ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

25ο Μάθημα

5/12/22

Πρόταση: Έστω $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη. Τότε

α) $[-\gamma] = [\gamma]$ και $\ell(\gamma) = \ell(-\gamma)$

β) $\int_{-\gamma} f\,dz = -\int_{\gamma} f\,dz$, αν $f: [\gamma] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση

Αποδ.

α) Παρατηρούμε ότι $-\gamma = \gamma \circ \sigma$, όπου $\sigma: [a,b] \to [a,b]$ με $\sigma(t) = a+b-t$. Επειδή η σ είναι 1-1 (γνησίως φθίνουσα) και επί του $[a,b]$ και ακόμα είναι συνεχώς διαφορίσιμη $(\sigma'(t) = -1)$, έπεται ότι η $-\gamma$ είναι τμηματικά C^1 (αν η γ είναι τμηματικά C^1) και βέβαια $[-\gamma] = [\gamma]$

$((-\gamma)([a,b]) = (\gamma\circ\sigma)([a,b]) = \gamma(\sigma[a,b]) = \gamma([a,b]) = [\gamma])$

Επίσης, αν $\gamma \in C^1[a,b]$ είναι $\ell(-\gamma) = \int_a^b |(-\gamma)'(t)|\,dt =$

$$= \int_a^b |\gamma'(a+b-t)(-1)|\,dt \overset{x=a+b-t}{=\!=} -\int_b^a |\gamma'(x)|\,dx = \int_a^b |\gamma'(x)|\,dx = \ell(\gamma)$$

β) $\int_{-\gamma} f\,dz = \int_{\gamma\circ\sigma} f\,dz = \int_a^b f(\gamma(\sigma(t)))\gamma'(\sigma(t))\sigma'(t)\,dt =$

$$\underset{dx = \sigma'(t)dt}{\overset{\text{θέτω } x=\sigma(a)}{=\!=}} \int_b^a f(\gamma(x))\gamma'(x)\,dx = -\int_a^b f(\gamma(x))\gamma'(x)\,dx = -\int_{\gamma} f(z)\,dz$$

Πρόταση: Έστω $\gamma_1: [a,b] \to \mathbb{C}$ και $\gamma_2: [c,d] \to \mathbb{C}$ καμπύλες. Αν η γ_1 είναι αναπαραμέτρηση της γ_2 τότε έχουμε:

α) $[\gamma_1] = [\gamma_2]$ και $\ell(\gamma_1) = \ell(\gamma_2)$

β) $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$, αν $f: [\gamma_1] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση

Αποδ

Είναι $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \sigma$, όπου $\sigma : [a,b] \to [c,d]$ είναι C^1, $\nearrow$ και επί των $[c,d]$. Τότε $[\gamma_1] = \gamma_1([a,b]) = (\gamma_2 \circ \sigma)([a,b]) =$
$= \gamma_2([c,d]) = [\gamma_2]$

Οι γ_1, γ_2 έχουν κοινό αρχικό και κοινό τελικό σημείο (διότι $\sigma(a) = c$, $\sigma(b) = d$)
Επίσης $\ell(\gamma_1) = \int_a^b |\gamma_1'(t)|dt = \int_a^b |\gamma_2'(\sigma(t))\sigma'(t)|dt =$

$$= \int_a^b |\gamma_2'(\sigma(t))|\underbrace{|\sigma'(t)|}_{\geq 0}dt = \int_a^b |\gamma_2'(\underbrace{\sigma(t)}_{x})| \underbrace{\sigma'(t)dt}_{dx} =$$

$$= \int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} |\gamma_2'(x)|dx = \int_c^d |\gamma_2'(x)|dx = \ell(\gamma_2)$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt \overset{\gamma_1 = \gamma_2 \circ \sigma}{=\!=} \int_a^b f(\gamma_2(\sigma(t)))\gamma_2'(\sigma(t))\sigma'(t)dt$$

$$\overset{\sigma(t) = x}{=\!=} \int_{\sigma(a)}^{\sigma(b)} f(\gamma_2(x))\gamma_2'(x)dx = \int_c^d f(\gamma_2(x))\gamma_2'(x)dx =$$

$$= \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Θεώρημα (Θεμ. Θεώρημα Α.Λ. για επικαμπύλια ολ/ματα)

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ καμπύλη και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής. Αν η f έχει παράγουσα στο Ω, δηλ. $\exists$ $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F'(z) = f(z)$ για $z \in \Omega$ τότε $\int_\gamma f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$

Σχόλιο: Αν η f έχει παράγουσα τότε το $\int_\gamma f(z)dz$ εξαρτάται μόνο από τα άκρα $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ της γ και όχι από όλη τη γ (ανεξάρτητο της διαδρομής)

Αποδ

Υποθέτουμε πρώτα ότι η γ είναι C^1-καμπύλη.
Τότε έχουμε $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt =$

$$= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = (F\circ\gamma)(b) - (F\circ\gamma)(a) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Υποθέτουμε τώρα ότι η γ είναι τμηματικά C^1.
Τότε $\exists$ σημεία $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$ ώστε καμπύλες $\gamma_k = \gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$, $k=1,2,\dots,n$ να είναι C^1. Τότε $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$ και άρα $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz =$

$$= \left(F(\cancel{\gamma(t_1)}) - F(\gamma(t_0))\right) + \left(F(\cancel{\gamma(t_2)}) - F(\cancel{\gamma(t_1)})\right) + \cancel{\dots} + \left(F(\gamma(t_n)) - F(\cancel{\gamma(t_{n-1})})\right)$$

$$= F(\gamma(t_n)) - F(\gamma(t_0)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Πόρισμα:

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ κλειστή καμπύλη και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε $\int_\gamma f'(z)\,dz = 0$

Αποδ. Όπως θα δείξουμε αργότερα, η παράγωγος μιας ολόμορφης συνάρτησης είναι συνεχής.
Έτσι από το παραπάνω θεώρημα έχουμε:

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0 \quad , \text{ διότι } \gamma(a) = \gamma(b)$$

Παρατήρηση
Μια ολόμορφη συνάρτηση ορισμένη σε ένα τόπο Ω δεν έχει αναγκαστικά παράγουσα.

