac{1}{2} \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} \sqrt{2}\,(0+0) = 0. \Rightarrow |f(z)| \xrightarrow{z\to 0} 0 \Rightarrow f(z) \xrightarrow{z\to 0} 0 = f(0)$$

$\Rightarrow f$ συνεχής στο $z=0$.

Εξισώσεις C-R στο 0: $f(z) = \underbrace{\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}}_{u(x,y)} + i\,\underbrace{\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}_{v(x,y)}$

Έχω $\dfrac{u(x,0)-\cancel{u(0,0)}^{0}}{x-0} = \dfrac{u(x,0)}{x} = \dfrac{x}{x} = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 1$

$\dfrac{u(0,y)-\cancel{u(0,0)}^{0}}{y-0} = \dfrac{-y}{y} = -1 \xrightarrow[y\to 0]{} -1 \Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -1.$

$f(0) = u(0,0) + iv(0,0) = 0 + 0i$

$\dfrac{v(x,0)-\cancel{v(0,0)}^{0}}{x-0} = \dfrac{x}{x} = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial x}(0,0) = 1$

$\dfrac{v(0,y)-\cancel{v(0,0)}^{0}}{y-0} = \dfrac{v(0,y)}{y} = \dfrac{y}{y} = 1 \xrightarrow[y\to 0]{} 1 \Rightarrow \dfrac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 1$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(0,0) = 1$ και $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,0) = -\dfrac{\partial v}{\partial x}(0,0) = -1$

$\Rightarrow$ οι εξισώσεις C-R ικανοποιούνται στο 0.

! ~~Η $f'(0)$ $\nexists$! Πράγματι για $x \neq 0$ $\dfrac{f(x,0)-\cancel{f(0,0)}^{0}}{x-0} = \dfrac{(1+i)x}{x} =$~~

~~$= (1+i) \xrightarrow[x\to 0]{} 1+i$~~

$\boxed{\text{ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΠΑΡΑΚΑΤΩ}}$

~~Ενώ $\dfrac{f(0,y)-\cancel{f(0,0)}^{0}}{y-0} = \dfrac{-(1-i)y}{y} = -1+i \xrightarrow[y\to 0]{} -1+i \neq 1-i$~~

~~$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} \neq \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} \Rightarrow \nexists$ η $f'(0)$~~

Αυτό δεν αντιφάσκει με το θεώρημα χαρακτηρισμού της μιγαδικής παραγώγου μέσω C-R διότι η f είναι μεν συνεχής στο 0 αλλά εμείς θέλουμε η f να είναι στο 0 διαφορίσιμη (που δεν είναι γιατί $\nexists$ $f'(0)$).

β) $f(z)=\sqrt{|xy|}$. Αποδ. ότι οι εξισώσεις C-R ισχύουν στο 0 αλλά $\nexists$ η $f'(0)$

$$\underset{(x,y)}{f(z)}=\sqrt{|xy|}=\underbrace{\sqrt{|xy|}}_{u(x,y)}+i\underbrace{0}_{v(x,y)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\frac{\partial v}{\partial y}(0,0)=0$$

Για $x\neq 0$ $\quad \dfrac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\dfrac{0-0}{x}=0\xrightarrow{x\to 0}0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=0.$$

Για $y\neq 0$ $\quad \dfrac{u(0,y)-u(0,0)}{y-0}=\dfrac{0-0}{y}\xrightarrow[y\to 0]{}0$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=0$$

Άρα ικανοποιούνται οι εξ. C-R στο 0 και $\nexists$ $f'(0)$ διότι:

$$\frac{f(x+ix)-f(0)}{x+ix-0}=\frac{\sqrt{|x|^2}}{x(1+i)}=\frac{|x|}{x(1+i)}\xrightarrow{x\to 0^+}\frac{1}{1+i}$$

ενώ $\xrightarrow{x\to 0^-}-\dfrac{1}{1+i}$

άρα $\nexists \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x+ix)-f(0)}{x+ix-0}\Rightarrow \nexists f'(0)$

ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΣΤΟ (α)

$\exists$ $f'(0)$: $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\dfrac{(1+i)x}{x}=1+i$

$$\frac{f(0,y)-f(0,0)}{iy}=\frac{-(1-i)y}{iy}=-(-i)(1-i)=i(1-i)=1+i$$

οπότε πρέπει να πάρουμε άλλη διαδρομή....

$$\leadsto \frac{f(x+ix)-\cancel{f(0)}^{0}}{x+ix-0} = \frac{\frac{\cancel{2}ix^{\cancel{3}}}{\cancel{2}x^{\cancel{2}}}}{(1+i)x} = \frac{i\cancel{x}}{(1+i)\cancel{x}} = \frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)(1-i)} =$$

$$= \frac{1+i}{1-i^2} = \frac{1+i}{2} \neq 1+i \Rightarrow \nexists\, f'(0).$$

9) Έστω ότι f ολόμορφη στον τόπο D και ότι $\forall\, z \in D$ είναι είτε $f(z)=0$ ή $f'(z)=0$. Δ.ο. η f είναι σταθερή.

Αποδ.

Παρατηρώ ότι η f^2 είναι ολόμορφη και $\forall\, z\in D$ $(f^2)'(z) = 2f(z)\cdot f'(z) = 0 \Rightarrow$ D τόπος

$f^2 =$ σταθερή $\Rightarrow \exists\, z_0 \in \mathbb{C},\ (f(z))^2 = z_0 \quad \forall\, z\in D$

$\Rightarrow \forall\, z \in D \qquad f(z) = \pm\sqrt{|z_0|}\, e^{i\frac{\arg(z_0)}{2}} = \pm\sqrt{z_0}$

$$\Rightarrow D = \underbrace{f^{-1}(\{\sqrt{z_0}\})}_{\text{σχ. κλειστό}} \cup \underbrace{f^{-1}(\{-\sqrt{z_0}\})}_{\text{σχετικά κλειστό}}$$

και επειδή $D \setminus f^{-1}(\{\sqrt{z_0}\}) = f^{-1}(\{-\sqrt{z_0}\})$ έχω ότι $f^{-1}(\{\sqrt{z_0}\})$ και $f^{-1}(\{-\sqrt{z_0}\})$ ανοικτά στο $\underset{\text{τόπος}}{\overset{}{D}}$

και ξένα $\Rightarrow f^{-1}(\{\sqrt{z_0}\}) = \emptyset$ και $f^{-1}(\{-\sqrt{z_0}\}) = D$
ή $f^{-1}(\{\sqrt{z_0}\}) = D$ και $f^{-1}(\{-\sqrt{z_0}\}) = \emptyset$
$\Rightarrow f$ σταθερή