# ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

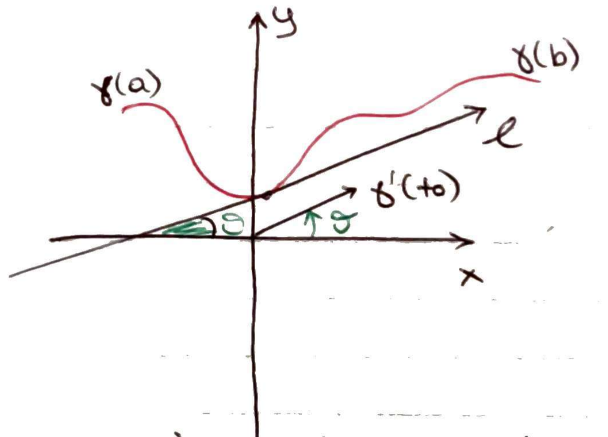
2/12/2022

## Μάθημα 24ο

### Γεωμετρική Ερμηνεία της μιγαδικής παραγώγου

(2) Έστω $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη και $t_0 \in [a,b]$ ώστε $\gamma'(t_0) \neq 0$. Τότε η εφαπτομένη της $\gamma$ στο $\gamma(t_0)$ ορίζεται ως η ευθεία με εξίσωση $\ell(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0)$, $t \in \mathbb{R}$

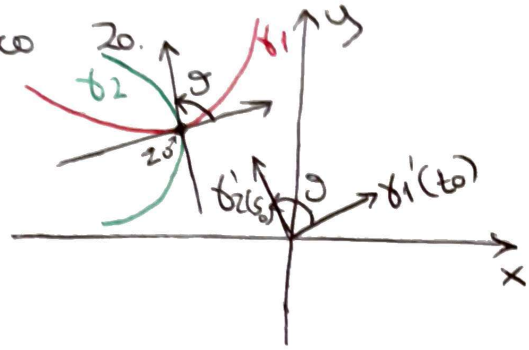
Το διάνυσμα $\gamma'(t_0)$ λέγεται το εφαπτόμενο διάνυσμα της $\gamma$ στο $\gamma(t_0)$.
Παρατηρούμε ότι η κυρτή προσανατολισμένη γωνία με πρώτη πλευρά τον θετικό x-ημιάξονα και δεύτερη πλευρά την θετική κατεύθυνση $(t \to +\infty)$ της εφαπτομένης $\ell$ συμπίπτει με το πρωτεύον όρισμα του $\gamma'(t_0)$.




Δηλ.
$\theta = \arg(\gamma'(t_0))$ και
$\gamma'(t_0) = |\gamma'(t_0)| \cdot e^{i\theta}$

(3) Έστω τώρα δύο καμπύλες $\gamma_1: [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2: [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ που τέμνονται στο σημείο $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(s_0)$, όπου $t_0 \in [a_1, b_1]$ και $s_0 \in (a_2, b_2)$ και $\gamma_1'(t_0) \neq 0 \neq \gamma_2'(s_0)$. Ορίζουμε τότε τη γωνία $(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$ μεταξύ των δύο καμπυλών στο $z_0$ ως τη γωνία $(\gamma_1'(t_0), \gamma_2'(s_0), z_0)$ των εφαπτόμενων διανυσμάτων τους, δηλ. $(\gamma_1, \gamma_2, z_0) = \arg\left(\dfrac{\gamma_2'(s_0)}{\gamma_1'(t_0)}\right)$.

Γεωμετρικά η γωνία $(\gamma_1, \gamma_2, z_0)$ είναι η κυρτή προσανατολισμένη γωνία με πρώτη πλευρά την θετική κατεύθυνση της εφαπτομένης της $\gamma_1$, στο $z_0$ και δεύτερη πλευρά την θετική κατεύθυνση της εφαπτομένης της $\gamma_2$ στο $z_0$.




$$\theta = \arg\left(\frac{\gamma_2'(s_0)}{\gamma_1'(t_0)}\right)$$

**Πρόταση** Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $z_0 \in \Omega$ και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση ώστε $f'(z_0) \neq 0$. Τότε η $f$ διατηρεί τις γωνίες στο $z_0$. Δηλαδή αν $\gamma_1, \gamma_2$ είναι $C^1$-καμπύλες στο $\Omega$ που τέμνονται στο $z_0$, δηλ. $z_0 = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(s_0)$, ώστε $\gamma_1'(t_0) \neq 0 \neq \gamma_2'(s_0)$, τότε $(\gamma_1, \gamma_2, z_0) = (f\circ\gamma_1, f\circ\gamma_2, f(z_0))$

