ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ 19/12/22

32ο Μάθημα

Θεώρημα (Morera) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής ώστε $\forall$ κλειστό τρίγωνο $\Delta \subseteq \Omega$ να ισχύει ότι $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω.

Αποδ.

Από το θεώρημα ύπαρξης παράγουσας σε κυρτούς τόπους η f έχει παράγουσα σε κάθε ανοικτό δίσκο του Ω. Δηλαδή αν $a \in \Omega$ και $r>0$: $\Delta(a,r) \subseteq \Omega$ τότε $\exists$ ολόμορφη $F: \Delta(a,r) \to \mathbb{C}$: $F'(z) = f(z)$, για $z \in \Delta(a,r)$. Επειδή η F είναι ολόμορφη στον $\Delta(a,r)$ έπεται ότι και η F' είναι ολόμορφη στον $\Delta(a,r)$ δηλ. f ολόμορφη στον $\Delta(a,r) \Rightarrow$ Η f έχει μιγ. παράγωγο στο a και αυτό $\forall\, a \in \Omega \Rightarrow f$ ολόμορφη στο Ω.

Πόρισμα: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, $a \in \Omega$ και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής ώστε $f|_{\Omega \setminus \{a\}}$ ολόμορφη. Τότε η f είναι ολόμορφη στο Ω.

Αποδ. Έστω $\Delta \subseteq \Omega$ τυχόν κλειστό τρίγωνο. Τότε από Θ. Goursat έπεται ότι $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$. Έτσι από το Θ. Morera η f είναι ολόμορφη στο Ω.

Παραδείγματα

① Αποδείξτε ότι $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cdot \cos(\sin\theta)d\theta = 2\pi$

Λύση

Από τον τύπο του Cauchy έχουμε ότι: $\rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow 1 = e^0 \underset{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,1)} \frac{e^J}{J-0}\,dJ = \frac{1}{2\pi \cancel{i}}\int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{\cancel{e^{i\theta}}}\,\cancel{i e^{i\theta}}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\,d\theta \Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\,d\theta = 2\pi$$

$(*) = e^0 \delta(0)_{(0,1)} =$

Παρατηρούμε ότι $e^{e^{i\theta}} = e^{\cos\theta + i\sin\theta} = e^{\cos\theta}\cdot e^{i\sin\theta} =$

$= e^{\cos\theta}(\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta))$

$$\Rightarrow 2\pi = \int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\,d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta) + i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\,d\theta$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta)\,d\theta = 2\pi \text{ και } \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\sin\theta)\,d\theta = 0.$$

2. Αν $M \geq 0$ και f ακέραια συνάρτηση ώστε $\operatorname{Re} f(z) \leq M$ $\forall z \in \mathbb{C}$, τότε η f είναι σταθερή.

Λύση Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(z) = e^{f(z)}$, $z \in \mathbb{C}$. Τότε η F ακέραια και $|F(z)| = e^{\operatorname{Re} f(z)} \leq e^M$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Από το θεώρημα του Liouville η F είναι σταθερή στο $\mathbb{C}$. Τότε η $F'(z) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\neq\\0}}{e^{f(z)}}\cdot f'(z) = 0 \xRightarrow[\forall w \in \mathbb{C}]{e^w \neq 0} f'(z) = 0,\ z \in \mathbb{C} \Rightarrow f = \text{σταθερή}.$$

3. Έστω f ακέραια συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\exists$ σταθερές $M, R > 0$, $N \in \mathbb{N}$ ώστε $|f(z)| \leq M|z|^N$ $\forall$ $|z| \geq R$. Αποδείξτε ότι η f είναι πολυώνυμο βαθμού $\leq N$.

Λύση Επειδή η f είναι ακέραια αναλύεται σε σειρά Taylor γύρω από κάθε $a \in \mathbb{C}$ με άπειρη ακτίνα σύγκλισης. Επιλέγουμε $a = 0$ και έχουμε: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$, όπου $c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n \geq 0$

Έστω τυχόν ακέραιο $n \geq N+1$. Από τις εκτιμήσεις του Cauchy έχουμε $\forall\, r > R$ ότι:

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq \frac{M(0,r)}{r^n}$$

Όμως $M(0,r) = \sup\{|f(\zeta)| : |\zeta| = r\} \leq M \cdot |\zeta|^N = M \cdot r^N \Longrightarrow$

$$\frac{|f^{(n)}(0)|}{n!} \leq M \frac{r^N}{r^n} = \frac{M}{\underbrace{r^{n-N}}_{>0}} \xrightarrow{r \to +\infty} 0$$ απ' όπου έπεται ότι

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0 \quad \forall\, n \geq N+1 \Rightarrow \text{ζητούμενο.}$$

(4) Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο και $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$, $n \geq 1$ ακολουθία ολόμορφων συναρτήσεων η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω σε μια συνάρτηση $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι η f είναι ολόμορφη.

Λύση

Επειδή η (f_n) συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή $\subseteq \Omega$ έπεται ότι η f είναι συνεχής στο Ω (γιατί;) (f_n συνεχείς στο Ω ως ολόμορφες).

Έστω $\Delta \subseteq \Omega$ κλειστό τρίγωνο. Τότε το σύνορό του, $\partial\Delta$ είναι προφανώς συμπαγές και άρα $f_n \to f$ ομοιόμορφα επί του $\partial\Delta$.

$\Rightarrow \int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz \xrightarrow{n \to \infty} \int_{\partial\Delta} f(z)\,dz$. Από το θεώρημα Goursat έχουμε ότι $\int_{\partial\Delta} f_n(z)\,dz = 0 \ \forall\, n \geq 1$ και άρα $\int_{\partial\Delta} f(z)\,dz = 0$. Έτσι από το Θ. Morera η f είναι ολόμορφη συνάρτηση.

