Σημείωση

Το προηγούμενο Λήμμα ισχύει και με την ασθενέστερη υπόθεση ότι η συνάρτηση φ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Μάθημα 31 **16/12/2022**

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ καμπύλη και $\varphi : [\gamma] \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Θέτουμε $\Omega = \mathbb{C} \setminus [\gamma]$ και

$$f(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta \quad , z \in \Omega$$

Τότε η f είναι αναλυτική στο Ω και αν $z \in \Omega$ τότε

$$f^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta \quad , n \geq 0$$

Μάλιστα η f αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου z και ακτίνας σύγκλισης $r \geq d(z, [\gamma])$ με συντελεστές $\frac{f^{(n)}(z)}{n!}$, $n \geq 0$

Απόδειξη

Αν $z \in \Omega$ τότε $f(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \int_a^b \frac{\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}{\gamma(t) - z}\, dt$

Επειδή η συνάρτηση $t \in [a,b] \longmapsto \varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \in \mathbb{C}$ είναι φραγμένη με πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών έπεται ότι είναι Riemann ολοκληρώσιμη

Έτσι έχουμε το ζητούμενο από το προηγούμενο Λήμμα με την τελευταία σημείωση.

Παραδείγματα

Οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι αναλυτικές στο πεδίο ορισμού τους.

α) $f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\sin t}{2i - z}\, dt \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \{2i\}$

β) $f(z) = \int_0^{1} \frac{t^2}{t^3 - z}\, dt \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \{t^3, t \in [0,1]\} = \mathbb{C} \setminus [0,1]$

γ) $f(z) = \int_a^{b} \frac{\sqrt{t} + it^2}{\log t - z}\, dt \quad$, όπου $0 < a < b$ και $z \in \mathbb{C} \setminus [\log a, \log b]$

δ) $f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{e^{t^2}}{\cos t - z}\, dt \quad , z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$

ε) $f(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{t^2} + i\cos t}{e^{it} - z}\, dt \quad , z \in \mathbb{C} \setminus \{e^{it} : t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

Το πρώτο τεταρτοκύκλιο του μοναδιαίου κύκλου

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (Αναλυτικότητα Ολόμορφων Συναρτήσεων)

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη. Τότε η f είναι αναλυτική στο Ω και αν $\overline{\Delta(a,r)} \subseteq \Omega$ $(r > 0)$ τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \quad , z \in \Delta(a,r)$$

όπου $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}\, d\zeta \quad , n \geq 0$

<u>Απόδειξη</u>

Επειδή ο δίσκος $\overline{\Delta(a,r)}$ είναι συμπαγής και $\overline{\Delta(a,r)} \subseteq \Omega$ έπεται ότι υπάρχει $R > r$ ώστε $\Delta(a,R) \subseteq \Omega$ (π.χ. μπορούμε να θέσουμε $R = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$)

Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο του Cauchy για την ολόμορφη συνάρτηση f περιορισμένη στο ανοικτό και κυρτό σύνολο $\Delta(a,R)$ και την καμπύλη $\gamma(t) = a + r \cdot e^{it}$ $t \in [0, 2\pi]$ (δηλ. ο $C(a,r)$)

Έπεται ότι $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C(a,r)} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, $z \in \Delta(a,r)$

Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η συνάρτηση $g(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C(a,r)} \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, $z \in \mathbb{C} \setminus C(a,r)$

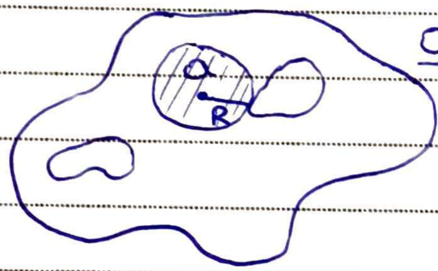
είναι μια <u>αναλυτική επέκταση</u> της f στο ανοικτό σύνολο $\mathbb{C} \setminus C(a,r)$ (προφανώς $\Delta(a,r) \subseteq \mathbb{C} \setminus C(a,r)$)

Άρα η g αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το a, και ακτίνα σύγκλισης $\geq r$ και με συντελεστές $c_n = \dfrac{g^{(n)}(a)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C(a,r)} \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta$, $n \geq 0$

Επειδή οι συναρτήσεις g και f ταυτίζονται στο δίσκο $\Delta(a,r)$ έπεται ότι $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ για $n \geq 0$.

Παρατήρηση

Είναι σαφές από την απόδειξη του τελευταίου Θεωρήματος (επειδή μπορούμε να θεωρήσουμε το r οσοδήποτε κοντά στο $R = d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$) ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς στην οποία αναλύεται η f είναι $\geq R$.
Άρα $\forall a \in \Omega$ η ολόμορφη f αναλύεται σε δυναμοσειρά κέντρου a στον μεγαλύτερο δίσκο $\Delta(a,r)$ που περιέχεται στο Ω



ΘΕΩΡΗΜΑ (Εκτιμήσεις του Cauchy - Ανισότητες Cauchy)

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $\overline{\Delta(a,r)} \subseteq \Omega$ και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση.
Θέτουμε $M(a,r) = \sup\{|f(z)| : |z-a| = r\}$
Τότε ισχύει η ανισότητα

$$|f^{(n)}(a)| \leq n! \, \frac{M(a,r)}{r^n}, \quad n \geq 0$$

Απόδειξη

Από το τελευταίο Θεώρημα έχω

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta \quad , n\geq 0$$

Συνεπώς $\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\,d\zeta\right| \leq$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\zeta\in C(a,r)} \left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}\right| 2\pi r \leq \frac{M(a,r)}{r^{n+1}}\cdot r = \frac{M(a,r)}{r^n}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο.