π.χ. πίσω $\rightsquigarrow$

Παραδείγματα:

① Έστω $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ και $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \Omega$.
Τότε η ολόμορφη συνάρτηση f δεν έχει παράγουσα στον τόπο Ω.

1η αποδ.

Έστω $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Η γ είναι βέβαια κλειστή καμπύλη και $\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\gamma(t)} \gamma'(t)\, dt =$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i\, dt = 2\pi i \neq 0.$$

Έτσι η $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \in \Omega$ δεν έχει παράγουσα.

(Αν είχε, τότε θα $\exists$ $F : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη ώστε $F'(z) = f(z)$, $z \neq 0$. Όμως τότε θα έπρεπε $\int_\gamma f(z)dz =$

$= \int_\gamma F'(z)\, dz = 0$. Από το προηγούμενο θεώρημα Άτοπο

Άρα η f δεν έχει παράγουσα στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$)

2η Αποδ.

Ας υποθέσουμε ότι $\exists$ ολόμορφη $F : \Omega \to \mathbb{C}$ με $F'(z) = \frac{1}{z}$ για $z \in \Omega$. Τότε ιδιαιτέρως $F'(z) = \frac{1}{z} = \log' z$, $z \in \mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$

όπου $\log z$ ο κύριος κλάδος του λογαρίθμου.

Συνεπώς $\exists$ σταθερά c ώστε $\log z = F(z) + c$, για $z \in \mathbb{C}_\pi$.
Αυτό σημαίνει ότι η $F(z) + c$, $z \in \Omega$ είναι μια ολόμορφη (και άρα συνεχής) επέκταση του κύριου κλάδου του λογαρίθμου στον τόπο $\Omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Άτοπο.
Έχουμε δει ότι $\nexists$ συνεχής επέκταση της $\log z$ στο $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

② Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη με αρχικό σημείο $z_1 = \gamma(a)$ και τελικό $z_2 = \gamma(b)$. Υπολογίστε $\int_\gamma f(z)dz$ όταν

α) $f(z) = e^z$

β) $f(z) = \cos z$

γ) $f(z) = \sin z$

δ) $f(z) = z \log z$ $z \in \mathbb{C}_\pi = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$

υποθέτοντας στο (δ) ότι $[\gamma] \subseteq \mathbb{C}_\pi$ και

ε) $f(z) = z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 1$ υποθέτοντας ότι αν $n \leq -2$ τότε $[\gamma] \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Λύση

Σε όλες αυτές τις περιπτώσεις η f είναι συνεχής και έχει παράγουσα στο πεδίο ορισμού της.

α) $F(z) = e^z$, $\int_\gamma e^z dz = e^{\gamma(b)} - e^{\gamma(a)} = e^{z_2} - e^{z_1}$

β) $F(z) = \sin z$, $\int_\gamma \cos z dz = \sin z_2 - \sin z_1$

γ) $F(z) = -\cos z$, $\int_\gamma \sin dz = -\cos z_2 + \cos z_1 = \cos z_1 - \cos z_2$.

δ) Μια παράγουσα της $z \log z$ στο $\mathbb{C}_\pi$ είναι η $F(z) = \frac{z^2}{2} \log z - \frac{z^2}{4}$ άρα $\int_\gamma z \log z = F(z_2) - F(z_1)$

$\left(\int x \log x = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} \right)$

ε) Μια παράγουσα της z^n $(n \neq -1)$ στο πεδίο ορισμού της είναι η $F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1}$. Επομένως

$$\int_\gamma z^n dz = \frac{z_2^{n+1} - z_1^{n+1}}{n+1}.$$

③ Έστω $\gamma: [a,b] \to \Omega$ καμπύλη από το $z_1 = \gamma(a)$ στο $z_2 = \gamma(b)$. Τότε

α) Αν $\Omega = \mathbb{C}_\pi$ τότε $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \log z_2 - \log z_1$

β) Αν $\Omega = \mathbb{C}_{2\pi} = \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ τότε $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \log_{2\pi} z_2 - \log_{2\pi} z_1$

όπου για $z \neq 0$ είναι $\log_{2\pi} z = \log|z| + i \arg_{2\pi}(z)$

και $\arg_{2\pi}(z) = \theta \Leftrightarrow \theta \in [0, 2\pi)$ και $z = |z| e^{i\theta}$

Λύση

α) Αν $\Omega = \mathbb{C}_\pi$ τότε $\log' z = \frac{1}{z}$, $z \in \mathbb{C}_\pi$ και άρα $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} = \log z_2 - \log z_1$

β) Στον τόπο $\mathbb{C}_{2\pi}$ η συνάρτηση $z \to \log_{2\pi} z$ είναι μια παράγουσα της $\frac{1}{z}$. Άρα έχουμε $\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta} =$

$= \log_{2\pi} z_2 - \log_{2\pi} z_1$