ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

9/12/2022

27ο Μάθημα

! Ύλη Προόδου μέχρι 43

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Κεφ 3

(5) Δ.ο. αν $|z-1|<1$ τότε $\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n$. Χρησιμοποιήστε αυτό το αποτέλεσμα για να βρείτε το ανάπτυγμα της $f(z) = \frac{1}{z^2}$ σε δυναμοσειρά στον δίσκο $\Delta(1,1)$.

Λύση

Αν $w = 1-z$ τότε $|z-1|<1$ δηλ. για $|w|<1$ έχουμε ότι η $\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{1-w}$ δηλ. $\sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (z-1)^n = \frac{1}{z}, \text{ για } |z-1|<1$$

Παραγωγίζω στον $\Delta(1,1)$ (θεωρ. διαφόρισης δυναμοσειράς) και έχω $-\frac{1}{z^2} = \left(\frac{1}{z}\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n \cdot (z-1)^{n-1} \Rightarrow$

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n \, (z-1)^{n-1} \underset{j=n-1}{=\!=} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^{j+2} (j+1)(z-1)^j =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1) \cdot (z-1)^n, \quad z \in \Delta(1,1)$$

(9) Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Δ.ο:

α) Αν $\exists\, \delta>0$ ώστε $|a_n| \leq \delta \ \forall\, n \geq 0$ τότε $R \geq 1$

β) Αν $\exists\, \delta>0$ και ένα άπειρο υποσύνολο $M \subseteq \mathbb{N}$ ώστε $|a_n| \geq \delta$, $n \in M$, τότε $R \leq 1$.

$\Updownarrow$ υπακολουθία

Λύση

α) $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Για κάθε $n \geq 0$ είναι:
$|a_n| \leq \delta \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\delta}$ $\forall$ $n \geq 0. \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \limsup \sqrt[n]{\delta} =$
$= \lim \sqrt[n]{\delta} = 1 \Rightarrow R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \geq \dfrac{1}{1} = 1.$

β) Έστω $M = \{k_1 < k_2 < \dots < k_n < k_{n+1} < \dots\}$. Τότε $|a_{k_n}| \geq \delta$ $\forall$
$n \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt[k_n]{|\underbrace{a_n}_{a_{k_n}}|} \geq \sqrt[k_n]{\delta} \Rightarrow \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \geq \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{|a_{k_n}|} \geq$

$\geq \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[k_n]{\delta} = 1 > 0 \Rightarrow R = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \leq 1.$

11) Έστω ότι η δυναμοσειρά $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ έχει ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Δ.ο. οι ακόλουθες δυναμοσειρές έχουν την ίδια ακτίνα σύγκλισης.

α) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n z^n$ β) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^k \cdot a_n z^n$ όπου $k \in \mathbb{N}$ γ) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}$

Αν $p \neq 0$ είναι μιγαδικό πολυώνυμο τι μπορείτε να πείτε για την ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $\sum\limits_{n=1}^{\infty} p(n) a_n z^n$;

Λύση

α) Η (α) έχει ακτίνα σύγκλισης:
$R_1 = \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{n|a_n|}} = \dfrac{1}{\limsup(\sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|})} = \dfrac{1}{\underbrace{\lim \sqrt[n]{n}}_{1} \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|}} =$
$= \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = R$

• Η (β) έχει ακτίνα σύγκλισης

$$R_2 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n^k \cdot |a_n|}}$$

$$\limsup \sqrt[n]{n^k |a_n|} = \limsup\left((\sqrt[n]{n})^k \cdot \sqrt[n]{|a_n|} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^k \cdot \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} \Rightarrow$$

$$R_2 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n^k \cdot |a_n|}} = \frac{1}{1/R} = R$$

• Η (γ) έχει ακτίνα σύγκλισης:

$$R_3 = \frac{1}{\limsup \sqrt[n-1]{n|a_n|}}$$

Έχω ότι: $z \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n z^{n-1}}_{(\gamma)} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n z^n$

