Μάθημα 28ο ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

12/12/2022

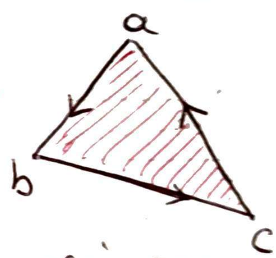
Κεφάλαιο 5

Το Θεώρημα του Cauchy και οι συνέπειες του

Το θεώρημα Cauchy και ο ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy

~~Θεώρημα~~ Έστω (a,b,c) μια διατεταγμένη τριάδα μιγαδικών. Συμβολίζουμε με $T = T(a,b,c)$ το κλειστό τρίγωνο με κορυφές a,b,c, δηλ.

$T = \{\kappa a + \lambda b + \mu c : \kappa,\lambda,\mu \geq 0,\ \kappa+\lambda+\mu = 1\}$



Το T είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει τα a,b,c.
Θεωρούμε ∂T το σύνορο του T (την περίμετρο του T) ως την κλειστή πολυγωνική γραμμή με κορυφές a,b,c. Έτσι $\partial T = [a,b]+[b,c]+[c,a]$.

Αν $f: \partial T \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \int_{[a,b]} f(z)\,dz + \int_{[b,c]} f(z)\,dz + \int_{[c,a]} f(z)\,dz$$

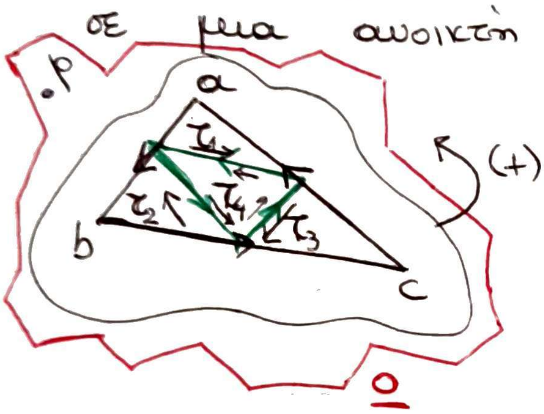
Θεώρημα (Goursat) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο, $p \in \Omega$ και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι ολόμορφη στο $\Omega \setminus \{p\}$. Τότε $\forall$ κλειστό τρίγωνο $T \subseteq \Omega$ είναι:

$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0.$$

Αποδ. Έστω κλειστό τρίγωνο $T \subseteq \Omega$ με κορυφές a,b,c. Υποθέτουμε χ.π.τ.γ ότι ο προσανατολισμός του T, που καθορίζεται από την κλειστή πολυγωνική γραμμή $\partial T = [a,b] + [b,c] + [c,a]$ συμπίπτει με τον θετικό προσανατολισμό του επιπέδου. Υποθέτουμε ακόμη ότι τα a, b, c δεν είναι συνευθειακά. (Αλλιώς είναι εύκολο ότι $\int_{\partial T} f = 0$).

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις για τα p και T.

I) Το σημείο $p \notin T$. Τότε η f είναι ολόμορφη σε μια ανοικτή περιοχή του T.



$p \notin T$.

Θεωρούμε τα μέσα των πλευρών του T και τα συνδέουμε μεταξύ τους. Έτσι χωρίζουμε το T σε τέσσερα T_1, T_2, T_3, T_4 όμοια με το αρχικό με λόγο ομοιότητας $\frac{1}{2}$

Θεωρούμε τα T_i, $i = 1,2,3,4$, ως θετικά προσανατολισμένα. Έχουμε ότι $\int_{\partial T} f(z)\,dz = \left(\int_{\partial T_1} + \int_{\partial T_2} + \int_{\partial T_3} + \int_{\partial T_4} \right) f(z)\,dz$ ①

Από την ① έχουμε $\left| \int_{\partial T} f(z)\,dz \right| \leq \sum_{j=1}^{4} \left| \int_{\partial T_j} f(z)\,dz \right|$

Όμως μια από τις τέσσερις απόλυτες τιμές είναι μεγαλύτερη από τις άλλες, άρα $\left| \int_{\partial T} f(z)\,dz \right| \leq 4 \left| \int_{\partial T_1} f(z)\,dz \right|$

