ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

10/1/2023

ΚΑΛΗ ΧΡΟΝΙΑ!!

36ο ΜΑΘΗΜΑ

Συνέχεια Απόδειξης

β) "⇒" Αν $n>m$ και $0<\rho<R$ τότε $a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} \frac{g(\zeta)}{(\zeta-a)^m}\cdot\frac{1}{(\zeta-a)^{-n+1}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} g(\zeta)(\zeta-a)^{\underbrace{n-m-1}_{\geq 0}}d\zeta =$$

$$=0 \Rightarrow a_{-n}=0 \quad \forall\, n>m$$

"⇐" Από την υπόθεση $a_{-m}\neq 0$ και

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n+\underbrace{\left(\frac{a_{-1}}{z-a}+\dots+\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}\right)}, \quad 0<|z-a|<R$$

Τότε η $f(z)-\left(\frac{a_{-1}}{z-a}+\dots+\frac{a_{-m}}{(z-a)^m}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$

$0<|z-a|<R$ έχει στο a επουσιώδη ανωμαλία

άρα το a είναι πόλος τάξης m για την f.

γ) Θέτουμε $M=\{n\in\mathbb{N}: a_{-n}\neq 0\}$

"⇒" Έστω ότι το a είναι ουσιώδης ανωμαλία της f. Θ.δ.ο. M άπειρο σύνολο.

Έστω, για άτοπο, ότι το M είναι πεπερασμένο.
Αν $M=\emptyset$ τότε από το (α) του θεωρήματος η f θα είχε στο a επουσιώδη ανωμαλία, ΑΤΟΠΟ.
Αν $M\neq\emptyset$, θέτοντας $m=\max M$ θα είχαμε $a_{-m}\neq 0$ και $a_{-n}=0\ \forall\, n>m$, άρα από το (β) θα είχαμε πόλο στο a για την f, ΑΤΟΠΟ.
Άρα το M είναι άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$.

"$\Leftarrow$" Έστω ότι το Μ είναι άπειρο σύνολο. Τότε από τα (α), (β) του θεωρήματος το α δεν μπορεί να είναι επουσιώδης ανωμαλία αλλά ούτε και πόλος για την f. Άρα το α είναι ουσιώδης ανωμαλία της f. ■

Αν $K(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$, όπως πριν, τότε το $K(z)$ λέγεται <u>κύριο μέρος</u> της ανωμαλίας α της f.

ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΙΠΩΝ

<u>Ορισμός:</u> Έστω $f: \Delta(a,0,R) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση με ανάπτυγμα Laurent:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}, \quad 0<|z-a|<R$$

Ο συντελεστής <u>a_{-1}</u> ονομάζεται το <u>ολοκληρωτικό υπόλοιπο</u> της f στο α και συμβολίζεται με <u>$Res(f,a)$</u>

<u>Παρατηρήσεις</u>

1. Αν η f έχει επουσιώδη ανωμαλία στο α, τότε $Res(f,a) = a_{-1} = 0$

2. Αν το α είναι πόλος τάξης m της f, τότε

$$a_{-1} = \frac{g^{(m-1)}(a)}{(m-1)!}, \quad \text{όπου} \quad f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}, \; 0<|z-a|<R,$$

$g(a) \neq 0$ (θεώρημα των πόλων)

Σημείωση Έστω f, a όπως πριν.

$$\operatorname{Res}(f,a) \underset{\text{ορσ}}{=} a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,\rho)} f(\zeta)\,d\zeta, \quad 0<\rho<R$$

Θεώρημα (ολοκληρωτικών υπολοίπων)

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ αστρόμορφος τόπος, $a_1, a_2, \dots, a_N \in \Omega$ και $f: \Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_N\} \to \mathbb{C}$ ολόμορφη συνάρτηση. Αν $\gamma: [a,b] \to \Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$ κλειστή καμπύλη, τότε:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^{N} \operatorname{Res}(f, a_k)\,\delta_\gamma(a_k)$$

Αποδ.