Η τελευταία δυναμοσειρά έχει ακτίνα σύγκλισης R άρα και η (γ) έχει ακτίνα σύγκλισης $R_3 = R$

• Αν $p(n) = b_0 \neq 0$ τότε $\sqrt[n]{|p(n)||a_n|} = \sqrt[n]{|b_0|}\sqrt[n]{|a_n|} \Rightarrow$

$$\limsup \sqrt[n]{|p(n) a_n|} = \underbrace{\lim \sqrt[n]{|b_0|}}_{\to 1} \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\sup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

Άρα η (δ) έχει ακτίνα σύγκλισης $R_4 = R$

Αν $p(n) = b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_1 n + b_0$ με $b_k \neq 0$ $(k = \deg p)$ τότε $\sqrt[n]{|p(n)|} = \sqrt[n]{n^k \left| b_k + \frac{b_{k-1}}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{k-1}} + \frac{b_0}{n^k} \right|} =$

$$= (\sqrt[n]{n})^k \underbrace{\sqrt[n]{\left| b_k + \frac{b_{k-1}}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{k-1}} + \frac{b_0}{n^k} \right|}}_{\xrightarrow{n\to\infty} b_k > 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1^k \cdot 1 = 1$$

(Αν $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$ με $a_n \to a > 0$ τότε $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$)

Άρα $\underbrace{\limsup \sqrt[n]{|p(n)|\,|a_n|}}_{= 1/R_4} = \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|p(n)|}}_{\to 1} \limsup \sqrt[n]{|a_n|} =$

$= \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$

$$\Rightarrow R_4 = R$$

(20) Δ.ο. $\forall \; z \in \mathbb{C}$, $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$

Λύση:

Για κάθε $n \geq 1$ $\quad \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^{n \cdot \log\left(1+\frac{z}{n}\right)}$ για $z \neq 0$.

Τότε $\quad n \cdot \log\left(1+\frac{z}{n}\right) = z \cdot \frac{\log\left(1+\frac{z}{n}\right)}{\frac{z}{n}} = z \cdot \frac{\log\left(1+\frac{z}{n}\right) - \log 1}{\frac{z}{n}}$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} z \cdot (\log)'(1) = z \cdot \frac{1}{1} = z \xRightarrow{\text{exp συνεχής}} \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^{n \cdot \log\left(1+\frac{z}{n}\right)} \longrightarrow$

$\xrightarrow[n\to\infty]{} e^z$

Για $\quad z = 0 \quad$ έχω $\quad \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 = e^0 = e^z$

(21) Ποιο είναι το μεγαλύτερο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ στο οποίο είναι ολόμορφες οι παρακάτω συναρτήσεις:

$z^{2/3}$, i^z, $(\sqrt{3})^z$, $z^{\sqrt{3}}$, $(-1)^z$, $(1-i)^{z^3}$, $(1+2i)^{f(z)}$ όπου $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι οι συναρτήσεις της μορφής a^z, με $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ είναι ολόμορφες στο $\mathbb{C}$, διότι

$(a^z)' = (e^{z \log a})' = e^{z \log a} \log a = a^z \log a$

Άρα οι $\quad i^z, (\sqrt{3})^z, (-1)^z \quad$ είναι ολόμορφες στον $\mathbb{C}$.

Για $z \in \mathbb{C}$:

• $(1-i)^{z^3} = e^{z^3 \log(1-i)} \Rightarrow \left((1-i)^{z^3}\right)' = e^{z^3 \log(1-i)} \cdot 3z^2 \log(1-i), \; z \in \mathbb{C}$

Η $(1-i)^{z^3}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$

• Για $z \in \mathbb{C}$ $(1+2i)^{f(z)} = e^{f(z)\log(1+2i)} \Rightarrow$

Για $z \in \mathbb{C}$ $\left((1+2i)^{f(z)}\right)' = e^{f(z)\log(1+2i)} \, f'(z) \log(1+2i)$

$\Rightarrow$ Η $(1+2i)^{f(z)}$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C}$.

