21/11/2022

17ο Μάθημα

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Παρατήρηση: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνάρτηση. Λέμε ότι η f έχει παράγουσα στο Ω, αν $\exists$ ολόμορφη $F: \Omega \to \mathbb{C}$ ώστε $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in \Omega$.
Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι κάθε δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ έχει παράγουσα στον ανοικτό δίσκο σύγκλισής της.

Πράγματι αν $R>0$ η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, τότε η δυναμοσειρά

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1} =$$

$$= a_0(z-a) + \frac{a_1}{2}(z-a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1} + \dots$$

έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης, διότι:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1} = (z-a)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-a)^n$$

και από Cauchy-Hadamard η ακτίνα σύγκλισης είναι:

$$\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}} = \frac{1}{\limsup \frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}}} = \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{\lim \sqrt[n]{n+1}}}_{1} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = R$$

Από το θεώρημα διαφόρισης δυναμοσειρών έχουμε:

$$F'(z) = f(z), \ \forall\ |z-a| < R$$

Σημείωση: Επειδή ο δίσκος $\Delta(a,R)$ είναι τόπος (ως κυρτό σύνολο) κάθε άλλη παράγουσα της $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ είναι της μορφής $F + C$, όπου $C \in \mathbb{C}$ σταθερά.

KENO KENO KENO KENO

Πόρισμα: Έστω $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά κέντρου a και ακτίνας σύγκλισης $R>0$. Τότε:

~~Πόρισμα:~~

α) Η f έχει παραγώγους κάθε τάξης στον δίσκο σύγκλισης $\Delta(a,R)$.

β) Η $f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n(z-a)^{n-k}=$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdots(n+k)\,a_{n+k}(z-a)^n,\quad k=1,2,\ldots \quad z\in\Delta(a,R)$$

γ) $a_k=\dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$, $k=0,1,2,\ldots$ και έτσι η f εκφράζεται ως σειρά Taylor: $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$, $z\in\Delta(a,R)$

Αποδ. (α), (β) με επαγωγή

γ) Για $z=a$, στην $f^{(k)}(z)$ έχουμε:

$$f^{(k)}(a)=k!\,a_k \quad \text{άρα} \quad a_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

Παράδειγμα: Έστω $f(z)=\dfrac{1}{1-z}=1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$, $|z|<1$ η γεωμετρική σειρά. Έπεται ότι $f'(z)=\dfrac{1}{(1-z)^2}=$
$=1+2z+\cdots+n\cdot z^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot z^{n-1}$

$$f''(z)=\frac{2}{(1-z)^3}=2+6z+\cdots+n(n-1)z^{n-2}+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)z^{n-2},\ \text{για } |z|<1$$

κ.ο.κ.

Επίσης έχουμε $f^{(n)}(0) = n!$ και $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, $|z|<1$

Μια παράγουσα της γεωμετρικής σειράς στον $\Delta(0,1)$ είναι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} = z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^{n+1}}{n+1} + \dots$

Ορισμός: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνάρτηση. Η f λέγεται αναλυτική στον Ω, αν $\forall\, a \in \Omega$ η f αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το a. Δηλ. $\exists$ $r = r(a) > 0$ και $a_n = a_n(a) \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$ ώστε $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ και $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $z \in \Delta(a,r)$.

★ Από τα προηγούμενα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

Θεώρημα: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνάρτηση. Τότε ισχύουν οι ακόλουθες συνεπαγωγές:

Η f είναι αναλυτική στο Ω $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η f έχει παραγώγους κάθε τάξης στο Ω $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Η f είναι ολόμορφη στο Ω.

Θα δούμε παρακάτω ότι ισχύει και το αντίστροφο. Δηλ. κάθε ολόμορφη συνάρτηση $f: \Omega \to \mathbb{C}$, (Ω ανοιχτό) είναι αναλυτική στο Ω. Αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος του Cauchy.

Σημείωση: Η αναλυτικότητα μιας συνάρτησης είναι ισοδύναμη με το ότι:

Για κάθε $a \in \Omega$ και κάθε $r > 0$, ώστε $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ $\exists$ δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ με ακτίνα σύγκλισης $R \geq r$ ώστε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$, $z \in \Delta(a,r)$

Εκθετικές και τριγωνομετρικές συναρτήσεις
Ο μιγαδικός λογάριθμος

Έστω μια δυναμοσειρά $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ με πραγματικούς συντελεστές a_n, πραγματικό κέντρο a και ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Τότε βέβαια η f συγκλίνει για $x\in(a-R,\, a+R)$ και αποκλίνει για $x\in\mathbb{R}$ με $|x-a|>R$.

