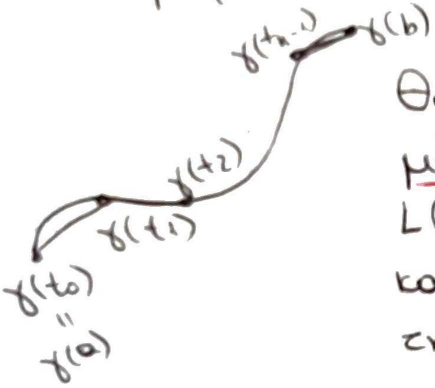
ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

30/11/22

23ο Μάθημα

Ορισμός: Έστω $\gamma\ [a,b] \to \mathbb{C}$ και $P=\{t_0=a<t_1<\dots<t_n=b\}$ διαμέριση του $[a,b]$. Θέτουμε $L(P)=\sum_{k=1}^{n}|\gamma(t_{k-1})-\gamma(t_k)|$



Θα λέμε ότι η καμπύλη γ έχει μήκος αν $\exists$ σταθερά $M>0$ ώστε $L(P)\le M$ $\forall$ διαμέριση P του $[a,b]$. Αν η καμπύλη έχει μήκος, θα ορίζουμε ως μήκος της καμπύλης γ τον αριθμό

$$\ell(\gamma)=\sup\{L(P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

Σημείωση: Δεν έχει κάθε καμπύλη μήκος. Ένα παράδειγμα τέτοιας καμπύλης είναι το εξής:

$$\gamma(t)=\begin{cases} t+it\sin\left(\frac{\pi}{t}\right), & 0<t\le 1 \\ 0, & t=0 \end{cases}$$

Ορισμός: Μια καμπύλη $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ λέγεται κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη ή κατά τμήματα C^1, αν $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\dots+\gamma_n$ και κάθε γ_k είναι συνεχώς διαφορίσιμη (Δηλ. $\exists$ διαμέριση $P=\{t_0=a<t_1<\dots<t_n=b\}$ του $[a,b]$ ώστε $\forall$ $k=1,2,3,\dots,n$ η $\gamma_k=\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ έχει συνεχή παράγωγο (είναι C^1) στο $[t_{k-1},t_k]$)

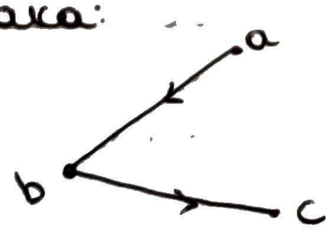
Ενδέχεται σε κάποια από τα t_k οι πλευρικές παράγωγοι να διαφέρουν και άρα εκεί η γ δεν θα διαφορίζεται.

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι οι πολυγωνικές γραμμές οι οποίες είναι τμηματικά C^1 αλλά η παράγωγος στις κορυφές ενδέχεται να μην υπάρχει.

Π.χ. a,b,c μη συνευθειακά:

Αν $\gamma=[a,b]+[b,c]$ τότε

$\nexists\ \gamma'(1)\ (\gamma(1)=b)$



Λήμμα Έστω $\gamma\ [a,b] \to \mathbb{C}$ ώστε $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$.
ΤΑΕΙ:

a) Η γ έχει μήκος
β) Οι $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ έχουν μήκος. Τότε ισχύει $\ell(\gamma) = \ell(\gamma_1) + \dots + \ell(\gamma_n)$

Θεώρημα: Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ τμηματικά C^1 καμπύλη.
Τότε:
a) Η γ έχει μήκος
β) $\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$

Απόδ.

a) Υποθέτουμε πρώτα ότι η γ είναι συνεχώς διαφορ.
Έστω $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b\}$ τυχαία διαμέριση του $[a,b]$. Τότε $L(P) = \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right| \le$

$$\le \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

Έπεται ότι $\ell(\gamma) \le \int_a^b |\gamma'(t)| dt < +\infty$ και έτσι η γ έχει μήκος.
Υποθέτουμε ότι η γ είναι τμηματικά C^1 και άρα $\exists$ διαμέριση $Q = \{x_0 = a < \dots < x_m = b\}$ του $[a,b]$, ώστε κάθε $\gamma_k = \gamma|_{[x_{k-1}, x_k]}$, $k = 1, 2, \dots, m$ να είναι C^1 (στο $[x_{k-1}, x_k]$). Τότε έχουμε $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_m$ και επειδή κάθε γ_k έχει μήκος ως C^1 καμπύλη από το λήμμα έπεται ότι η γ έχει μήκος.