$\boxed{\text{ΟΡΙΣΜΟΣ}}$

Μια ολόμορφη συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ λέγεται ακέραια συνάρτηση

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (Liouville)

Κάθε ακέραια και φραγμένη συνάρτηση ($f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$) είναι σταθερή.

Απόδειξη

Έστω ότι $|f(z)|\leq M \quad \forall z\in\mathbb{C}$.

Τότε από τις εκτιμήσεις του Cauchy για $n=1$, για κάθε σημείο $a\in\mathbb{C}$ και για κάθε ακτίνα $r>0$

βρίσκουμε $|f'(a)| \leq 1!\,\frac{M(a,r)}{r} \leq \frac{M}{r} \xrightarrow{r\to+\infty} 0$

Άρα $f'(z)=0, \forall z\in\mathbb{C}$ και έτσι η f είναι σταθερή.

Από το Θ. Liouville λαμβάνουμε μια ακόμη απόδειξη του Θεμελιώδους Θεωρήματος της Άλγεβρας

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε μη σταθερό μιγαδικό πολυώνυμο έχει μια τουλάχιστον ρίζα (στο $\mathbb{C}$)

Απόδειξη

Έστω $p(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$

ένα πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$ για το οποίο το Θεώρημα δεν ισχύει.

Τότε $p(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ και άρα η συνάρτηση

$$F(z) = \frac{1}{p(z)}$$ είναι ακέραια συνάρτηση

Θα δείξουμε ότι η F είναι φραγμένη στο $\mathbb{C}$

Για να το δούμε αυτό παρατηρούμε ότι

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}\right)$$

απ' όπου έπεται ότι $\lim\limits_{z \to \infty} p(z) = \infty$

Συνεπώς $\lim\limits_{z \to \infty} F(z) = 0$ και έτσι για $\varepsilon = 1$ υπάρχει

$r > 0$ ώστε $|z| \geq r \Rightarrow |F(z)| \leq 1$

Επειδή η F είναι συνεχής και ο δίσκος $\overline{\Delta(0,r)}$ είναι συμπαγές σύνολο, η $F|_{\overline{\Delta(0,r)}}$ είναι φραγμένη

Έστω $M = \sup_{|z|\le r} |F(z)|$, τότε $|F(z)| \le \max\{1, M\}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

Άρα F ακέραια και φραγμένη $\xrightarrow{\text{Liouville}}$ F σταθερή

$\Rightarrow$ Το πολυώνυμο p είναι σταθερό. ΑΤΟΠΟ

$\boxed{\text{ΘΕΩΡΗΜΑ}}$ (Ολοκληρωτικός τύπος του Cauchy για παραγώγους)

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοιχτό τόπος, $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση και $\gamma: [a,b] \to \Omega$ κλειστή καμπύλη.
Αν $z \in \Omega \setminus [\gamma]$ και $n \ge 0$ τότε

$$f^{(n)}(z) \cdot \delta_\gamma(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \qquad (1)$$

__Απόδειξη__
Για $n=0$ η (1) μας δίνει τον γνωστό τύπο του Cauchy δηλαδή

$$f(z) \cdot \delta_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega \setminus [\gamma]$$

Από προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι η συνάρτηση $g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz$, $z \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$

είναι μια αναλυτική επέκταση της συνάρτησης

$h(z) = f(z)\,\delta_\gamma(z)$ στο σύνολο $\mathbb{C}\setminus[\gamma]$
(προφανώς $\Omega\setminus[\gamma] \subseteq \mathbb{C}\setminus[\gamma]$)

Έτσι αν $\overline{\Delta(a,r)} \subseteq \Omega\setminus[\gamma]$, τότε η g αναλύεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το a στον δίσκο $\Delta(a,r)$ με συντελεστές $c_n = \dfrac{g^{(n)}(a)}{n!}$, $n \geq 0$

όπου $$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta, \quad n \geq 0 \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι εφόσον (ο δείκτης στροφής είναι σταθερός στις συνεκτικές συνιστώσες του Ω) ο δίσκος $\Delta(a,r)$ είναι συνεκτικό υποσύνολο του Ω (ως κυρτό σύνολο) ισχύει ότι $\delta_\gamma(z) = \delta_\gamma(a)$, $\forall z \in \Delta(a,r)$

Επειδή $g(z) = f(z)\,\delta_\gamma(z)$, για $z \in \Delta(a,r)$
έπεται ότι $g(z) = f(z)\cdot\delta_\gamma(a)$, για $z \in \Delta(a,r)$

Συνεπώς $g^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)\,\delta_\gamma(a)$, $n \geq 0$

Οπότε $$c_n = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} = \frac{f^{(n)}(a)\,\delta_\gamma(a)}{n!} \qquad (3)$$

Από τις (2), (3) συνεπάγουμε τον ζητούμενο τύπο (1) για $z = a$ και άρα για τυχόν $z \in \Omega\setminus[\gamma]$