**Αποδ.**

Θέτω $\rho_1 = f\circ\gamma_1$ και $\rho_2 = f\circ\gamma_2$. Τότε οι καμπύλες $\rho_1, \rho_2$ τέμνονται στο $f(z_0)$, αφού

$$\rho_1(t_0) = f(\gamma_1(t_0)) = f(\underbrace{\gamma_2(s_0)}_{z_0}) = \rho_2(s_0) = f(z_0).$$

Παρατηρούμε ότι $\rho_1'(t_0) = f'(\underbrace{\gamma_1(t_0)}_{z_0})\gamma_1'(t_0) = f'(z_0)\cdot\gamma_1'(t_0) \neq 0.$

και $\rho_2'(s_0) = f'(\underbrace{\gamma_2(s_0)}_{z_0})\cdot\gamma_2'(s_0) = f'(z_0)\cdot\gamma_2'(s_0)$

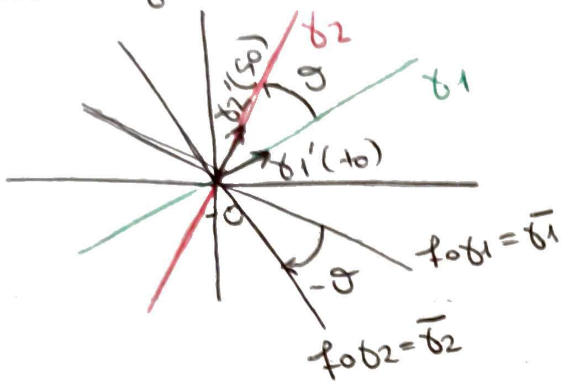
Άρα $(\rho_1, \rho_2, f(z_0)) = \arg\left(\frac{\rho_2'(s_0)}{\rho_1'(t_0)}\right) = \arg\left(\frac{\gamma_2'(s_0)}{\gamma_1'(t_0)}\right)$ ∎

$\boxed{\text{Ύλη Προόδου μέχρι το 4.3}}$

**Παρατήρηση:** Τονίζουμε ότι η διατήρηση των γωνιών αφορά τόσο το μέτρο όσο και τον προσανατολισμό των γωνιών.

## Αντιπαράδειγμα

Για παράδειγμα η απεικόνιση $z \in \mathbb{C} \longmapsto \bar{z} \in \mathbb{C}$ στο σημείο 0, διατηρεί το μέτρο αλλά αντιστρέφει τον προσανατολισμό των γωνιών




$(f\circ\gamma_1, f\circ\gamma_2, 0) = -(\gamma_1, \gamma_2, 0)$

$\gamma_1(t_0) = 0 = \gamma_2(s_0)$

$f(z) = \bar{z}$ $\quad f(0) = 0$

## Μιγαδικό Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

Έστω $\gamma : [a,b] \to D$ $C^1$-καμπύλη, όπου $D \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : D \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση.
Θα ορίσουμε με κατάλληλο τρόπο την έννοια μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f$ κατά μήκος της $\gamma$.
Θα το συμβολίζουμε με $\int_\gamma f(z)dz$ ή $\int_\gamma f dz$ ή $\int_\gamma f$

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η $f$ έχει παράγουσα στο $D$, δηλ. $\exists$ $F : D \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F' = f$.
Θέλουμε να ορίσουμε την έννοια αυτή ώστε να ισχύει
$\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Δηλ. ο αριθμός $\int_\gamma f(z)dz$ να είναι ανεξάρτητος από την καμπύλη $\gamma$ του $D$ που συνδέει τα σημεία $z = \gamma(a)$ και $w = \gamma(b)$ του $D$

Παρατηρούμε, ότι για την συνάρτηση $F\circ\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ισχύει $(F\circ\gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$, $t \in [a,b]$
και βέβαια η $t \in [a,b] \longmapsto f(\gamma(t))\gamma'(t)$ είναι συνεχής.

Από Θ.Θ.Α.Λ. έχουμε $\int_a^b (F\circ\gamma)'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt =$

$= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

**Ορισμός:** Έστω $\gamma: [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ τμηματικά $C^1$-καμπύλη και $f: [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση.
Ως μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f$ κατά μήκος της $\gamma$ ορίζεται να είναι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$ το οποίο συμβολίζεται με $\int_\gamma f(z)dz$.