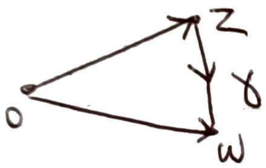
Σημείωση Η συνάρτηση $t \in [a,b] \mapsto |\gamma'(t)| \in \mathbb{R}$ έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών (ενδεχομένως στα x_k, $1 \le k \le n-1$) και βέβαια είναι φραγμένη (αφού κάθε $|\gamma_k'|$

$\rightsquigarrow$

είναι συνεχής. Έτσι το ολοκλήρωμα $\int_a^b |\gamma'(t)|dt$ ∃ και ισχύει $\int_a^b |\gamma'(t)|dt = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\gamma_k'(t)|dt \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} \ell(\gamma_k) = \ell(\gamma)$

Παραδείγματα:

① Έστω $z \neq w \in \mathbb{C}$. Θεωρούμε το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα $[z,w]$, δηλ. $\gamma(t) = (1-t)z + tw$, $t \in [0,1]$. Τότε $\gamma'(t) = -z + w$, $t \in [0,1]$ και η γ είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε $\ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|dt = \int_0^1 |z-w|dt = |z-w|$



$\ell(\gamma) = |z-w|$

② Γενικότερα έστω $\gamma = [z_0, z_1] + \dots + [z_{n-1}, z_n]$ πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα $z_0, z_1, \dots, z_n$. Από τον ορισμό της η γ είναι τμηματικά C^1 και $\ell(\gamma) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} |\gamma'(t)|dt$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| = |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \dots + |z_n - z_{n-1}|$$

③ Έστω $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, η θετικά προσανατολισμένη περιφέρεια του κύκλου $C(a,r)$, $(a \in \mathbb{C}, r > 0)$

Τότε $\gamma'(t) = ire^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ και (άρα) η γ είναι $C^1[0,2\pi]$.
Έτσι $\ell(\gamma) = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)|dt = \int_0^{2\pi} |ire^{it}|dt = \int_0^{2\pi} r\,dt = 2\pi r$

ΑΝΑΠΑΡΑΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΜΠΥΛΩΝ

Έστω $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ καμπύλες. Θα λέμε ότι η γ_1 είναι μια <u>αναπαραμέτρηση</u> της γ_2 αν $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \sigma$, όπου $\sigma : [a,b] \to [c,d]$ είναι μια συνεχής και 1-1 συνάρτηση με $\sigma(a) = c$ και $\sigma(b) = d$ η οποία είναι επιπλέον C^1.

Παρατηρούμε ότι η σ είναι γνησίως αύξουσα (άρα $\sigma'(t) \geq 0$) και ότι οι γ_1, γ_2 έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. ($\gamma_1'(t) = (\gamma_2 \circ \sigma)'(t) = \gamma_2'(\sigma(t)) \underbrace{\sigma'(t)}_{\geq 0}$ ομόρροπα διανύσματα ταχύτητας στα αντίστοιχα σημεία).

Λέμε ότι οι γ_1, γ_2 είναι παραμετρήσεις της «καμπύλης» $[\gamma_1] = [\gamma_2]$. Προφανώς $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ και γ_1, γ_2 έχουν το ίδιο αρχικό και το ίδιο τελικό σημείο.

