ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

24/10/22

Μάθημα 8ο

Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα και $f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε η f έχει την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής, δηλ. το $f(I) \subseteq \mathbb{R}$ είναι διάστημα.

Σημαντικό ρόλο για αυτό παίζει, εκτός από τη συνέχεια της f, το γεγονός ότι το I είναι διάστημα, δηλαδή συνεκτικό σύνολο.

Ορισμός:
Ένα υποσύνολο $S \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται ~~ασυνεκτικό~~ συνεκτικό αν δεν υπάρχουν μη κενά σχετικά ανοικτά υποσύνολα του S ξένα μεταξύ τους, έστω S_1, S_2, ώστε $S_1 \cup S_2 = S$ (και $S_1 \cap S_2 = \emptyset$)

Ισοδύναμα το $S \subseteq \mathbb{C}$ δεν είναι συνεκτικό αν $\exists$ $U, V \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά ώστε $(S \cap U) \cap (S \cap V) = \emptyset$, $S \cap U \neq \emptyset$ και $S \cap V \neq \emptyset$ και $(S \cap U) \cup (S \cap V) = S$

Παρατήρηση

1. Το S είναι συνεκτικό αν τα μόνα σχετικά ανοικτά και σχετικά κλειστά υποσύνολα του S είναι το $\emptyset$ και το S.

2. Προφανώς τα μονοσύνολα του $\mathbb{C}$ είναι συνεκτικά σύνολα.

Θεώρημα: (Συνεκτικότητα των διαστημάτων)
Τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με τουλάχιστον δύο στοιχεία είναι τα πάσης φύσεως διαστήματα (ανοικτά, κλειστά, ημιανοικτά, φραγμένα ή μη φραγμένα)

Λήμμα Έστω $S \subseteq \mathbb{C}$. ΤΑΕΙ

i) Το S δεν είναι συνεκτικό

ii) $\exists$ συνεχής συνάρτηση $f: S \to \mathbb{C}$ με $f(S) = \{0,1\}$

! Έστω X ένα τυχόν σύνολο και $A \subseteq X$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση του A είναι η $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ με $\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

Αποδ. (λήμματος)

(i ⇒ ii) Έστω ότι S όχι συνεκτικό, τότε $\exists\, U, V \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτά με $S \cap U,\ S \cap V \neq \emptyset$
$(S \cap U) \cap (S \cap V) = \emptyset$ και $S = (S \cap U) \cup (S \cap V)$

χαρακτ. συναρτ. του $S \cap U$

Θεωρώ $f : S \to \mathbb{R} (\subseteq \mathbb{C})$ με $f = \chi_{S \cap U}$
Τότε αφού $S \cap U \neq \emptyset$ έχω $1 \in f(S)$ ($\exists\ x \in S \cap U \Rightarrow f(x) = 1$)
Αφού $S \cap V \neq \emptyset$ έχω ότι $0 \in f(S)$ ($\exists\ y \in \underset{S \setminus (S \cap U)}{\underbrace{S \cap V}} \Rightarrow f(y) = 0$)
Άρα $f(S) = \{0, 1\}$

Για ν.δ.ο. η f είναι συνεχής, αρκεί νδο $\forall\ W \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό έχω $f^{-1}(W) =$ ανοικτό στο S

- Αν $0, 1 \notin W$, τότε: $f^{-1}(W) = \{x \in S : f(x) \in W\} = \emptyset =$ ανοικτό στο S
- Αν $0 \in W$ και $1 \notin W$ τότε $f^{-1}(W) = S \cap V =$ σχετικά ανοικτό στο S
- Αν $0 \notin W$ και $1 \in W$ τότε $f^{-1}(W) = S \cap U =$ σχετικά ανοικτό στο S
- Αν $0, 1 \in W$ τότε $f^{-1}(W) = S =$ σχετικά ανοικτό στο S

Έτσι η f είναι συνεχής στο S.

(ii ⇒ i) Θέτουμε $S_0 = f^{-1}(\{0\})$, $S_1 = f^{-1}(\{1\})$
τότε $S_0 \cup S_1 = S$, $S_0 \cap S_1 = \emptyset$
Έχω ότι $S_1 = S \setminus S_0$.
$S_0 = f^{-1}(\{0\}) =$ κλειστό στο S ως αντίστροφη εικόνα του κλειστού $\{0\}$ μέσω της συνεχούς f
Ομοίως $S_1 = f^{-1}(\{1\}) =$ κλειστό στο S
Αφού $S_0 = S \setminus S_1$ και $S_1 = S \setminus S_0$ έχω ότι τα S_0, S_1 είναι σχετικά ανοικτά. Άρα S όχι συνεκτικό

Πρόταση

Έστω $S \subseteq \mathbb{C}$ συνεκτικό και $f: S \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε το $f(S)$ είναι συνεκτικό $\subseteq \mathbb{C}$.