Ρίζες ολόμορφων συναρτήσεων και η αρχή της ταυτότητας

<u>Ορισμός</u>: Αν $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση τότε ένα σημείο $a \in \Omega$ λέγεται ότι είναι <u>ρίζα</u> της f αν $f(a)=0$. Το σύνολο των ριζών της f θα το συμβολίζουμε με $Z(f)$. Αν η f δεν είναι ταυτοτικά 0 θα γράφουμε $f \not\equiv 0$ $(Z(f) \neq \Omega)$

<u>Λήμμα</u>: Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ δυναμοσειρά η οποία συγκλίνει για $|z-a|<r$ $(r>0)$(*). Τότε $\exists\, m \in \mathbb{N}$ και μια δυναμοσειρά g(**), που συγκλίνει για $|z-a|<r$ ώστε $g(a)\neq 0$, και $f(z)=(z-a)^m g(z)$, $z \in \Delta(a,r)$.

(*) ώστε $f(a)=0$ (**) κ'

<u>Απόδ.</u>

Το σύνολο των θετικών ακεραίων $N=\{k\geq 1 : c_k \neq 0\}$ είναι $\neq \emptyset$.

Θέτουμε $m = \min N$. Τότε $c_0=c_1=c_2=\dots=c_{m-1}=0$ και συνεπώς $\forall\, z\in\Delta(a,r)$ ισχύει ότι

$$f(z) = c_m(z-a)^m + \dots + c_{m+n}(z-a)^{m+n} + \dots = (z-a)^m \underbrace{\left(c_m + c_{m+1}(z-a) + \dots + c_{m+n}(z-a)^n + \dots\right)}_{g(z)}$$

Θέτουμε $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+n}(z-a)^n$, για $z \in \Delta(a,r)$ και παρατηρούμε ότι $g(a) = c_m \neq 0$.

<u>Παρατήρηση</u>:

Επειδή $g(a)=c_m\neq 0$ και η g είναι συνεχής στο a, $\exists\, 0<r_1\leq r$ ώστε $g(z)\neq 0$ $\forall\, z\in\Delta(a,r_1)$. Επομένως $f(z)\neq 0$ $\forall\, z \in \Delta(a,r_1)$ με $z\neq a$. Έτσι ορίζουμε το εξής: Μια ρίζα a μιας ολόμορφης συνάρτησης $f: \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ λέγεται <u>μεμονωμένη</u> αν $\exists\, r>0$: $\Delta(a,r)\subseteq\Omega$ και $f(z)\neq 0$ $\forall\, z\in\Delta(a,r)$ με $z \neq a$.

Λήμμα Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό και $f: \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Τότε το σύνολο $Z(f)' \cap \Omega$ των σημείων συσσώρευσης του $Z(f)$ μέσα στο Ω είναι ταυτόχρονα ανοικτό και κλειστό στο Ω

Αποδ.

Η f είναι συνεχής ως ολόμορφη και βέβαια $Z(f) = f^{-1}(\{0\})$
Επειδή τα μονοσύνολα του $\mathbb{C}$ είναι κλειστά σύνολα, έπεται ότι το $Z(f)$ είναι κλειστό στο Ω
Ως γνωστόν το σύνολο των σ.σ. A' ενός υποσυνόλου A του $\mathbb{C}$ είναι κλειστό, επομένως $Z(f)' \cap \Omega$ είναι κλειστό στο Ω, και άρα $Z(f)' \cap \Omega = Z(f)'_{\Omega} \subseteq \overline{Z(f)_{\Omega}} = Z(f)$.
Μένει να δείξουμε ότι το $Z(f)' \cap \Omega$ είναι ανοικτό στο Ω (ισοδύναμα ανοικτό στο $\mathbb{C}$, εφόσον Ω ανοικτό στο $\mathbb{C}$).
Υποθέτουμε χ.π.τ.γ. ότι $Z(f)' \cap \Omega \neq \emptyset$ και θεωρούμε ένα σημείο $a \in Z(f)' \cap \Omega$. Αφού το Ω είναι ανοικτό $\subseteq \mathbb{C}$, $\exists$ $r>0$: $\overline{\Delta(a,r)} \subseteq \Omega$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
I) Έστω ότι $f|_{\Delta(a,r)} \equiv 0$. Τότε $\Delta(a,r) \subseteq Z(f) \subseteq \Omega$ και συνεπώς $\Delta(a,r) \subseteq \Delta(a,r)' \subseteq Z(f)'$. Έπεται ότι $\Delta(a,r) \subseteq Z(f)' \cap Z(f) \subseteq$
$\subseteq Z(f)' \cap \Omega$.

II) Έστω ότι $f|_{\Delta(a,r)} \neq 0$. Θα οδηγηθούμε σε άτοπο.
Άρα κατ' ανάγκη θα ισχύει η (I) για το τυχόν $a \in Z(f)' \cap \Omega$ και άρα το $Z(f)' \cap \Omega$ θα είναι ανοικτό στο Ω.

Η f είναι αναλυτική συνάρτηση ως ολόμορφη, άρα παραστάσιμη με δυναμοσειρά στο δίσκο $\Delta(a,r)$ και επειδή $f(a)=0$ από προηγούμενο λήμμα $\exists$ $m \in \mathbb{N}$ και δυναμοσειρά g κέντρου a που συγκλίνει για $|z-a|<r$, ώστε $g(a) \neq 0$ και $f(z) = (z-a)^m g(z)$ $z \in \Delta(a,r)$. Από προηγούμενη παρατήρηση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(z) \neq 0$ $\forall$ $z \in \Delta(a,r) \setminus \{a\}$, άτοπο γιατί το a είναι σ.σ. του $Z(f$