όπου T_1 είναι κάποιο από τα T_i.
Επίσης $\ell(\partial T_1) = \frac{1}{2} \ell(\partial T)$ και $d(T_1) = \frac{1}{2} d(T)$

(όπου αν $A \subseteq \mathbb{C}$ τότε $d(A) = \sup_{z,w \in A} |z-w|$ και αν γ είναι καμπύλη τότε $\ell(\gamma)$ είναι το μήκος της γ)

Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία με το τρίγωνο T_1, στην θέση του T και επαγωγικά λαμβάνουμε μια ακολουθία όμοιων τριγώνων

$$T = T_0 \supseteq T_1 \supseteq T_2 \supseteq \dots \supseteq T_n \supseteq \dots \quad \text{ώστε} \quad \forall\, n = 0,1,2,\dots$$

$$\left|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\right| \leq 4 \left|\int_{\partial T_{n+1}} f(z)\,dz\right|,$$

$$\ell(\partial T_{n+1}) = \frac{1}{2}\ell(\partial T_n) \quad \text{και} \quad d(T_{n+1}) = \frac{1}{2} d(T_n) \Rightarrow$$

$$\forall\, n \geq 0 \qquad \left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| \leq 4^n \left|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\right|,$$

$$\ell(\partial T_n) = \frac{1}{2^n}\ell(\partial T) \quad \text{και} \quad d(T_n) = \frac{1}{2^n} d(T)$$

Η ακολουθία (T_n) είναι φθίνουσα ακολουθία μη κενών, κλειστών και φραγμένων υποσυνόλων του $\mathbb{C}$ με $d(T_n) \to 0$. Άρα από το Θ. Cantor έχουμε ότι:

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} T_n = \{z_0\} \quad \text{για κάποιο } z_0 \in \mathbb{C}$$

Για ν.δ.ο. $\int_{\partial T} f\,dz = 0$, θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$.

Επειδή η f έχει μιγαδική παράγωγο στο z_0 $\exists\, \delta > 0$ ώστε $\Delta(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ και $0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon.$$

Έστω $N \in \mathbb{N}$ ώστε $d(T_N) = \frac{1}{2^N} d(T) < \delta$, τότε για $z \in \partial T_N$ έχουμε $|z - z_0| \leq d(T_N) < \delta$ αφού $z, z_0 \in T_N$ και άρα $|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| \leq \varepsilon |z - z_0| \leq \varepsilon\, d(T_N)$ (*)

Επίσης έχουμε ότι $\int_{\partial T_N}[f(z)-f(z_0)-f'(z_0)(z-z_0)]\,dz =$

$= \int_{\partial T_N} f(z)\,dz$, αφού η συνάρτηση $g(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)$ ως πολυώνυμο (πρώτου βαθμού) έχει παράγουσα στο $\mathbb{C}$.

Από την ⊛ έπεται ότι $\left|\int_{\partial T_N} f(z)\,dz\right| \le \varepsilon\, d(T_N)\,\ell(\partial T_N)$

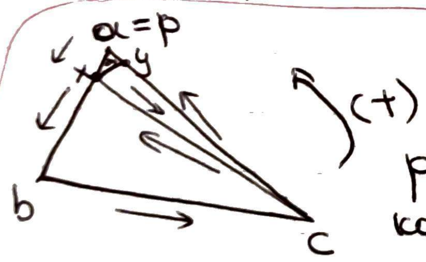
Αλλά $\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| \le 4^N \left|\int_{T_N} f(z)\,dz\right|$

Έτσι $\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| \le 4^N \varepsilon\, d(T_N)\,\ell(\partial T_N) =$

$$= 4^N \varepsilon\, \frac{d(T)}{2^N}\cdot\frac{\ell(\partial T)}{2^N} = \varepsilon\, d(T)\,\ell(\partial T)$$ και αυτό $\forall\ \varepsilon>0$.

Στέλνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε $\left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right| = 0 \Rightarrow \int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.

II) Υποθέτουμε ότι το p είναι κορυφή του T, έστω $p=a$



$p=a$ κορυφή του T.