Αποδ. Αν το $f(S)$ δεν ήταν συνεκτικό τότε θα $\exists\ g: f(S) \to \mathbb{C}$ συνεχής με $g(f(S)) = \{0,1\}$.
Τότε η $g \circ f: S \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής και $(g\circ f)(S) =$
$= g(f(S)) = \{0,1\} \Rightarrow S$ όχι συνεκτικό ΑΤΟΠΟ
$\Rightarrow f(S) =$ συνεκτικό

Θεώρημα (Ενδιάμεσης Τιμής)

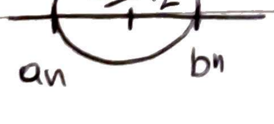
Έστω $f: S \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, όπου S συνεκτικό και f συνεχής.
Τότε $f(S)$ είναι διάστημα
(άρα παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ δύο διαφορετικών τιμών της)

Αποδ.
Επειδή S συνεκτικό και f συνεχής έχω ότι
$f(S) =$ συνεκτικό $\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow f(S) =$ διάστημα

Σημείωση $f(S)$ συνεκτικό $\subseteq \mathbb{C} \overset{f(S)\subseteq\mathbb{R}}{\Rightarrow} f(S)$ συνεκτικό $\subseteq \mathbb{R}$

Αν $f(S)$ όχι συνεκτικό στο $\mathbb{R}$ $\exists\ U,V \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό στο $\mathbb{R}$
με $f(S)\cap U \neq \emptyset \neq f(S)\cap V$, $(f(S)\cap U)\cup(f(S)\cap V) = f(S)$

U,V ανοικτό στο $\mathbb{R} \Rightarrow U = \bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$, (a_n,b_n) ξένα ανά δύο
Επίσης $(a_n,b_n) = \mathbb{R}\cap\Delta\left(\frac{a_n+b_n}{2}, \frac{b_n-a_n}{2}\right) \Rightarrow U = \mathbb{R}\cap\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta\left(\frac{a_n+b_n}{2}, \frac{b_n-a_n}{2}\right)$



$$f(S)\cap U = f(S)\cap \mathbb{R}\cap \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta\left(\frac{a_n+b_n}{2}, \frac{b_n-a_n}{2}\right)}_{\text{ανοικτό στο } \mathbb{C}} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(S)\cap U$ σχετικά ανοικτό ~~στο~~ στο $f(S)$ με τοπολογία που κληρονομεί από το $\mathbb{C}$.

Ομοίως $f(S)\cap V =$ σχετικά ανοικτό, στο $f(S)$ με την... από το $\mathbb{C}$

$\Rightarrow f(S)$ μη συνεκτικό ως υποσύνολο του $\mathbb{C}$, Άτοπο

$\Rightarrow f(S)$ συνεκτικό $\subseteq \mathbb{R} \Rightarrow f(S) =$ διάστημα

Λήμμα: Έστω $\{S_i, i\in I\}$ μια οικογένεια συνεκτικών $\subseteq \mathbb{C}$ με $\bigcap_{i\in I} S_i \neq \emptyset$

Τότε το $S = \bigcup_{i\in I} S_i =$ συνεκτικό σύνολο

Επίσης αν $F \subseteq \mathbb{C}$ συνεκτικό τότε και η $\overline{F}$ είναι συνεκτικό σύνολο.

Ορισμός: Έστω $S\subseteq \mathbb{C}$ και $z\in S$. Η συνεκτική συνιστώσα S_z του z στο S είναι η ένωση όλων των συνεκτικών υποσυνόλων του S που περιέχουν το z

Πρόταση α) Η συνεκτική συνιστώσα S_z του z είναι συνεκτικό και μάλιστα είναι maximal συνεκτικό $\subseteq S$ (~~...~~ δηλ. αν $S_z \subseteq X \subseteq S$ και X συνεκτικό, τότε $S_z = X$)

β) Η συνεκτική συνιστώσα S_z του z στο S είναι σχετικά κλειστό $\subseteq S$

γ) Το σύνολο των συνεκτικών συνιστωσών του S είναι μια διαμέριση του S, δηλ. $S = \bigcup_{z \in S} S_z$ και αν $S_z \neq S_w$ $(z, w \in S) \Rightarrow S_z \cap S_w = \emptyset$.

Παρατήρηση Αν S συνεκτικό, τότε η μόνη συνεκτική συνιστώσα του S είναι το ίδιο το S.