• Οι συναρτήσεις $z^{2/3}$ και $z^{\sqrt{3}}$ είναι της μορφής z^{λ}, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ και άρα είναι ολόμορφες στο $\mathbb{C}_\pi$ και ασυνεχείς σε κάθε σημείο του $\{t \in \mathbb{R} : t \leq 0\}$

$\boxed{\text{Κεφ. 4}}$

13) Έστω γ κλειστή καμπύλη και f ολόμορφη σ' ένα ανοικτό σύνολο Ω ώστε $[\gamma] \subseteq \Omega$ και $f(\zeta) \neq 0 \;\forall\; \zeta \in [\gamma]$.

Δ.ο. $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta \in \mathbb{Z}$ $\quad (\gamma : [a,b] \to \Omega)$

Λύση

Από τον ορισμό του επικαμπ. ολ/ματος έχω $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))} \cdot \gamma'(t) dt$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{(f\circ\gamma)'(t)}{(f\circ\gamma)(t)} dt \overset{\sigma = f\circ\gamma}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\sigma'(t)}{\sigma(t)} dt \overset{\text{ορ.}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$= \delta_\sigma(0) \in \mathbb{Z}$ (σ κλειστή αφού γ κλειστή)

↳ δείκτης στροφής καμπύλης γύρω απ' το 0)

(11) Έστω $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$ δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης $R>0$. Αν $0<r<R$ και $\gamma_r(t)=a+r\cdot e^{it}, t\in[0,2\pi]$, υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{\gamma_r} f(z)dz$

Λύση

Η f έχει παράγουσα στον $\Delta(a,R)$ την $F(z)$ όπου $F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$ (έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης + το δείχνουμε (από θεωρία)

και $F'=f$ από Θ. διαφ. δυναμοσειρών)

Επίσης, αφού $0<r<R$, έχω ότι $\overline{\Delta(a,r)}\subseteq\Delta(a,R)$
$\Rightarrow [\gamma_r]\subseteq\Delta(a,R)$

Άρα από το Θ.Θ. του Απ. Λογ. για επικαμπύλια ολ/ματα έχουμε ότι $\int_{\gamma_r} f(z)dz=\int_{\gamma_r} F'(z)dz = F(\gamma_r(2\pi))-F(\gamma_r(0))=$

$= F(a+r)-F(a+r)=0.$ ■

(2) i) Υπολογίστε το $\int_\gamma z^4\,dz$, όπου $\gamma=[0,1+i]$ χρησιμοποιώντας τον τύπο $\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$

ii) Αν $\gamma_1=[0,1]+[1,1+i]$, ποια είναι η τιμή του $\int_{\gamma_1} z^4 dz$;

Λύση

i) $\gamma(t)=(1-\cancel{t})\cdot 0+t(1+i)=t\cdot(1+i)=t+it$, $t\in[0,1]\Rightarrow$

$\gamma'(t)=1+i,\ t\in[0,1]$.

Από ορισμό $\int_\gamma z^4\,dz=\int_0^1 \gamma^4(t)\,\gamma'(t)\,dt=\int_0^1 t^4(1+i)^4\cdot(1+i)dt$

$=(1+i)^5\int_0^1 t^4\,dt=(1+i)^5\cdot\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1=\frac{(1+i)^5}{5}$

ii) $\gamma_1 = [0,1] + [1, 1+i]$

Η συνάρτηση $f(z) = z^4$ έχει στο $\mathbb{C}$ παράγουσα την $F(z) = \frac{z^5}{5}$, $z \in \mathbb{C}$

Άρα $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} z^4\,dz = F(\gamma_1(2)) - F(\gamma_1(0)) =$

$= F(1+i) - F(0) = \frac{(1+i)^5}{5} - 0 = \frac{(1+i)^5}{5}$