Υποθέτουμε ότι $N=1$, δηλ. το σημείο $a=a_1$ είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f.
Έστω $R>0$: $\Delta(a,R) \subseteq \Omega$. Θεωρούμε το ανάπτυγμα Laurent της f στο δακτύλιο $\Delta(a,0,R)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}}_{K(z)}, \quad z \in \Delta(a,0,R)$$

Τότε η συνάρτηση $g(z) = f(z) - K(z)$ έχει στο a επουσιώδη ανωμαλία. Από το Θ. Cauchy θα έχουμε:

$$\int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta = 0 \iff \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma K(\zeta)\,d\zeta \iff$$

$$\iff \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma \left(\frac{a_{-1}}{\zeta-a} + \frac{a_{-2}}{(\zeta-a)^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{(\zeta-a)^n} + \dots \right) d\zeta$$

ομοιόμορφη σύγκλιση, στα συμπαγή του $\mathbb{C}\setminus\{a\}$

$$a_{-1}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-a} + a_{-2}\underbrace{\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^2}}_{\substack{\text{Θ.Θ.Α.Λ} \\ = 0 \text{ (έχει παράγουσα)}}} + \dots + a_{-n}\underbrace{\int_\gamma \frac{d\zeta}{(\zeta-a)^n}}_{0 \text{ (έχει παράγουσα)}} + \dots$$

$$= a_{-1}\int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta-a} = 2\pi i\, a_{-1}\,\delta_\gamma(a) = 2\pi i \operatorname{Res}(f,a)\,\delta_\gamma(a)$$

Στην γενική, όπου $N \geq 2$, θεωρούμε τα κύρια μέρη $K_1, \dots, K_N$ των ανωμαλιών $a_1, a_2, \dots, a_N$ της f. Τότε (η συνάρτηση $K_1 + K_2 + \dots + K_N$ είναι ολόμορφη στο $\mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_N\}$) και η συνάρτηση $g(z) = f(z) - (K_1(z) + K_2(z) + \dots + K_N(z))$ έχει επουσιώδη ανωμαλία σε καθεμία από τα σημεία $a_1, a_2, \dots, a_N$. Έτσι από το θ. Cauchy έχουμε:

$$\int_\gamma g(\zeta)\,d\zeta = 0 \iff \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta = \int_\gamma K_1(\zeta)\,d\zeta + \dots + \int_\gamma K_N(\zeta)\,d\zeta$$

και συνεχίζουμε όπως πριν.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΣ ΚΑΝΟΝΑΣ L' Hospital

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ τόπος, $a \in \Omega$ και $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφες, οι οποίες έχουν ρίζα στο a. Η f έχει ρίζα τάξης k στο a και η g έχει ρίζα τάξης m στο a. Τότε το a είναι μεμονωμένη ανωμαλία για την $\frac{f}{g}$, η οποία είναι:

α) Επουσιώδης αν $k \geq m$. Στην περίπτωση αυτή,

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } k > m, \text{ δηλ. ρίζα τάξης } k-m \text{ για την } \frac{f}{g} \\ \frac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}, & \text{αν } m = k. \end{cases}$$

β) Πόλος τάξης $m-k$ για την $\frac{f}{g}$ αν $m > k$

Αποδ.

Έστω $\Delta(a, R) \subseteq \Omega$. Τότε $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ και $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$, $z \in \Delta(a, R)$.

Το a είναι ρίζα τάξης k της f. Άρα $0 = f(a) = f'(a) = \dots = f^{(k-1)}(a)$ και $f^{(k)}(a) \neq 0$.

Το a είναι ρίζα τάξης m της g.
Άρα $0 = g(a) = g'(a) = \dots = g^{(m-1)}(a)$ και $g^{(m)}(a) \neq 0$.

Έπεται ότι $\left.\begin{array}{l} a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0, \quad a_k \neq 0 \\ \text{και} \quad b_0 = b_1 = \dots = b_{m-1} = 0, \quad b_m \neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f(z) = a_k (z-a)^k + \dots + a_{k+n} (z-a)^{k+n} + \dots =$

$= (z-a)^k \left(a_k + a_{k+1}(z-a) + \dots + a_{k+n}(z-a)^n + \dots \right)$

και όμοια $g(z) = (z-a)^m \underbrace{\left(b_m + b_{m+1}(z-a) + \dots + b_{m+n}(z-a)^n + \dots \right)}_{g_1(z)}$ και $f_1(a) = a_k \neq 0$, $g_1(a) = b_m \neq 0$

Για z κοντά στο a: $\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{(z-a)^k}{(z-a)^m} \cdot \dfrac{f_1(z)}{g_1(z)} =$

$= (z-a)^{k-m} \dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}$ με $\left(\dfrac{f_1}{g_1}\right)(a) \neq 0$.

$\Rightarrow$ Για $k > m$ έχω $\left(\dfrac{f}{g}\right)(a) = 0$ με τάξη $k-m$.