Παρατήρηση

i) Οι συνεκτικές συνιστώσες ενός συνόλου S δεν είναι υποχρεωτικά σχετικά ανοιχτά $\subseteq S$.

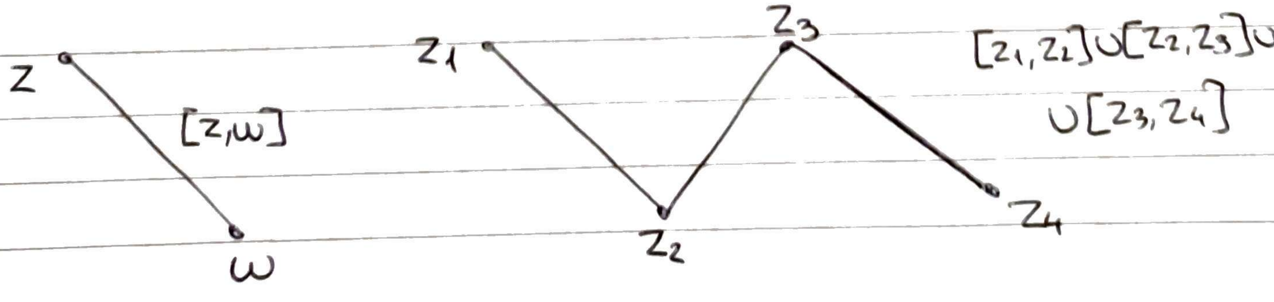
π.χ. αν $S = \{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$ τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του S είναι τα $\{1\}, \{\frac{1}{2}\}, \{\frac{1}{3}\}, \dots$ και το $\{0\}$. Όμως το $\{0\}$ δεν είναι σχετικά ανοικτό $\subseteq S$.

ii) Αν $S \subseteq \mathbb{C}$ πεπερασμένο, τότε οι συνεκτικές συνιστώσες του είναι τα μονοσύνολά του.

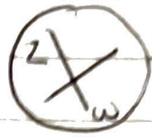
Ορισμός: i) Έστω $z, w \in \mathbb{C}$ με $z \neq w$. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το z και τέλος το w είναι το σύνολο $[z,w] = \{ (1-t)z + tw : 0 \leq t \leq 1 \} \subseteq \mathbb{C}$

ii) Έστω $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$. Η πολυγωνική γραμμή με κορυφές τα $z_1, \dots, z_n$ είναι το σύνολο

$$P = [z_1, z_2] \cup [z_2, z_3] \cup \quad \cup [z_{n-1}, z_n]$$



iii) Ένα υποσύνολο $K \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται **κυρτό** αν:
$\forall\, z,w \in K$ ισχύει ότι $[z,w] \subseteq K$.
δηλ. $\forall\, t \in [0,1]$ είναι $(1-t)z + tw \in K$



Παρατηρούμε ότι κάθε ευθύγραμμο τμήμα είναι κυρτό σύνολο.

Πρόταση:

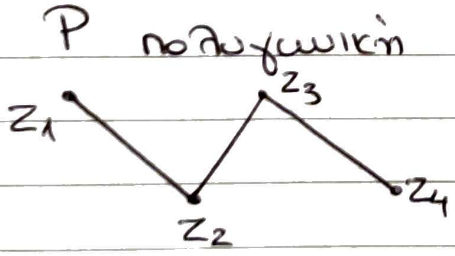
i) Κάθε ευθύγραμμο τμήμα και κάθε πολυγωνική γραμμή είναι συνεκτικό σύνολο

ii) Αν $K \subseteq \mathbb{C}$ είναι κυρτό τότε το K είναι συνεκτικό

Αποδ.

Έστω $z,w \in \mathbb{C}$. Θεωρώ τη συνάρτηση $\varphi[0,1] \to \mathbb{C}$ με $\varphi(t) = (1-t)z + tw$. Τότε η φ είναι προφανώς συνεχής και επειδή $[0,1] =$ συνεκτικό έχω ότι το $[z,w] = \varphi([0,1])$ είναι συνεκτικό σύνολο.

P πολυγωνική γραμμή συνεκτικό σύνολο, με επαγωγή:
$P = [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n]$



Για $m=2$ $P =$ ευθύγραμμο τμήμα άρα συνεκτικό

Επαγωγικό βήμα: Αν $[z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_k, z_{k+1}] = P_k$ συνεκτικό, εφόσον P_k και $[z_k, z_{k+1}]$ συνεκτικά και $P_k \cap [z_k, z_{k+1}] = \{z_k\} \neq \emptyset$, έχω ότι το $P_{k+1} = P_k \cup [z_k, z_{k+1}] =$ συνεκτικό
$\Rightarrow \dots \Rightarrow P = P_n =$ συνεκτικό.