Επειδή η f είναι ολόμορφη σε περιοχή των τριγώνων $T(x,b,c)$ και $T(x,c,y)$. Από την περίπτωση (I) έχω:

$$\int_{\partial T(x,b,c)} f\,dz = \int_{\partial T(x,c,y)} f\,dz = 0$$ και συνεπώς

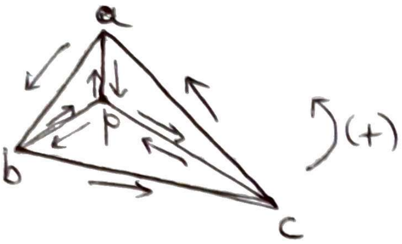
$$\int_{\partial T} f(z)\,dz = \int_{\partial T(a,x,y)} f(z)\,dz$$

Έτσι, αφού f συνεχής στο $p=a$, έχουμε

$$\left|\int_{\partial T(a,x,y)} f(z)\,dz\right| \le \|f\|_T \cdot \ell(\partial T(a,x,y)) =$$
$$= \|f\|_T\,(|a-x|+|x-y|+|y-a|) \xrightarrow[y\to a]{x\to a} \underbrace{\|f\|_T\cdot 0}_{=0}$$

Άρα $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$.

III) Το σημείο p είναι εσωτερικό του τριγώνου.

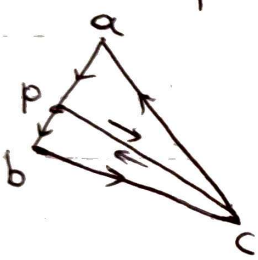


Παρατηρούμε ότι $\int_{\partial T} f(z)dz =$

$$= \int_{\partial T(p,a,b)} f(z)dz + \int_{\partial T(p,b,c)} f(z)dz + \int_{\partial T(p,c,a)} f(z)dz \quad (**)$$

Όμως το p είναι κορυφή και για τα τρία αυτά τρίγωνα, άρα η (**) δίνει ότι $\int_{\partial T} f(z)dz = 0+0+0=0$.

IV) Το p είναι εσωτερικό σημείο πλευράς του T.



όμοια με το (III) με δύο τρίγωνα. ∎

Παρατήρηση

Αν υποθέσουμε ότι η παράγωγος f' κάθε ολόμορφης συνάρτησης f είναι συνεχής, τότε το θεώρημα Goursat είναι απλή συνέπεια του Θ. Green.

Αρκεί να αποδείξουμε την περίπτωση (I) του προηγούμενου θεωρήματος.

Έστω $f=u+iv$. Τότε $\int_{\partial T} f(z)dz = \int_{\partial T}(u\,dx - v\,dy) + i\int_{\partial T}(v\,dx + u\,dy)$

Επειδή $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$ οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ είναι συνεχείς. Άρα από Θ. Green ⤳

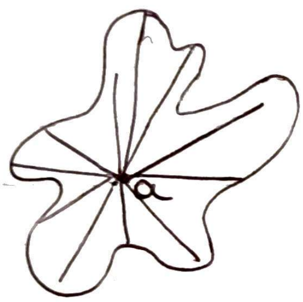
⇝ στα δύο πραγματικά επικαμπύλια ολ/ματα έχουμε $\int_{\partial T} f(z)\,dz = -\iint_T \underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{0\ (C-R)} dx\,dy + i\iint_T \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{0\ (C-R)} dx\,dy$

$=0,$

από τις εξισώσεις C-R.

Υπενθύμιση:

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. Το Ω λέγεται <u>αστρόμορφο</u> ως προς το σημείο $a \in \Omega$ αν $\forall\, z \in \Omega$ ισχύει ότι το ευθύγραμμο τμήμα $[a,z] \subseteq \Omega$



Παρατηρούμε ότι:

α) Κάθε κυρτό σύνολο είναι αστρόμορφο ως προς κάθε σημείο του.

β) Κάθε αστρόμορφο σύνολο είναι συνεκτικό.

Παραδείγματα αστρόμορφων τόπων που δεν είναι κυρτοί είναι κάθε σύνολο της μορφής $\mathbb{C}\setminus[z,\infty)$ όπου με $[z,\infty)$ συμβολίζουμε μια κλειστή ημιευθεία με κορυφή το z και γενικότερα της μορφής $K\setminus[z,\infty)$, όπου $z\in K$ και K ανοικτό κυρτό.

Αν $a\in\mathbb{C}$, τότε το σύνολο $\mathbb{C}\setminus\{a\}$ είναι μη αστρόμορφος τόπος.

SOS

ΠΡΟΟΔΟΣ
κεφ. 2,3,4.