Αν $k = m$ έχω ότι $\lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f_1(a)}{g_1(a)} = \dfrac{a_k}{b_k} = \dfrac{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}}{\frac{g^{(k)}(a)}{k!}}$

$= \dfrac{f^{(k)}(a)}{g^{(k)}(a)}$

Για $m > k$ έχω κοντά στο a: $\dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{1}{(z-a)^{\overbrace{m-k}^{>0}}} \dfrac{f_1(z)}{g_1(z)}$

με $\left(\dfrac{f_1}{g_1}\right)(a) \neq 0$. $\Rightarrow$ Το a είναι πόλος της $\dfrac{f}{g}$ τάξης $m-k$.

■

Παραδείγματα & Εφαρμογές:

① Να υπολογισθεί το $\text{Res}\,(\underbrace{e^{1/z}}_{f(z)}, 0)$

Λύση

Το 0 είναι μεμονωμένη ανωμαλία της f και μάλιστα ουσιώδης ανωμαλία (γιατί ;;).

Θέτουμε $w = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$ και τότε

$$e^{w} = 1 + w + \frac{w^2}{2} + \dots + \frac{w^n}{n!} + \dots \Rightarrow$$

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots + \frac{1}{n!\,z^n} + \dots$$

Αυτό είναι το ανάπτυγμα Laurent της $f(z) = e^{1/z}$ στο δακτύλιο $\Delta(0,0,+\infty)$

Άρα $a_{-1} = 1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)} e^{\frac{1}{J}}\,dJ$, $0 < \rho < +\infty$

② $\text{Res}\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right) = ;$

Λύση:

Η $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, $z \neq 0$ έχει επουσιώδη ανωμαλία.

Για $z \neq 0$ $\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Res}\left(\frac{\sin z}{z}, 0\right) = a_{-1} = 0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,\rho)} \frac{\sin z}{z}\,dz, \quad 0 < \rho < +\infty$$

Παρατήρηση:

Αν η συνάρτηση f έχει πόλο τάξης 1 στο a, τότε $Res(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$

Αποδ.

$f: \Delta(a,0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ ολόμορφη με πόλο στο a τάξης 1. Τότε: $f(z) = \frac{g(z)}{z-a}$, $0<|z-a|<R$, όπου g ολόμορφη στο $\Delta(a,R)$ και $g(a)\neq 0 \Rightarrow$

Για $z\in\Delta(a,R)$, $g(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \Rightarrow$

Για $z\in\Delta(a,0,R)$ $f(z) = \frac{g(z)}{z-a} = \frac{a_0}{z-a} + a_1 + a_2(z-a) + \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow Res(f,g) = a_0 = g(a)$

Όμως $g(z) = f(z)(z-a)$, $z\neq a$ και άρα:
$a_0 = g(a) = \lim_{z\to a} g(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$

Τελικά έχουμε ότι $Res(f,a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$ ∎

Γενικότερα αν η f έχει πόλο τάξης m στο a, τότε $Res(f,a) = \lim_{z\to a}\frac{((z-a)^m f(z))^{m-1}}{(m-1)!}$

$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z-a)} + a_0 + a_1(z-a) + \dots$

$\Rightarrow (z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-a) + \dots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + \dots$

(3) $Res\left(\frac{z^2}{(1-\cos z)\sin z}, 0\right)$, $f(z) = \frac{z^2}{(1-\cos z)\sin z} \underset{z\neq 0}{=} \frac{z^2}{1-\cos z}\cdot\frac{1}{\sin z}$ (ο πόλος της f) (7)

• $\dfrac{z^2}{1-\cos z} = \dfrac{z^2}{1-\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots\right)} = \dfrac{z^2}{\frac{z^2}{2!}-\frac{z^4}{4!}+\cdots} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}-\frac{z^2}{4!}+\cdots\right)}$

• $\dfrac{1}{\sin z} = \dfrac{1}{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots} = \dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots\right)}$, για $z\neq 0$

Άρα $f(z) = \dfrac{1}{z}\underbrace{\left(\dfrac{1}{\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\cdots}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots}\right)}_{g(z)}$

$g(0)=2\neq 0$, g ολόμορφη πλησίον του 0.
Άρα το 0 είναι πόλος τάξης 1 της f
($\lim_{z\to 0} z f(z) = g(0) = 2 \neq 0$ + χαρακτηρισμός πόλων)

και $\operatorname{Res}(f,0) = \lim_{z\to 0} z\cdot f(z) = g(0) = 2$

4) Αν η f έχει ρίζα τάξης m στο a, τότε η $\dfrac{f'}{f}$ έχει πόλο τάξης 1 στο a και $\operatorname{Res}\left(\dfrac{f'}{f}, a\right) = m$

Λύση

$f: \Delta(a,R) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη, $f(a)=0$, $f\neq 0$.
Τότε $\exists$ $g: \Delta(a,R)\to\mathbb{C}$ ολόμορφη με ~~[illegible]~~
$g(a)\neq 0$ ώστε $f(z)=(z-a)^m g(z)$ (θεώρημα ριζών), $z\in\Delta(a,R)$.