Αν επιπλέον η απεικόνιση σ^{-1} είναι C^1, θα λέμε ότι οι γ_1, γ_2 είναι ισοδύναμες καμπύλες (τότε $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \sigma^{-1}$, $\sigma^{-1} \in C^1[c,d]$)

$$\begin{tikzcd} {[a,b]} \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\gamma_1 = \gamma_2 \circ \sigma"'] & {[c,d]} \arrow[d, "\gamma_2"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

Παραδείγματα:

1) Έστω $\gamma_1(t) = t^2 + it^2$ και $\gamma_2(t) = t + it$, $t \in [0,1]$.
Αν $\sigma(t) = t^2$, $t \in [0,1]$ τότε η σ είναι 1-1 και επί του $[0,1]$ με συνεχή παράγωγο $\sigma'(t) = 2t$.
Παρατηρούμε ότι $(\gamma_2 \circ \sigma)(t) = \gamma_2(\sigma(t)) = \gamma_2(t^2) = \gamma_1(t)$, $t \in [0,1]$.
Άρα η γ_1 είναι αναπαραμέτρηση της γ_2.
Όμως οι γ_1, γ_2 δεν είναι ισοδύναμες αφού η αντίστροφη της σ είναι η συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0,1]$, $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0,1]$ και $\varphi'(0) = +\infty$)

(2) Έστω $\gamma_1(t)=e^{2\pi i t}$, $t\in[0,1]$ και $\gamma_2(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$

Θέτουμε $\sigma(t)=2\pi t$, $t\in[0,1]$. Τότε $\gamma_1(t)=(\gamma_2\circ\sigma)(t)$,
$\sigma'(t)=2\pi$, $t\in[0,1]$. $\varphi(x)=\sigma^{-1}(x)=\frac{x}{2\pi}$, $x\in[0,2\pi]$ και
$\varphi'(x)=\frac{1}{2\pi}$, $x\in[0,2\pi]$ $\Rightarrow$ $\varphi\in C'[0,2\pi]$

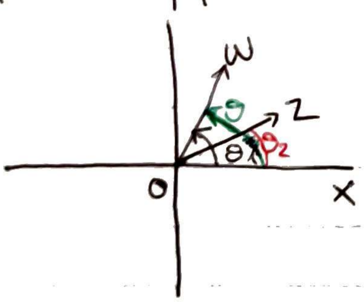
Έπεται ότι η γ_1 είναι αναπαραμέτρηση της γ_2 και μάλιστα οι γ_1,γ_2 είναι ισοδύναμες καμπύλες

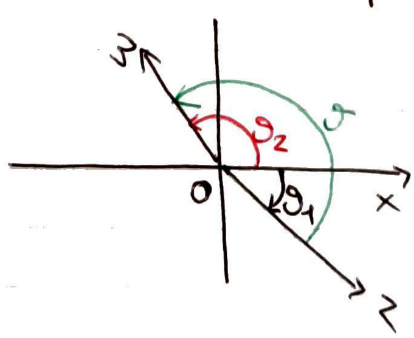
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

1) Έστω $z,w\in\mathbb{C}$ με $z\neq 0\neq w$. Τότε η προσανατολισμένη γωνία (z,w) των διανυσμάτων z,w ορίζεται ως το πρωτεύον όρισμα του $\frac{w}{z}$, δηλ. $(z,w)\underset{\text{ορσ}}{=}\arg\left(\frac{w}{z}\right)$

Γεωμετρικά, η γωνία αυτή είναι η προσανατολισμένη κυρτή γωνία με πρώτη πλευρά την ημιευθεία Oz και δεύτερη πλευρά την ημιευθεία Ow.

Μερικές φορές η γωνία αυτή συμβολίζεται με (Oz,Ow)





$\theta=\arg\left(\frac{w}{z}\right)$

Ο ορισμός αυτός δικαιολογείται ως εξής:

$$\frac{w}{z}=\frac{|w|e^{i\theta_2}}{|z|e^{i\theta_1}}=\frac{|w|}{|z|}e^{i(\theta_2-\theta_1)},$$

$\theta_1=\arg(z)$, $\theta_2=\arg(w)$