Άρα $\int_\gamma f(z)\,dz \overset{\text{ορσ}}{=} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι καλά ορισμένο αφού οι $f,\gamma$ είναι συνεχείς και η $\gamma'$ έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών και επιπλέον είναι φραγμένη.

Γνωρίζουμε ότι μπορεί να οριστεί το Πραγματικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f$ επί της $\gamma$. Είναι γνωστό ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους της $f$ επί της $\gamma$ και ορίζεται ως εξής:

$$\int_\gamma f\cdot ds = \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \quad \text{όπου}$$

$f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$ είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσματικών συναρτήσεων $f(\gamma(t))$ και $\gamma'(t)$, $t\in[a,b]$.

Θα διερευνήσουμε τη σχέση των δύο επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων της $f$ επί της $\gamma$, του μιγαδικού και του πραγματικού. Έστω $f = u+iv$ και $\gamma = x+iy$ ($\gamma=\gamma(t) = x(t)+iy(t) = x+iy$). Έχουμε τότε
$f(\gamma(t))\gamma'(t) = (u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t)))\cdot(x'(t)+iy'(t)) =$

$$= \left(u(x(t), y(t))\, x'(t) - v(x'(t), y(t))\, y'(t)\right) + i\left(u(x(t), y(t))\, y'(t) + v(x(t), y(t))\, x'(t)\right)$$

Έτσι από τους ορισμούς του μιγαδικού και του πραγματικού επικαμπύλιου ολ/ματος έχουμε:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (v\,dx + u\,dy)$$

όπου στα δεξιά είναι τα πραγματικά επικαμπύλια ολ/ματα των διανυσματικών συναρτήσεων $(u, -v)$ και $(v, u)$ επί της $\gamma$. Τυπικά ο τελευταίος τύπος λαμβάνεται ως εξής:

$$f(z)dz = (u+iv)(dx+dy) = (u\,dx - v\,dy) + i(v\,dx + u\,dy)$$

Παρατηρούμε ότι $\int_\gamma f\, ds = \int_\gamma (u\,dx + v\,dy)$

**Πρόταση:**

α) (Γραμμικότητα των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων)

Έστω $\gamma$ καμπύλη, $f, g : [\gamma] \to \mathbb{C}$ συνεχείς συναρτήσεις και $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Τότε $\int_\gamma (\lambda f + \mu g)\, dz = \lambda \int_\gamma f dz + \mu \int_\gamma g dz$

β) Αν $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ και $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ συνεχής, τότε
$$\int_\gamma f\, dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz + \dots + \int_{\gamma_n} f\, dz$$

**Πρόταση:** Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη και $f : [\gamma] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε $\left|\int_\gamma f(z) dz\right| \leq \|f\|\, \ell(\gamma)$, όπου $\|f\| = \sup\{|f(\zeta)| : \zeta \in [\gamma]\}$

**Αποδ.** Παρατηρούμε αρχικά ότι, εφόσον η $|f|$ είναι συνεχής πραγματική συνάρτηση επί του συμπαγούς συνόλου $[\gamma]$, έπεται ότι η $|f|$ είναι φραγμένη και άρα $\|f\| < +\infty$. Έτσι έχουμε:

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt\right| \leq$$

$$\leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq \|f\| \int_a^b \underbrace{|\gamma'(t)|dt}_{ds} = \|f\|\,\ell(\gamma)$$

**Πόρισμα:** Έστω $\gamma:[a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη, $f_n:[\gamma]\to\mathbb{C}$, $n\geq 1$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων και $f:[\gamma]\to\mathbb{C}$ συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα τότε:

$$\int_\gamma f_n\,dz \xrightarrow{n\to\infty} \int_\gamma f\,dz$$

**Αποδ.** Επειδή $f_n$ συνεχής στο $[\gamma]$ και $f_n \xrightarrow{\text{ομ.}} f$ επί του $[\gamma]$ έπεται ότι $f$ συνεχής στο $[\gamma]$. Από τα προηγούμενα έχουμε:

$$\left|\int_\gamma f_n dz - \int_\gamma f\,dz\right| = \left|\int_\gamma (f_n - f)\,dz\right| \leq \|f_n - f\|\,\ell(\gamma) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

διότι $\|f_n - f\| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow \int_\gamma f_n\,dz \to \int_\gamma f\,dz$.