Άρα $f'(z) = m\cdot(z-a)^{m-1} g(z) + (z-a)^m g'(z) =$

$$= (z-a)^{m-1}\left(m\,g(z) + (z-a)\,g'(z)\right)$$

Άρα για $z\neq a$ είναι $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{(z-a)^{m-1}\left(m\,g(z)+(z-a)\,g'(z)\right)}{(z-a)^m g(z)} =$

$= \dfrac{1}{z-a}\cdot\underbrace{\dfrac{m\,g(z)+(z-a)\,g'(z)}{g(z)}}_{h(z)} = \dfrac{h(z)}{z-a}$. Τότε $h(a) = \dfrac{m\,g(a)}{g(a)} =$

$= m \neq 0$. Άρα το a είναι πόλος τάξης

1 για την $\frac{f'}{f}$ και $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = h(a) = m$.

(5) Αν η f έχει πόλο τάξης m στο a τότε η $\frac{f'}{f}$ έχει πόλο τάξης 1 στο a και

$\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = -m$.

Λύση

Υποθέτουμε ότι η $f: \Delta(a,0,R) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη.
Τότε $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-a)^m}$, όπου $g: \Delta(a,R) \to \mathbb{C}$ ολόμορφη

και $g(a) \neq 0$, $z \in \Delta(a,0,R)$. Τότε για $z \neq a$ είναι:

$$f'(z) = \frac{g'(z)(z-a)^m - m\cdot g(z)(z-a)^{m-1}}{(z-a)^{2m}} = \frac{\overbrace{g'(z)(z-a) - m g(z)}^{h(z)}}{(z-a)^{m+1}}$$

h ολόμορφη στο $\Delta(a,R)$ και $h(a) = -m g(a) \neq 0$
Άρα το a είναι πόλος τάξης $m+1$ για την f'

Για $z \in \Delta(a,0,R)$ είναι $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{\frac{h(z)}{(z-a)^{m+1}}}{\frac{g(z)}{(z-a)^m}} = \dfrac{1}{z-a} \cdot \dfrac{h(z)}{g(z)}$

Η $\dfrac{h(z)}{g(z)}$ είναι ολόμορφη στο $\Delta(a,R)$

και $\dfrac{h(a)}{g(a)} = -\dfrac{m\,\cancel{g(a)}}{\cancel{g(a)}} = -m \neq 0$. Άρα το a είναι

πόλος τάξης 1 της $\frac{f'}{f}$ και $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = \dfrac{h(a)}{g(a)} = -m$

(6) Δώστε παράδειγμα ολόμορφης συνάρτησης $f: \Delta(a,0,R) \to \mathbb{C}$ ώστε η συνάρτηση $\frac{f'}{f}$ να έχει πόλο τάξης 2 στο a.

Αποδ.

Ισχυριζόμαστε ότι η ζητούμενη συνάρτηση οφείλει να έχει ουσιώδη ανωμαλία στο a.

Πράγματι, από το 5 το a δεν μπορεί να είναι πόλος για την f.

Επίσης το a δεν μπορεί να είναι ούτε επουσιώδης ανωμαλία για την f.

Αν ήταν, τότε είτε $f(a)=0$ (άρα από 4 η $\frac{f'}{f}$ θα είχε πόλο τάξης 1 στο a) ή $f(a)\neq 0$ και τότε $\frac{f'}{f}$ είναι ολόμορφη συνάρτηση.

Παράδειγμα: Η $f(z)=e^{1/z}$ έχει ουσιώδη ανωμαλία στο 0 και $f'(z)=-\frac{1}{z^2}e^{1/z}$, $z\neq 0$

Άρα για $z\neq 0$ $\quad \frac{f'(z)}{f(z)}=-\frac{1}{z^2}\frac{\cancel{e^{1/z}}}{\cancel{e^{1/z}}}=-\frac{1}{z^2}$

η οποία στο 0 έχει πόλο τάξης 2.