Είναι τότε σαφές ότι η μιγαδική δυναμοσειρά
$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$$
έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης και επεκτείνει την f σε μια ολόμορφη συνάρτηση F στον δίσκο $\Delta(a,R)$.

Λήμμα: Οι δυναμοσειρές

α) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, β) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ και γ) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

έχουν ακτίνα σύγκλισης $R=+\infty$

Αποδ. 1ος τρόπος

α) Από τον Απειροστικό Λογισμό γνωρίζαμε ότι

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x\in\mathbb{R}$$

Από τις εισαγωγικές παρατηρήσεις έπεται ότι $R=+\infty$

2ος τρόπος

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = +\infty$$

3ος τρόπος

$$R=\frac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}}=\frac{1}{\lim \sqrt[n]{\frac{1}{n!}}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$$

(β) και (γ)

1ος τρόπος

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{και} \quad \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in\mathbb{R}$$

Από τις αρχικές παρατηρήσεις έχουμε $R=+\infty$

2ος τρόπος

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}\right|=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^{2n}}{(2n)!}\leq\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|z|^n}{n!}=e^{|z|}<+\infty,\ z\in\mathbb{C}$$

Ανάλογα δουλεύουμε και για την δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

3ος τρόπος

$$R=\frac{1}{\limsup \sqrt[2n]{\frac{1}{(2n)!}}}=\frac{1}{\lim \sqrt[2n]{\frac{1}{(2n)!}}}=\lim \sqrt[2n]{(2n)!}=+\infty$$

Όμοια για την $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

Ορισμός: Η συνάρτηση συνημίτονο $\cos:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ είναι η $\displaystyle\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!},\ z\in\mathbb{C}$

Η συνάρτηση ημίτονο είναι η $\displaystyle\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$z\in\mathbb{C}$

Πρόταση

α) $\cos' z = -\sin z$ και $\sin' z = \cos z$, $z \in \mathbb{C}$

β) $\cos(-z) = \cos z$ και $\sin(-z) = -\sin z$, $z \in \mathbb{C}$

Αποδ.

α) Από το Θεώρημα διαφόρισης δυναμοσειρών στην

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!} + \dots$$

και έχουμε $\cos' z = -\frac{2z}{2!} + \frac{4z^3}{4!} - \frac{6z^5}{6!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(2n+2) z^{2n+1}}{(2n+2)!} + \dots =$

$$= -\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \cdot \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) = -\sin z$$

Ανάλογα αποδεικνύεται ότι $\sin' z = \cos z$, $z \in \mathbb{C}$

β) $\cos(-z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(-z)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos z$

Ανάλογα έχουμε ότι $\sin(-z) = -\sin z$

★ Θέτουμε $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$ και παρατηρούμε ότι

$F(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Θ.δ.ο. $F(z) = e^z$, $z \in \mathbb{C}$ δηλ. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.

Λήμμα α) $F'(z) = F(z)$

β) $F(z+w) = F(z)F(w)$, $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$

Αποδ. Από το Θεώρημα διαφόρισης δυναμοσειρών έχουμε

$F'(z) = 1 + \frac{2z}{2!} + \dots + \frac{n z^{n-1}}{n!} + (n+1)\frac{z^n}{(n+1)!} + \dots$ || $F(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$

αφού

$$= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{z^n}{n!} + \dots = F(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

δ) Έστω a τυχαίος μιγαδικός αριθμός.
Θεωρούμε την συνάρτηση $g(z) = F(z)\,F(a-z)$, $z \in \mathbb{C}$

Προφανώς η g είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$ και

$$g'(z) = F'(z)F(a-z) + F(z)F'(a-z)(-1) =$$
$$= F(z)F(a-z) - F(z)F(a-z) = 0.$$

Έπεται ότι η g είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$ και αν $z \in \mathbb{C}$ τότε $g(z) = g(0) = F(0) \cdot F(a) = 1 \cdot F(a) = F(a)$

Άρα $g(z) = F(z)F(a-z) = F(a) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}$.

Επειδή το a ήταν τυχαίο, παίρνω $a = z + w$ και λαμβάνω $F(\underbrace{z+w}_{a}) = F(z)\,F(\underbrace{w}_{a-z})$